

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física de Materiales



ANISOTROPÍA MAGNETOELÁSTICA EN HILOS AMORFOS
INDUCIDA DURANTE SU PROCESO DE FABRICACIÓN

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Julián Velázquez Cano

Bajo la dirección de los doctores

Antonio Hernando Grande
Manuel Vázquez Villalabeita

Madrid, 2002

ISBN: 978-84-669-0479-7

©Julián Velázquez Cano, 1995



TI-1995/2

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

*Facultad de Ciencias Físicas
Departamento de Física de Materiales*

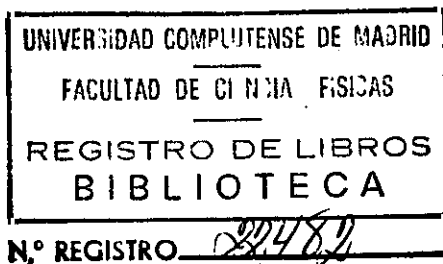
*Instituto de Magnetismo Aplicado
Laboratorio Salvador Velayos*

**ANISOTROPIA MAGNETOELASTICA EN HILOS
AMORFOS INDUCIDA DURANTE SU PROCESO
DE FABRICACION**

Memoria

presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas por:

Julián Velázquez Cano



Madrid, 1995

DIRECTORES DE TESIS:

ANTONIO HERNANDO GRANDE

MANUEL VAZQUEZ VILLALABEITIA

INDICE

Agradecimientos

Prólogo

CAPITULO I -. INTRODUCCION

Materiales magnéticos	3
Hilos amorfos	19

CAPITULO II -. TENSIONES TERMOELASTICAS EN HILOS AMORFOS

Introducción	29
Teoría de la Elasticidad.....	36
Proceso de solidificación de hilos amorfos.....	51
Tensiones en microhilos	59
Flexión en hilos y gradiente térmico real	81

CAPITULO III -. TENSIONES INTERNAS Y ESTRUCTURA DE DOMINIOS. CICLOS DE HISTERESIS

Tensiones internas y estructura de dominios	91
Estudio experimental de ciclos de histéresis	115

CAPITULO IV -. MAGNETOELASTICIDAD DINAMICA Y CAOS

Efecto Wiedemann en hilos amorfos. Descripción del péndulo de torsión. Resultados experimentales.....	149
Péndulo de torsión forzado y tensiones internas. Análisis del efecto Wiedemann en función de las tensiones internas	165
Análisis de la complejidad. Teoría del Caos. Análisis del caos	215

Dinámica de la imanación	241
Análisis de los resultados experimentales desde el punto de vista del Caos	261
Complejidad del comportamiento mecánico	277

CAPITULO V -. MODULOS ELASTICOS EN HILOS AMORFOS

Introducción.....	319
Módulo de cizalladura	325
Módulo de Young	328
Cálculo de módulos elásticos	330
Análisis de algunos resultados experimentales obtenidos con el péndulo de torsión	332

CAPITULO VI -. INTERACCION MAGETOSTATICA ENTRE HILOS AMORFOS

Un resultado experimental	341
Interacción magnetostática entre hilos	341
¿Por qué los hilos no invierten la imanación al mismo tiempo?.....	343
¿Por qué los ciclos de varios hilos no son estables?	343
¿Puede ser caótica la interacción magnetostática?	344
Caos e hilos	347

CONCLUSIONES	363
---------------------------	-----

Referencias	367
--------------------------	-----

Agradecimientos

Es en estos momentos, una vez concluida la redacción de esta memoria, cuando acuden a la mente muchos recuerdos y vivencias, el apoyo de muchas personas que han contribuido a hacer agradable este tiempo dedicado a la investigación.

En primer lugar, quisiera agradecer *a mi familia* su apoyo y cariño.

Quisiera asimismo agradecer al *Instituto de Magnetismo Aplicado* mi permanencia en él; me enorgullece sobremanera el haber colaborado en su puesta en marcha. Agradezco a la *Fundación de Ferrocarriles Españoles* el apoyo económico necesario para poder desempeñar mi trabajo.

Muchas son las personas a las que también quisiera expresar mi gratitud:

A *Paloma García Escorial*, a *Amparo y Manuel Morala* y a *Concepción Jurado*, por su ayuda en los asuntos administrativos, sobre todo durante mi estancia en el Servicio Militar.

Al *Dr. Guillermo Rivero*, por sus consejos y sugerencias, y por su sentido del humor.

Al *Dr. Manuel Vázquez Villalabeitia*, codirector de este trabajo, por sus consejos, guía, paciencia y confianza depositadas en este doctorando. Sus intuiciones y puntos de vista han sido una luz que alumbra el camino.

Al *Profesor Antonio Hernando Grande*, director de este trabajo, por su entusiasmo en la investigación, por sus acertadas sugerencias y por haber permitido a este doctorando realizar su trabajo de la forma más cómoda posible. Gracias.

Quisiera recordar aquí y agradecer su influencia a las siguientes personas: al *Dr. Duxing Chen*, por sus consejos y eterna sonrisa; al *Dr. Howard T. Savage*, por aquellos primeros consejos sobre hilos y tensiones internas; al *Dr. Ludek Kraus* por compartir sus conocimientos y su saber hacer; al *Dr. Alberto Caneiro*, por su amistad y consejos; a los *Profesores María Vallet Regí y José González Calbet* por su apoyo e interés; al *Dr. Arcady Zhukov*, por sus sugerencias y bromas; a *Elena Navarro*, por su perseverancia; a *Enrique Fraga*, por sus conocimientos de electrónica y sus continuas chanzas.

También quiero agradecer su apoyo a todos mis compañeros del Instituto, con los cuales he compartido muy buenos momentos.

Quisiera agradecer especialmente a *Carmen García Oca* su apoyo, sus críticas, sus ideas y, sobre todo, su amistad. Su inquisición constante ante todo aquello que es dado por supuesto ha sido una fuente continua de nuevos puntos de vista. Gracias, Carmen.

A ...

Juan Cano Callejas

Y a...

***Teresa Díaz-Merino Vázquez
Julián Velázquez Marín
Manuela Baillo Martín-Lara***

PROLOGO

La memoria que se presenta concierne a las propiedades de aleaciones ferromagnéticas amorfas en forma de hilo, cuyas propiedades se derivan de la presencia de anisotropías magnetoelásticas inducidas durante su proceso de fabricación.

Tras una introducción a los materiales magnéticos amorfos, se revisan las propiedades fundamentales de los hilos amorfos.

La estructura de dominios de los hilos amorfos está determinada fundamente por anisotropías magnetoelásticas derivadas de *tensiones internas residuales* presentes en el hilo y que son el resultado del enfriamiento ultrarrápido mediante el cual son sintetizados los hilos. Haciendo uso de la teoría de la elasticidad se calcula la distribución de esas tensiones internas en el interior del hilo y se analiza el modo en que determinan la estructura de dominios.

Se analiza la forma en que una distribución de tensiones internas dada influye en los ciclos de histéresis de hilos amorfos.

Se realiza una caracterización magnética de los hilos mediante ciclos de histéresis que permiten obtener información de las componentes axial y circular de la imanación. Se estudia experimentalmente la forma en que varían las propiedades magnéticas al someter las muestras a procesos de recocido que relajan y modifican las tensiones internas. Se estudia el fenómeno de la magnetoimpedancia gigante en hilos amorfos de magnetostricción casi nula, y su aplicación a la construcción de sensores magnéticos.

Las tensiones internas condicionan el efecto Wiedemann en hilos. Se analiza el movimiento de un péndulo de torsión construido con un hilo amorfo. Se analiza el movimiento de éste, y se sugiere que la complejidad observada puede estudiarse desde el punto de vista de la Teoría del Caos.

Se analiza, desde el punto de vista teórico, la influencia de las tensiones internas, y su modificación tras los recocidos, en los módulos elásticos de Young y cizalladura, contrastando, para este último, los resultados teóricos con los experimentales obtenidos a partir de la frecuencia de resonancia de un péndulo de torsión fabricado con hilos amorfos.

Finalmente, y haciendo uso de la teoría del caos, se estudian los ciclos de histéresis axiales de varios hilos amorfos juntos, poniéndose de manifiesto la existencia de una interacción magnetostática entre ellos.

Se ha pretendido que cada capítulo, y a veces cada sección, sea autoexplicativo, por lo que a veces pueden apreciarse reiteraciones, que el autor considera necesarias en pro de la claridad expositiva. La numeración de figuras y ecuaciones están referidas a la sección en que se incluyen. Cuando se hace referencia a ecuaciones o figuras de una sección o capítulo distintos al que se está desarrollando, se menciona el título del capítulo o sección específicos. En general, las figuras de cada sección se presentan al final del texto.

El autor solicita la benevolencia del lector por todos los errores tipográficos o falta de claridad expositiva que puedan encontrarse en el texto.

I - INTRODUCCION

MATERIALES MAGNETICOS

Los hilos amorfos formados por aleaciones ferromagnéticas tienen una característica fundamental: son *artificiales*, no se encuentran en la Naturaleza. Son el resultado de un *proceso de fabricación*, el cual determina sus propiedades fundamentales (Hernando, 1987).

Los hilos amorfos constituyen un ejemplo del *objeto de la física del estado sólido*, el conocimiento y control de las propiedades de los estados de la materia llamados *sólidos*. Se considera que esta rama de la Física es una de las más fundamentales ya que trata cuantitativamente con colecciones de un gran número de partículas elementales que interactúan entre ellas y que están ligadas entre sí formando un todo (Brown, 1970).

Sólidos cristalinos

La física del estado sólido trata de los sólidos, materiales que se forman cuando un líquido o vapor se enfrían a una temperatura lo suficientemente baja como para que las fuerzas interatómicas o intermoleculares de los átomos o moléculas, superen la agitación térmica.

Los átomos en el sólido pueden adquirir una forma ordenada llamada *cristalina*. Esa ordenación permite minimizar la energía libre del sistema de partículas. En las sustancias cristalinas existe una correlación mutua de los átomos a distancias mayores que la interatómica media. Esta correlación se debe al equilibrio de las fuerzas que se producen durante las interacciones de los átomos. En ese estado de equilibrio, los átomos se disponen ordenadamente formando figuras simétricas, características de cada cristal (Pávlov, 1987). Un *cristal ideal* sería una sustancia en la cual las partículas que la componen están dispuestas con *rigurosa periodicidad*, formando una estructura cristalina geoméricamente regular.

Las sustancias cristalinas reales se encuentran en forma de cristales aislados (*monocristales*) y en forma de *policristales*, es decir, de aglomeraciones de pequeños cristales orientados de forma desordenada. Los monocristales reales, como revela la difracción de rayos X, no tienen una estructura perfecta, sino que tienen la llamada *estructura de mosaico*: el monocristal está dividido en los llamados *bloques de mosaico*, cuya dimensión es de aproximadamente 10^{-6} m, y que están ligeramente desorientados los unos respecto de los otros (el ángulo máximo de desorientación oscila entre los $10''$ y los $10'$).

Los trabajos de Laue (1912) y Bragg (1913) establecieron que cada monocristal está formado por una repetición periódica en el espacio de grupos de átomos, iones y electrones, o moléculas. Para estudiar las propiedades espaciales de los cristales se analizan monocristales de dimensiones infinitas, para excluir la influencia de la superficie (Dávídov, 1981). La propiedad más importante es la *simetría de traslación*, es decir, la estructura del cristal es invariante en distintas partes del interior del cristal. La parte más pequeña de un cristal, cuya repetición espacial origina todo el cristal, se llama *celdilla elemental* y puede contener uno a más átomos. La ciencia de la Cristalografía se ocupa de la enumeración y clasificación de todos los tipos posibles de estructuras cristalinas; éstas se clasifican de acuerdo a sus propiedades de simetría, tales como invariancia frente a rotaciones alrededor de un eje, reflexión sobre un plano, etc. La consideración de estas simetrías permite elucidar el número de parámetros necesarios para definir las propiedades macroscópicas de los sólidos (Ziman, 1968). Gracias a las *simplificaciones matemáticas* que impone la simetría de traslación, los fenómenos físicos en sólidos cristalinos fueron bien comprendidos tras el advenimiento de la mecánica

cuántica.

Sólidos no cristalinos

Con este nombre se designan aquellos sólidos que presentan una *estructura no cristalina* a cualquier escala significativa (Kittel, 1993).

La mayoría de las sustancias que nos rodean son *sistemas no ordenados*, es decir, en los que *no existe orden de largo alcance*, pero sí un orden próximo, de corto alcance, en la distribución de los átomos. Las sustancias no cristalinas en las que el coeficiente de viscosidad de corte es mayor de 10^{13} o 10^{14} Nsm⁻² se llaman *sólidos amorfos* (esta definición se detallará en secciones posteriores). A efectos de comparación, cabe decir que la viscosidad de los líquidos es del orden de 10^{-3} Nsm⁻². Los sólidos amorfos, de modo semejante a los cristalinos, pueden ser dieléctricos, semiconductores y metales.

Un problema fundamental en el estudio de la estructura de los sólidos amorfos es la *ausencia de picos de difracción de rayos X*. En los cristales, la presencia de los picos de difracción es una consecuencia de la periodicidad traslacional. A partir de la difracción de rayos X, sería posible conocer la distribución de átomos en el interior de los sólidos. La ausencia de picos en los amorfos imposibilita la correlación de las propiedades macroscópicas con la distribución atómica, al ser desconocida esta última (Hernando, 1987).

Un concepto fundamental para analizar la estructura de los sólidos amorfos es la *función de distribución radial* $f(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$, donde $\rho(r)$ es la densidad de átomos a una distancia r de un átomo dado, tomado como origen. Por tanto, la función de distribución radial representa el número de átomos presentes en una capa esférica de espesor dr y situada a una distancia r del átomo origen. La función $f(r)$ tiene máximos a distancias correspondientes a las interatómicas. El área que hay debajo de cada pico de la curva de la función de distribución radial determina el *índice de coordinación*, es decir, el número de átomos adyacentes que rodean a uno dado.

La función de distribución radial se obtiene experimentalmente a partir la intensidad de rayos X difractados por el sólido; técnicamente se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la llamada *función de interferencia*, relacionada con la energía por unidad de área y tiempo dispersada por N átomos (Hernando, 1987).

No sólo se obtiene información sobre la distribución de átomos a partir de procesos de dispersión de rayos X; sino también gracias a la absorción de éstos por parte de los átomos. Experimentalmente, se encuentra que el coeficiente de absorción de rayos X de los átomos es una función decreciente con la energía de los fotones X, espectro para unas energías específicas en las que hay un incremento discontinuo de la absorción. Estos incrementos del coeficiente de absorción están relacionados con la interferencia constructiva de los paquetes de ondas asociados a los electrones emitidos por los átomos que absorben los rayos X (Elliot, 1989). Estas interferencias estarán relacionadas con la *disposición atómica* (habrá interferencia constructiva si el espaciado interatómico es un número entero de la longitud de onda correspondiente a la onda asociada al electrón). La técnica descrita recibe el nombre de EXAFS, acrónimo de *Extended X-ray Absorption Fine-Structure*.

La información obtenida a partir de la dispersión y absorción de rayos X por los sólidos amorfos, permite proponer la existencia de un *orden de corto alcance* que puede ser *topológico o químico* (que estaría relacionado con la distribución relativa de elementos distintos para índices de

coordinación fijos).

Sólidos magnéticos

Los sólidos, cristalinos o no, presentan diversas propiedades físicas entre las que se cuenta la presencia de una *polarización magnética* cuando el sólido es sometido a un campo magnético, es decir, aparece un *momento magnético* en el material, que es la suma total de los momentos magnéticos elementales de las partículas que forman el cuerpo. Pero, ¿cuál es el origen del momento magnético?

El magnetismo es debido al movimiento de los electrones (Martin, 1967) y es un *efecto cuántico*, ya que un sistema estrictamente clásico en equilibrio térmico no puede poseer momento magnético incluso en un campo magnético (Kittel, 1993). Si un electrón se mueve alrededor del núcleo atómico, su movimiento equivale a una corriente eléctrica de cierta intensidad I , circulando en una espira (la propia órbita) de cierta área A . Este circuito constituye un *dipolo magnético* (Feynman, 1987), al que se le asocia una magnitud denominada momento magnético dipolar orbital, m_L , cuya magnitud viene dada por $m_L = I \cdot A$, siendo la dirección del momento perpendicular al plano de la órbita (Eisberg, 1983). El movimiento del electrón en su órbita se caracteriza mecánicamente por el llamado *momento angular orbital*, L , magnitud vectorial cuya magnitud es proporcional a la velocidad del electrón, a su masa y a la distancia de éste al núcleo atómico. La relación entre el momento magnético y el angular depende de la carga, e , del electrón y de su masa, m , en la forma siguiente:

$$\frac{m_L}{L} = \frac{e}{2m} = 2\pi \frac{g_L \mu_B}{h} \quad (1)$$

donde $\mu_B = e \cdot h / 4\pi$ es el *magnetón de Bohr*, unidad natural para medir los momentos magnéticos dipolares, siendo su valor $\mu_B = 0.927 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$. La cantidad g_L es el *factor orbital*, que para el caso de un electrón moviéndose alrededor del núcleo, su valor es igual a la unidad. La letra h designa la *constante de Planck*, cuyo valor es $6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J/s}$.

Ahora bien, la cantidad L tiene una traducción cuántica como *observable*, que puede ser representado mediante un operador lineal autoadjunto que actúa en el espacio de Hilbert asociado al sistema físico considerado (Galindo, 1978). Teniendo en cuenta la relación (1), que da cuenta de la proporcionalidad entre el momento angular y el magnético, éste último puede ser considerado también como una magnitud cuántica, representada por el operador correspondiente, cuyos autovalores definen los valores posibles que puede tomar dicha magnitud. Estos autovalores, al igual que los de L , forman un *conjunto discreto*.

Muchas observaciones experimentales, como, por ejemplo, el experimento de Stern-Gerlach, indican que el momento angular total del electrón y el momento magnético asociado, es mayor que el atribuido únicamente al movimiento orbital del electrón. Existe una contribución adicional que proviene de un grado de libertad intrínseco del electrón: el *espín*, magnitud cuántica sin equivalente clásico. Se supone que el electrón posee un *momento magnético dipolar intrínseco*, m_s , debido al hecho de que posee un momento angular intrínseco, S , llamado espín. En una visión clásica, la que se modelizase el electrón como una partícula esférica, el espín correspondería al momento angular proveniente del giro del electrón alrededor de sí mismo. No obstante, esto es sólo una imagen, ya que el espín es una característica *exclusivamente cuántica*. La relación entre las magnitudes de m_s y S es análoga a la dada en (1):

$$\frac{m_s}{S} = 2\pi \frac{g_s \mu_B}{h} \quad (2)$$

con $g_s = 2$.

Por tanto, el momento magnético de un átomo libre proviene del espín de los electrones y del momento angular orbital alrededor del núcleo. Existe otra contribución proveniente del *cambio del momento orbital* producido por la aplicación de un campo magnético.

¿Qué átomos poseen momento magnético?

En todos los átomos e iones con capas electrónicas totalmente ocupadas los momentos magnéticos orbitales y de espín son nulos. A causa de ello también lo es el momento magnético total. Por ello, los átomos e iones con capas electrónicas *parcialmente desocupadas*, como son los elementos de transición y las tierras raras, *o con capas de valencia con un número impar de electrones*, tienen momento magnético total distinto de cero. También lo posee el átomo de oxígeno, que aunque tiene un número par de electrones, los momentos de espín de dos de estos no están compensados.

Imanación

Si un cuerpo de volumen V está formado por n átomos portadores de momento magnético, m_i , se llama imanación \mathbf{M} , al momento magnético total por unidad de volumen:

$$\overline{\mathbf{M}} = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{m}}_j \quad (3)$$

La imanación, \mathbf{M} , cantidad vectorial, se relaciona con el campo magnético aplicado \mathbf{H} , según la expresión:

$$\overline{\mathbf{M}} = \chi \overline{\mathbf{H}} \quad (4)$$

donde χ es la *susceptibilidad magnética* del material, cantidad adimensional que puede ser constante o depender de la magnitud de \mathbf{H} . La respuesta total del material magnético ante un campo magnético excitador se cuantifica mediante otra magnitud vectorial llamada *inducción magnética*, \mathbf{B} , cuyo valor es:

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu_0 (\overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{M}}) = \mu_0 (1 + \chi) \overline{\mathbf{H}} = \mu_r \overline{\mathbf{H}} \quad (5)$$

donde μ_r es la permeabilidad magnética relativa del medio, siendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, la permeabilidad magnética del vacío. En general, para sólidos anisotrópicos, χ y μ_r son cantidades tensoriales (se representan por matrices); pero para sólidos isotrópicos son escalares.

Tipos de sólidos magnéticos

Los cuerpos magnéticos se clasifican según el valor de la susceptibilidad según el siguiente esquema:

- Si $\chi < 0$ (y del orden de 10^{-6}) \rightarrow cuerpo **diamagnético**
- Si $\chi > 0$ (y del orden de 10^{-6}) \rightarrow cuerpo **paramagnético**
- Si $\chi > 0$ (y del orden de 10^3) \rightarrow cuerpo **ferromagnético**

Diamagnetismo

El diamagnetismo es un fenómeno que *aparece en cualquier sistema de cargas eléctricas, en cualquier átomo* y es consecuencia de la *ley de Lenz*: cuando se aplica un campo magnético a un sistema de cargas, éste reacciona de forma que intenta contrarrestar la acción del campo aplicado, creando otro de sentido contrario. Los electrones en el átomo consiguen esto moviéndose de forma que se cree un momento magnético orbital antiparalelo al campo aplicado. El campo aplicado, por tanto, hace variar la velocidad de movimiento del electrón en su órbita. Si el plano de ésta no es perpendicular a la dirección del campo, la órbita adquiere un movimiento de precesión en torno a la dirección del campo, con una frecuencia de movimiento que es proporcional a la magnitud del campo, a la carga de capa particular e inversamente proporcional a su masa; esta frecuencia recibe el nombre de *frecuencia de Larmor*.

Paramagnetismo

El diamagnetismo es un efecto pequeño y en la mayoría de los casos, la susceptibilidad magnética de los materiales paramagnéticos supera, en módulo, a la de los diamagnéticos. La dependencia de la imanación en los materiales paramagnéticos y diamagnéticos, con la intensidad del campo, H , es *lineal* (los efectos desaparecen al hacerlo el campo). No obstante, en los paramagnéticos la linealidad sólo se observa en la región de campos bajos y temperaturas altas. Para campos altos y temperaturas bajas, la dependencia $M(H)$ tiende hacia una *saturación*.

La susceptibilidad depende de la temperatura a través de la *ley de Curie*:

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (6)$$

donde C es la llamada constante de Curie.

Poseen paramagnetismo los siguientes sistemas:

a) Átomos y moléculas con un número impar de electrones, como, por ejemplo, los átomos libres de los elementos alcalinos, la molécula de óxido nítrico NO y algunos radicales orgánicos libres.

b) Átomos libres e iones con capas internas incompletas, como los elementos de transición hierro, cobalto, níquel, etc., y los elementos de las tierras raras. Cada átomo lleva ligado un momento magnético condicionado por los espines no compensados de uno o varios de los electrones de la capa incompleta d o f .

c) Moléculas con número par de electrones, como, por ejemplo, el O_2 y el S_2 ; en ellas existe un momento magnético debido a la falta de compensación de los espines de los electrones.

d) Defectos de redes cristalinas con un número impar de electrones; un ejemplo lo constituye los centros F en los cristales alcalino-halógenos.

e) Los metales.

Para un conjunto de N átomos por unidad de volumen, a una temperatura T, la imanación en la dirección del campo aplicado B viene dada por la expresión:

$$M = Nm L(\beta) \quad (7)$$

donde m es el momento magnético de cada átomo, y $L(\beta)$ la *función de Langevin*, de valor

$$L(\beta) = \coth \beta - \frac{1}{\beta} \quad (8)$$

siendo

$$\beta = \frac{mB}{K_B T} \quad (9)$$

donde K_B es la *constante de Boltzman*, de valor $K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$.

Para campos muy intensos y temperaturas bajas ($\beta \rightarrow \infty$, según la expresión (9)) todos los momentos magnéticos de los átomos están orientados en la dirección del campo.

A pesar de predecir muchos resultados experimentales, la fórmula (7) *contradice el tercer principio de la termodinámica*, que asegura que cuando la temperatura T tiende hacia el cero absoluto, la entropía, S, del sistema debe también tender hacia cero. El cálculo de la entropía dentro del marco del modelo clásico de paramagnetismo de Langevin conduce a que la entropía $S \rightarrow -\infty$ cuando $T \rightarrow 0$. La causa de esta contradicción estriba en que la fórmula (7) no tiene en cuenta la *cuantización de los momentos magnéticos*. Teniendo esto en consideración, se obtiene que la imanación alcanza el valor:

$$M = Ng \mu_B j B_j(\beta) \quad (10)$$

donde j es el *número cuántico del momento angular total*, de forma que m, para un j dado, puede tomar valores $g \mu_B (2j-1), \dots, g \mu_B (2j+1)$. La función B_j es la *función de Brillouin*, de valor:

$$B_j(\beta) = \frac{2j+1}{2j} \coth \frac{2j+1}{2j} \beta - \frac{1}{2j} \coth \frac{\beta}{2j} \quad (11)$$

que se reduce a la de Langevin si $j \rightarrow \infty$.

Diamagnetismo y paramagnetismo de un conjunto de átomos

Hasta ahora se ha analizado el diamagnetismo y paramagnetismo de átomos aislados. En los sólidos reales hay que tener en cuenta la influencia de la *interacción entre los átomos*.

En general, los sólidos pueden dividirse en metales y no metales. En el caso de los metales, tanto la red cristalina como los electrones de conducción contribuyen a la susceptibilidad.

Supongase que la red cristalina está constituida por átomos con capas internas completas. Tanto en el caso de los metales como en el de los no metales, la red presenta diamagnetismo; sobre el momento diamagnético de los átomos no ejerce ninguna influencia la proximidad de otros átomos.

Si en un cristal no metálico hay átomos con capas electrónicas parcialmente ocupadas, el material es paramagnético, pero el momento magnético del átomo en el cristal puede ser diferente del átomo aislado. Los cristales paramagnéticos no metálicos se pueden clasificar en:

a) *Cristales con enlace interiónico débil* -. Son sólidos en los que los enlaces entre los iones son tan débiles que el momento paramagnético se puede calcular sumando los momentos de los átomos libres; esta condición la verifican muchas sales de los elementos de tierras raras.

b) *Cristales con momentos orbitales "congelados"* -. Las interacciones interatómicas congelan los momentos orbitales, manteniéndose libres los momentos de espín. Esta situación la verifican casi todas las sales de los metales del grupo de transición del hierro.

c) *Cristales con momentos orbitales y de espín "congelados"* -. A este tipo de sustancias pertenecen los cristales en los que un fuerte enlace magnético congela los momentos orbitales y de espín. En este grupo se encuadran los metales de transición del grupo del platino y el paladio.

En los metales, los electrones de conducción contribuyen al paramagnetismo, y se encuentra que la *susceptibilidad asociada no depende de la temperatura*. Por ejemplo, los metales alcalinos son paramagnéticos. El paramagnetismo del gas de electrones de conducción deriva del hecho de que los electrones tienen un momento magnético de espín igual al magnetón de Bohr. Si se tienen en cuenta las propiedades cuánticas del electrón se encuentra también una *contribución diamagnética* del gas de electrones, que es un tercio de la susceptibilidad paramagnética. Para muchos sólidos paramagnéticos, la dependencia de la susceptibilidad con la temperatura verifica la ley de Curie-Weiss:

$$\chi = \frac{C}{T - \theta} \quad (12)$$

donde θ es una temperatura, dependiente del material, que puede ser positiva o negativa.

Ferromagnetismo

Las sustancias ferromagnéticas presentan una susceptibilidad muy grande y poseen una *imanación espontánea*, es decir, tienen una imanación distinta de cero en ausencia de campo magnético. La dependencia de la imanación con el campo, es decir, la función $M(H)$ es *no lineal* y el ciclo completo de inversión del sentido de la imanación describe el llamado *ciclo de histéresis*. La susceptibilidad depende del campo, $\chi = \chi(H)$.

Manifiestan ferromagnetismo únicamente los cristales de nueve elementos químicos:

- Tres metales 3d: Fe, Co, Ni.

- Seis metales 4f: Gd, Dy, Tb, Ho, Er, Tm.

Son ferromagnéticas también gran número de aleaciones y compuestos químicos. La característica común de los ferromagnéticos es que están constituidos por átomos *con capas electrónicas d o f incompletas*, por lo que tienen un momento magnético no compensado. La presencia de imanación espontánea pone de manifiesto que los momentos magnéticos de los átomos no están orientados aleatoriamente, sino paralelos unos a otros.

Dado que en los elementos de transición los momentos orbitales de la capa 3d están congelados, debe esperarse que *el ferromagnetismo esté relacionado con la ordenación de los momentos de espín*. Esto fué confirmado mediante los experimentos de Einstein-Haas y de Barnett, realizados en 1915 (Martin, 1967).

Campo molecular

Dado que un campo magnético \mathbf{B} orienta los momentos magnéticos en su dirección, Weiss supuso que en el ferromagnético existe un campo molecular interno \mathbf{B}_i , cuyo valor es proporcional a la imanación \mathbf{M} , siendo λ la constante de proporcionalidad:

$$\overline{B}_i = \lambda \mu_o \overline{M} \quad (13)$$

de forma que el campo total \mathbf{B}_e que actúa sobre un átomo en el ferromagnético, al aplicarle un campo externo, \mathbf{B} , viene dado por:

$$\overline{B}_e = \overline{B} + \lambda \mu_o \overline{M} \quad (14)$$

En un ferromagnético, la *imanación espontánea depende de la temperatura*; por $T=0$, se alcanza la imanación más alta, en que todos los espines están orientados paralelamente; al elevar la temperatura, el paralelismo se pierde debido a la agitación térmica, de forma que disminuye la imanación, llegando a desaparecer a la *temperatura de Curie*, T_c , sobrepasada la cual el material se comporta como un paramagnético.

Origen físico del campo molecular

Si el campo molecular de Weiss tuviese naturaleza magnética, debería ser extremadamente intenso. Dado que el orden magnético se destruye a la temperatura de Curie, la energía de interacción de este campo con el momento magnético del átomo, debería ser del orden de la energía térmica media por átomo en la temperatura de Curie. Dado que ésta es del orden de centenares de grados kelvin en la mayoría de los ferromagnéticos, el campo molecular debería ser del orden de 1000 Teslas.

El experimento de Dorfman puso de manifiesto que la naturaleza del campo molecular es *eléctrica*. El experimento consistía en hacer incidir un haz de electrones sobre una laminilla de níquel de 20 μm de espesor situada entre los polos de un electroimán. Sobre una placa fotográfica, situada detrás de la placa, se registra la traza dejada por el haz de electrones que atraviesan la laminilla. El experimento suponía que si la laminilla estaba imanada hasta la saturación paralelamente a su superficie, el campo molecular \mathbf{B}_i debería estar orientado en toda la muestra paralelamente al campo exterior \mathbf{B} , es decir, perpendicularmente a la velocidad de los electrones en el haz, con lo que la fuerza de Lorentz ejercida sobre ellos es máxima. Si el campo interior \mathbf{B}_i tuviese naturaleza

magnética, el haz de electrones, al atravesar la laminilla, debería desviarse bajo la acción del campo total $\mathbf{B} + \mathbf{B}_i$. Sin embargo, la desviación del haz observada corresponde a un campo de un Tesla, es decir, el valor de la inducción en la muestra. Con ello queda demostrado que el campo molecular no es de naturaleza magnética, sino eléctrica. El origen de este campo sólo queda fundamentado mediante la mecánica cuántica.

Interacción de canje

Los cálculos mecanocuánticos de la *interacción electrostática* entre dos electrones conduce a la consideración de un término energético adicional al puramente coulombiano. Este término recibe el nombre de *energía de canje*, y es de la forma (para dos átomos):

$$E_{\text{canje}} = -A \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \quad (15)$$

donde A es la llamada *integral de canje*, que tiene dimensiones de energía, y donde S_1, S_2 son los *operadores cuánticos de espín*. Desde el punto de vista clásico, la energía de canje puede expresarse en la forma:

$$E_{\text{canje}} = -A s^2 \cos(\overline{S_1}, \overline{S_2}) \quad (16)$$

donde (S_1, S_2) es el ángulo que forman los vectores que representan los espines de cada átomo y s es el módulo de cada uno de esos vectores. Si $A > 0$, la energía mínima se obtiene para una orientación paralela de los espines, y si $A < 0$, el mínimo de la energía de canje corresponde a la orientación antiparalela.

Teniendo en cuenta la interacción de canje, se aplican dos enfoques distintos para explicar el ferromagnetismo:

1 -. Modelo de los electrones colectivizados -. Fué propuesto por Frenkel y se aplica a partículas que cumplen la estadística de Fermi-Dirac. Propone que con cierta densidad de gas electrónico es posible la aparición de un estado imanado espontáneo, independientemente de la energía cinética. No obstante, se ha visto experimentalmente que la aparición del ferromagnetismo en un sistema de electrones d o f está relacionada con la densidad de estados anormalmente alta, comparada con la de los electrones s , en las bandas d y f ; ningún experimento ha puesto de manifiesto la presencia de ferromagnetismo en metales que no contienen átomos o iones con capas d o f incompletas.

2 -. Modelo de momentos magnéticos localizados -. Heisenberg propuso que los momentos magnéticos están localizados cerca de los nudos de la red cristalina. En este modelo, el ferromagnetismo se debe al ordenamiento de los momentos magnéticos de los iones vecinos con capas d o f incompletas. La interacción de canje de los electrones entre iones que son vecinos, recibe el nombre de *canje directo*, y se debe a las superposiciones de carga de los distintos átomos magnéticos. Por otro lado, en muchas aleaciones y compuestos químicos, los iones magnéticos están separados por iones no magnéticos (con todas las capas electrónicas llenas); en este caso, la interacción de canje entre los iones magnéticos se efectúa mediante los electrones del ión no magnético. Esta interacción recibe el nombre de *supercanje*. El ferromagnetismo puede ser debido también a un *canje indirecto* entre los electrones localizados mediante los electrones de conducción. Este tipo de canje es

característico de metales y aleaciones de tierras raras.

La interacción de canje depende del valor de la integral de canje, A , cuyo valor es función de la distancia interatómica. El valor de A puede ser tanto positivo como negativo en función de la distancia entre átomos. Por ejemplo, para el α -Fe, se tiene que $A > 0$ y para el γ -Fe es $A < 0$.

A modo de resumen, se puede decir que el ferromagnetismo aparecen en las condiciones siguientes:

i) Existencia de momentos magnéticos localizados, debidos átomos con capas eléctricas d o f incompletas.

ii) Integral de canje positiva

iii) Densidad de estados muy grande en las bandas d o f, para que el aumento de energía cinética debido a la ocupación electrónica de los niveles libres más elevados (a causa del principio de Pauli), no sea mayor que la disminución de la energía a expensas de la interacción de canje.

Dependencia del ferromagnetismo con la temperatura

La orientación perfecta de todos los espines sólo se aprecia en el cero absoluto, ya que en estas condiciones la energía es mínima. Al elevar la temperatura, la energía del ferromagnético crece a expensas de la inversión del sentido de algunos espines. A causa de la interacción de canje, esta situación no es favorable, de forma que los espines vecinos tienden a hacer que el espín invertido retorne a su estado inicial. La interacción de canje conduce a que se invierta el propio espín vecino, de forma que por todo el cristal se propaga una suerte de *onda de inversiones de espines*, llamada *onda de espín*. Este estado excitado tiene una energía alta, respecto a la que se tendría en el estado de total paralelismo de los espines. Puede crearse una excitación de energía menor de forma que cada espín *sólo gire parcialmente*; en este caso, las ondas de espín son oscilaciones de la orientación relativa de los espines en el cristal. Estas ondas se asemejan a la ondas elásticas y des igual forma que éstas, aquellas están cuantizadas, siendo el *magnón* el cuanto de energía.

Cuando se aumenta la temperatura, lo hace también en número de magnones y, por consiguiente, el momento magnético total disminuye. Para densidades de magnones pequeñas, de forma que pueda desprejarse su interacción mutua, los magnones pueden considerarse como un gas perfecto y obedecer la estadística de Bose-Einstein. Calculando su número en función de la temperatura mediante técnicas estadísticas, se encuentra que la imanación en los ferromagnéticos obedece la ley $T^{3/2}$ de Bloch:

$$M(T) = M_s \left[1 - \alpha \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \quad (17)$$

donde M_s es la imanación de saturación, α es un coeficiente adimensional, de valor próximo a la unidad y T_c es la temperatura de Curie.

Antiferromagnetismo y ferrimagnetismo

Existen muchas sustancias en las que los momentos magnéticos están orientados *antiparalelamente*, situación que es energéticamente favorable cuando la integral de canje es negativa.

En estas sustancias el orden magnético también depende de la temperatura y desaparece a la llamada *temperatura de Néel*. Si la imanación total es nula, el cristal se dice *antiferromagnético* y si no lo es, se llama *ferrimagnético*. Un ejemplo de antiferromagnético lo constituye el MnO , y de ferrimagnético, las *ferritas*, que son óxidos dobles de metales cuya composición es $\text{MO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, siendo M un metal divalente.

En los antiferromagnéticos, la susceptibilidad sigue una ley tipo Curie-Weiss para temperaturas mayores que la de Néel, θ_N , a partir de la cual se comporta como un paramagnético:

$$\chi = \frac{C}{T + \theta_N} \quad (18)$$

En los antiferromagnéticos y ferrimagnéticos, la interacción de canje es indirecta.

Propiedades magnéticas de materiales amorfos

Hasta ahora, todas las propiedades magnéticas se han enumerado haciendo referencia a los cristales, pero los amorfos pueden exhibir también orden de espín de largo alcance (como es el caso del ferromagnetismo) en una estructura topológica que carece de orden de largo alcance. El ferromagnetismo no es consecuencia del orden estructural de largo alcance (Hernando, 1987).

Existen muchas aleaciones amorfas con propiedades magnéticas. Las que revisten mayor interés son las aleaciones de metales de transición (Mn, Fe, Co, Ni) y de tierras raras (Eu, Gd) con metales y metaloides. A temperaturas altas, estas aleaciones se comportan como paramagnéticas, variando la susceptibilidad con la temperatura de acuerdo a una ley del tipo Curie-Weiss (expresión (12)). Cuando la temperatura descende por debajo de θ , se produce una ordenación magnética que puede ser ferro, antiferro o ferrimagnética. En algunos casos, se aprecia el estado llamado *vidrio de espín*, que se caracteriza por una "congelación" de todos los momentos magnéticos de espín en direcciones aleatorias a temperatura inferior a una temperatura característica. Algunas aleaciones amorfas se ordenan como ferromagnéticas, a pesar de que sus análogos cristalinos lo hacen como antiferromagnéticas, como consecuencia del cambio de signo de la integral de canje al variar la distancia interatómica.

Las aleaciones amorfas más interesantes son las que tienen al hierro y cobalto como elementos de transición. Son materiales *magnéticamente blandos*, de *alta susceptibilidad* y *bajo campo coercitivo* (campo necesario para anular la imanación).

Estructura de dominios

Hemos visto que en un ferromagnético, los momentos de espín de todos los átomos están orientados paralelamente los unos con los otros. La imanación total debería ser cercana a la de saturación. Sin embargo, la experiencia indica que la imanación total en un ferromagnético es nula. Si se le aplica un campo magnético, la imanación aumenta y alcanza la saturación para campos débiles. ¿Cómo explicar esto?

Weiss propuso en 1910 que en un material ferromagnético, existen *regiones de imanación espontánea* denominadas *dominios*, estando las imanaciones en cada uno de ellos orientadas de

diferente forma. La imanación de un cuerpo ferromagnético en conjunto es la suma vectorial de las imanaciones de los dominios por separado. La observación experimental de los dominios corrió a cargo de *Bitter* en 1931 mediante la aplicación de una solución coloidal de polvo ferromagnético fino en la superficie pulimentada del ferromagnético. Las partículas de polvo se concentran a lo largo de las líneas que delimitan los dominios, ya que allí el campo magnético es máximo. Otros métodos para observar los dominios lo constituyen el *efecto Faraday* (mediante el análisis de la rotación del plano de polarización de la luz al pasar a través del ferromagnético) y el *efecto Kerr* (por la rotación del plano de polarización de la luz al reflejarse en la muestra). La **figura 1** muestra una estructura de dominios, mediante la que se cierra el flujo magnético.

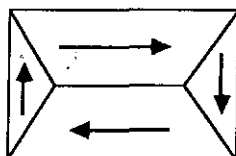


Figura 1 -. Estructura de dominios

Procesos de imanación

La imanación de una muestra ferromagnética, inicialmente desimanada, se produce mediante la variación de la forma y la orientación de los dominios. Los llamados procesos de imanación pueden llevarse a cabo por *desplazamiento de paredes* (las paredes delimitan los dominios) y/o por *rotación de la imanación*. El primer proceso tiene lugar a campos aplicados débiles, mientras que el segundo acontece a campos más intensos.

Para campos débiles, se aprecia un aumento del volumen de los dominios cuya imanación tiene el mismo sentido que el campo aplicado, a expensas del volumen de aquellos otros dominios en los que la imanación está situada en otras posiciones energéticamente menos favorables. Si el campo exterior se elimina, los dominios recuperan su forma y dimensiones iniciales.

Si se aumenta la intensidad del campo, el desplazamiento de las paredes que delimitan los dominios puede ser irreversible, es decir, no recuperan la posición inicial al retirar el campo (debido, por ejemplo, a la presencia de defectos). Los procesos de imanación por desplazamientos irreversibles se aprecian en el llamado *efecto Barkhausen*, que consiste en que la imanación aumenta *por saltos*, no con suavidad, al ir aumentando el valor del campo aplicado.

Para campos magnéticos intensos, la imanación de la muestra se realiza por giro de las imanaciones de cada dominio hacia la dirección del campo. Con ello, se tiende hacia la *saturación técnica*; una vez alcanzada ésta, se observa un crecimiento lento de la imanación, debido a que a una temperatura dada, no todos los espines dentro de los dominios tienen orientaciones rigurosamente paralelas.

Ciclo de histéresis

Representa la curva de imanación tras un ciclo completo del campo aplicado. Su forma típica se muestra en la figura 2:

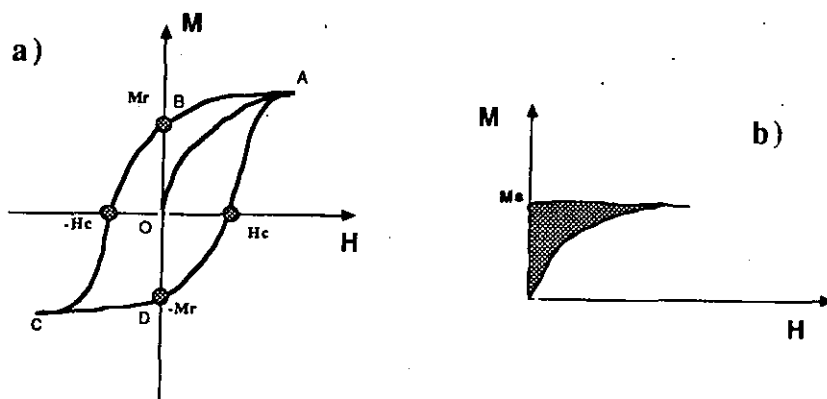


Figura 2 -. a) Ciclo de histéresis, b) Trabajo, por unidad de volumen, requerido para imanar una sustancia

Supongase que la muestra está imanada hasta saturación, siguiendo la curva OA (ver figura 2a). Si se disminuye el campo, la variación de la imanación no seguirá la curva OA, sino que lo hará a través de la curva AB, ya que debido a procesos irreversibles, se conserva cierta *imanación remanente*, M_r , a campo nulo ($H=0$). Para conseguir que la imanación sea nula, hay que aplicar al campo H_c , conocido como campo coercitivo. El ciclo de reimanación completo describe el llamado *ciclo de histéresis*.

En la figura 2a se aprecia claramente cómo la disminución de la imanación M , se retrasa con respecto a la disminución del campo H . Ello implica que la energía recibida por el material durante la imanación no es cedida totalmente en el proceso de desimanación. Esta energía se pierde. ¿En qué cantidad?

La energía magnética por unidad de volumen acumulada por la muestra al imanarse hasta saturación viene dada por la expresión:

$$E = \int_0^{M_s} \mu_0 H dM \quad (19)$$

La energía es proporcional al área que queda entre el eje de ordenadas (imanación) y la curva de primera imanación del ciclo de histéresis (ver figura 2b). Cuando el campo disminuye hasta cero, la energía que se desprende tiene una expresión similar a (19), y viene representada también por el área que queda entre el eje de imanación y la curva de histéresis. La diferencia entre las dos áreas es proporcional a la energía que queda en el material ferromagnético. Por consiguiente, el *área encerrada en el ciclo de histéresis* representa la energía perdida en el proceso de imanación.

Según la forma de los ciclos de histéresis, los materiales magnéticos se pueden agrupar en dos tipos (Pávlov, 1987):

- Magnéticamente blandos -. Su campo coercitivo es pequeño, del orden de A/m (menores que 800 A/m). Se usan para núcleos de transformadores.

- Magnéticamente duros -. Tienen un campo coercitivo alto, del orden de KA/m (mayores que 4 KA/m). Se usan para fabricar imanes permanentes.

Formación de estructuras de dominios

Las estructuras de dominios observadas en materiales ferromagnéticos se forman como consecuencia de la competencia entre los distintos tipos de energía implicados en los sólidos ferromagnéticos. La preponderancia de una energía sobre otras, condicionará la estructura de dominios adoptada por el material.

La energía total de un ferromagnético se compone de las siguientes contribuciones:

- 1) Energía de canje.
- 2) Energía de anisotropía magnética cristalina.
- 3) Energía de magnetoelástica o de deformación magnetostrictiva.
- 4) Energía magnetostática.
- 5) Energía magnética.

A continuación, vamos a detallar cada uno de estos términos.

1 -. Energía de canje

Viene determinada por la orientación de los espines unos respecto de otros; el estado de mínima energía viene determinado por la orientación paralela de los espines.

2 -. Energía de anisotropía magnética cristalina

Las curvas de imanación de monocristales ferromagnéticos muestran que *existen direcciones de fácil imanación y de difícil imanación*. Por ejemplo, en los cristales cúbicos, la dirección [100] (dirigida según las aristas del cubo que representa su celdilla unidad) es de fácil imanación, mientras que la [111] (a lo largo de la diagonal del cubo) es de difícil imanación. La existencia de direcciones privilegiadas se atribuye a la *interacción espín-órbita*. En un cristal ferromagnético existen interacciones que orientan la imanación a lo largo de determinadas direcciones cristalográficas. Ello se debe a la *superposición de órbitas electrónicas*, interaccionando los momentos de espín con los orbitales debido a la existencia del acoplamiento espín-órbita (Sánchez del Río, 1977), y los momentos orbitales interaccionan a su vez con la red cristalina a expensas de los campos electrostáticos que hay en ella y de la superposición de las funciones de onda de los átomos vecinos.

3 -. Energía de deformación magnetostrictiva

Se denomina *magnetostricción* a la variación de las dimensiones de un cuerpo al imanarlo. Por ejemplo, el níquel se contrae en la dirección de la imanación al imanarlo a saturación, y se dilata en la dirección transversal. El hierro, por el contrario, se dilata en la dirección de la imanación. Si l es la longitud inicial y Δl su variación, la magnitud $\lambda_s = \Delta l/l$ recibe el nombre de *constante de magnetostricción*. La energía elástica correspondiente a la deformación magnetostrictiva es del orden de:

$$E_\lambda = \frac{1}{2} Y \lambda_s^2 \quad (20)$$

donde Y es el módulo de Young del material. ¿Cómo afecta esta energía la estructura de dominios? Para entenderlo, vamos a considerar su influencia sobre una muestra de hierro. En éste, los dominios están imanados a saturación a lo largo de las direcciones $[100]$ (ver figura 3).

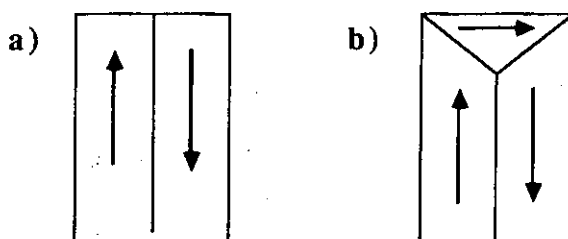


Figura 3 -. Modificación de estructura de dominios:
a) sin contribución magnetoelástica,
b) con energía magnetoelástica.

Por efecto de la magnetostricción, estos dominios están alargados en la dirección de la imanación, y comprimidos en las direcciones transversales $[010]$ y $[001]$. Dos dominios contiguos con los vectores de imanación dirigidos en sentidos opuestos (figura 3a) no poseen energía elástica, ya que en ellos las λ_s son iguales. La energía de la muestra de la figura 3a disminuiría si se formase el dominio en forma de prisma triangular (figura 3b) que cierre el flujo magnético (que elude la presencia de polos magnéticos). Este dominio tiene la imanación orientada perpendicularmente a los dos dominios iniciales. El dominio tiende a alargarse en la dirección en la que apunta la imanación. El nuevo dominio acumula cierta cantidad de *energía magnetoelástica*, que es proporcional al volumen de dicho dominio.

4 -. Energía magnetostática

Esta energía aparece como consecuencia de la presencia de polos magnéticos, que producen un campo desimanador, H_D , de sentido contrario a la imanación, y proporcional al valor de ésta. Este campo interactúa con la imanación, M , dando lugar a una energía:

$$E_m = \mu_0 N_D \frac{Ms^2}{2} \quad (21)$$

donde N_D es el *factor desimanador*, que depende de la geometría de la muestra y M_s es la imanación de saturación. La energía magnetostática disminuye si la muestra se divide en dominios antiparalelos, de forma que se elimine la presencia de polos magnéticos. La división continuaría indefinidamente si otros términos energéticos no la limitasen.

5 -. Energía magnética

Es debida a la presencia de un campo magnético externo. Es del tipo:

$$E_H = -\mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H} \quad (22)$$

Paredes

Los dominios están separados por paredes, en las cuales tiene lugar el cambio de orientación de los espines. Pueden ser de Bloch o de Néel, según el giro de la imanación tenga lugar en un plano perpendicular o paralelo a un plano paralelo a la pared. También aparecen paredes de 90°, que separa dominios en los que la imanación forma ángulos rectos entre sí.

El giro de la imanación, o de los espines, desde la dirección que tienen en un dominio hasta la que tienen en el otro dominio, no puede efectuarse bruscamente, en un único plano atómico, sino que se realiza paulatinamente a través de muchos planos atómicos, para que la energía de canje implicada sea menor. En las pared de Bloch, la inmensa mayoría de los espines no están orientados a lo largo del eje de fácil imanación. Por ello, la parte de la energía de anisotropía relacionada con dicha pared será proporcional al espesor de la pared. El balance entre la energía de canje y la de anisotropía determina el espesor de la pared, que es proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la interacción de canje e inversamente proporcional a la raíz cuadrada magnitud de la anisotropía. En el hierro, su espesor es de aproximadamente 300 constantes de red.

HILOS AMORFOS

Los hilos amorfos formados por aleaciones ferromagnéticas presentan propiedades magnéticas que los hacen especialmente atractivos desde el punto de vista de las aplicaciones técnicas.

Son fabricados mediante una técnica de enfriamiento ultrarrápido conocida como "*in-rotating-water quenching technique*". (Waseda, 1990). Su estructura magnética queda modelada fundamentalmente por la presencia de tensiones residuales, consecuencia del proceso de fabricación y que propician, en virtud de la magnetostricción, anisotropías magnetoelásticas que orientan la imanación en direcciones preferentes para minimizar la energía magnetoelástica.

Pueden fabricarse hilos de diversas composiciones, pero las que presentan propiedades más importantes son las del tipo $(\text{Fe}, \text{Co}, \text{Ni})_x \text{Si}_y \text{B}_z$, donde la proporción de metales de transición ronda el 80% y la de metaloides el 20%. Entre la composición mencionada, cabe destacar tres familias:

- Ricas en hierro -. Tienen magnetostricción alta y positiva. Un ejemplo lo constituye la composición $\text{Fe}_{77.5} \text{Si}_{7.5} \text{B}_{15}$, cuya constante de magnetostricción es $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$.
- Ricas en cobalto -. Presentan una magnetostricción alta y negativa. Por ejemplo, la composición $\text{Co}_{72.5} \text{Si}_{12.5} \text{B}_{15}$ tiene una magnetostricción $\lambda = -5.6 \cdot 10^{-6}$ (es alta, pero un orden de magnitud menor que la obtenida para las aleaciones ricas en hierro).
- Con hierro y cobalto -. Las aleaciones obtenidas a partir de las ricas en cobalto reemplazando un 6% de cobalto por hierro, presentan una magnetostricción negativa muy pequeño, de valor prácticamente nulo (Squire, 1993). Por ejemplo, los hilos cuya composición es $(\text{Fe}_{0.06} \text{Co}_{0.94})_{72.5} \text{Si}_{12.5} \text{B}_{15}$ tiene una magnetostricción $\lambda = -0.08 \cdot 10^{-6}$.

La imanación de saturación es más alta en las composiciones ricas en hierro. Por ejemplo, para la composición rica en hierro citada anteriormente, la imanación de saturación ($\mu_0 M_s$) es de 1.6 teslas, mientras que para la rica en cobalto es de 0.64 teslas. Para la composición con hierro y cobalto, se obtiene un valor de 0.8 teslas.

Las aleaciones ricas en hierro presentan *ciclos de histéresis cuadrados*, invirtiéndose el sentido de la imanación mediante un único salto Barkhausen. Este fenómeno se conoce como *biestabilidad*. Las aleaciones con cobalto no muestran biestabilidad pero, en las de magnetostricción casi nula, ésta puede inducirse si se somete la muestra a tracciones mecánicas o a bajas temperaturas (Gómez-Polo, 1993).

Las propiedades magnéticas de las muestras recién fabricadas, llamadas "*as-cast*", pueden modificarse tras ser sometidas a diversos tratamientos. Los usuales son los siguientes:

- Cold-drawing -. Consiste en la reducción mecánica del diámetro de los hilos. Se caracteriza por la mejora de la calidad de la superficie. Mejora la uniformidad de la sección del hilo y reduce el factor desimanador. Produce altas tensiones residuales en el hilo (Malmhäll, 1987). El proceso equivaldría a la aplicación de una tensión radial de compresión.

- Recocido en horno -. Reduce las tensiones residuales. Las condiciones de recocido son uniformes en toda la muestra y no implican la presencia de campos magnéticos. Dado que los hornos presentan una zona de uniformidad térmica relativamente pequeña, este tratamiento es indicado para muestras de pequeña longitud.

- Recocido con corriente -. El recocido se produce por el calentamiento, vía efecto Joule, inducido en la muestra por el paso de una corriente eléctrica. La temperatura no es homogénea en toda la muestra debido a la presencia de inhomogeneidades locales. El recocido lleva aparejada la presencia de un campo magnético circular debido al flujo de la corriente a través del hilo. La corriente puede ser continua o pulsada; este último tratamiento recibe el nombre de "*flash-annealing*".

Los tratamientos térmicos pueden llevarse a cabo simultáneamente a la aplicación de tensiones mecánicas externas para tratar de controlar la anisotropía inducida. Se puede reducir el valor de la anisotropía en los hilos as-cast, del orden de 10^3 Jm^{-3} a valores diez veces menores.

Las aleaciones amorfas en forma de hilo presentan óptimas propiedades elásticas que las dotan de gran resistencia mecánica. Sus módulos de Young son del orden de 10^{11} Nm^{-2} ; la velocidad de ondas acústicas longitudinales son del orden de Km/s (Squire, 1993).

Propiedades magnéticas

Los hilos amorfos ferromagnéticos son materiales magnéticamente blandos, con campos coercitivos del orden de unidades de Am^{-1} , y presentan la característica importante de que *no es posible alcanzar el estado desimanado* en ellos.

Proceso de imanación

Su proceso de imanación axial, es decir, aplicándole un campo magnético en la dirección del eje del hilo y midiendo la variación de la imanación en esa dirección, presenta las siguientes características:

1 -. Existen *dos estados de remanencia estables*, que pueden ser alcanzados cambiando el sentido del campo magnético aplicado, siempre que la frecuencia de éste sea suficientemente pequeña. La relación entre la imanación de remanencia, M_r , a la imanación de saturación, M_s , es de aproximadamente 0.5 (Mohri, 1990).

2 -. Si se aplica un campo antiparalelo a la imanación remanente, se aprecia un cambio reversible de la imanación hasta un cierto nivel de campo aplicado. Sobrepasado éste (llamado *switching field*, H^*), tiene lugar una inversión brusca del sentido de la imanación, mediante un único *salto Barkhausen*, dando lugar a un *ciclo de histéresis cuadrado*. Se trata de la llamada *biestabilidad* (Mohri, 1985). La **figura 4** muestra un ciclo de histéresis cuadrado.

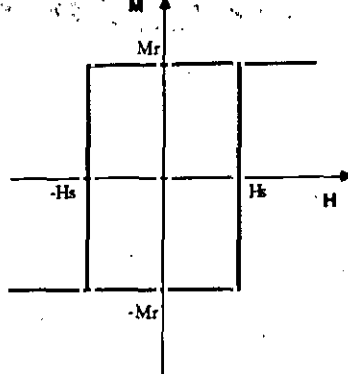


Figura 4 -. Ciclo de histéresis cuadrado

3 -. La imanación aumenta, de forma reversible, hasta la saturación para campos suficientemente altos, aplicados en la dirección de la imanación.

Efectos no diagonales

El proceso de imanación descrito es el axial, M_z - H_z . Existen otros procesos de imanación que involucran términos no diagonales del tensor susceptibilidad, y que son similares al descrito arriba. En los hilos amorfos, de simetría cilíndrica, la imanación tiene componentes radial, circular y axial. Sean M_z y M_ϕ , las componentes en la dirección radial y circular, respectivamente. Si H_z y H_ϕ representan el campo axial y circular, producidos por un solenoide y por el flujo de una corriente eléctrica a través del hilo, respectivamente, la relación con las componentes de la imanación viene dada a través del *tensor susceptibilidad*:

$$\begin{pmatrix} M_z \\ M_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{zz} & \chi_{z\phi} \\ \chi_{\phi z} & \chi_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_z \\ H_\phi \end{pmatrix}$$

Ello quiere decir, por ejemplo, que campo axial puede influir en las componentes axial y circular de la imanación, siempre que las componentes χ_{zz} y $\chi_{\phi z}$ del tensor susceptibilidad sean no nulas.

Efectos relacionados con los términos no diagonales del tensor de susceptibilidad son el *efecto Matteucci* y el *efecto Wiedeman inverso*.

Efecto Matteucci -. Consiste en la generación de un voltaje en los extremos del hilo cuando éste es torsionado y sometido a un campo axial alterno (Kimura, 1991). El voltaje surge como consecuencia de la variación temporal de la componente circular de la imanación. El ciclo de histéresis correspondiente se obtendría integrando el voltaje obtenido. Este ciclo se denota por M_ϕ - H_z (Kraus, 1994).

Efecto Wiedemann inverso -. Consiste en la inducción de la variación temporal de la componente axial de la imanación cuando atraviesa el hilo una corriente eléctrica de intensidad I , y es sometido a una torsión (González, 1990). El ciclo de histéresis correspondiente se denota como M_z - H_ϕ .

Mediante estos dos efectos, se obtienen ciclos de histéresis que podríamos llamar no directos, dado que un campo induce variaciones de imanación en direcciones perpendiculares a la suya propia.

Elo es posible si existen anisotropias, creadas o propias, cuya direcci3n forme 3ngulos intermedios entre las direcciones del campo y de la variaci3n de la imanaci3n. Anisotropias de este tipo son las creadas al someter al hilo a torsiones, que crean ejes f3ciles cuya direcci3n es helicoidal, es decir, forman 45° con la direcci3n axial y circular.

Otro ciclo de hist3resis directo, aparte del axial, es el llamado M_p - M_d , que se fundamenta en el llamado efecto magnetoinductivo: una corriente de intensidad I fluyendo a trav3s del hilo provoca una ca3da de potencial en los extremos de 3ste que tiene un origen no ohmico, y es debida a la variaci3n temporal de la componente circular de la imanaci3n (Mohri, 1992)

El proceso de imanaci3n descrito anteriormente se observa en hilos amorfos cuya constante de magnetostricci3n es alta, bien negativa bien positiva. El comportamiento observado se fundamenta en una particular estructura de dominios.

Los hilos con hierro y cobalto en su composici3n, de magnetostricci3n casi nula, no exhiben biestabilidad, aunque 3sta puede inducirse sometiendo el hilo a algunos tratamientos: i) disminuyendo la temperatura de medida, ii) somet3ndolos al proceso cold-drawn, descrito anteriormente, iii) aplic3ndole tensiones mec3nicas externas.

De los resultados experimentales expuestos, parece deducirse que la estructura de dominios depende del valor de la constante de magnetostricci3n. Esa estructura se ha representado mediante el modelo propuesto por Humphrey (Humphrey, 1987) : una dominio central en el que la imanaci3n es paralela al eje del hilo, y un dominio externo en el que la imanaci3n es perpendicular al eje del hilo (en la direcci3n radial en los hilos de magnetostricci3n positiva, y en la direcci3n circular en los de magnetostricci3n negativa). En el caso de los hilos de magnetostricci3n positiva, se forma una estructura de dominios de cierre cerca de la superficie para reducir la energ3a magnetost3tica.

Figura 5

Estructura de dominios

La figura 5 muestra la estructura de dominios para los hilos de magnetostricci3n alta.

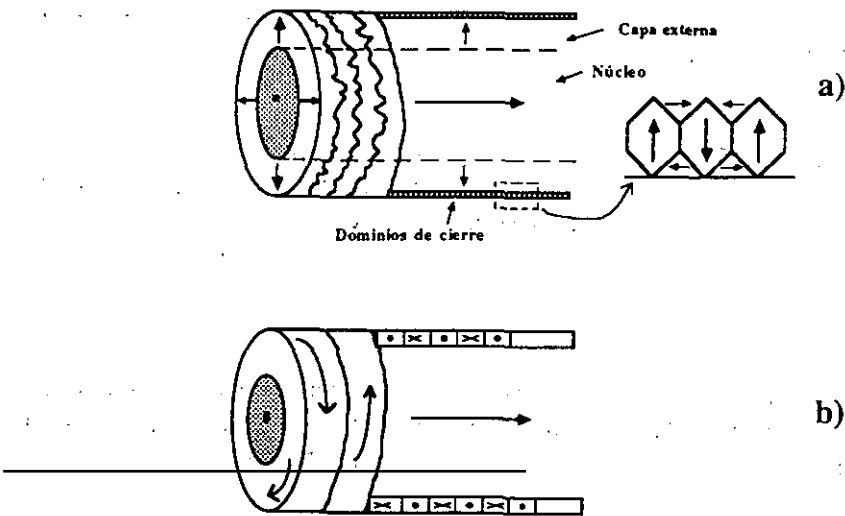


Figura 5 - Estructura de dominios para hilos de magnetostricci3n alta:
a) ricos en Fe, -b) ricos en Co

Los ciclos de histéresis cuadrados se interpretan a la luz de este modelo como producto de la inversión de la imanación en el dominio central, mediante la propagación de una pared de 180° en toda la longitud del hilo. Para campos altos, se produce una rotación de la imanación del dominio externo en la dirección del campo.

Como se ha comentado anteriormente, los ciclos de histéresis cuadrados aparecen únicamente en los hilos con constante de magnetostricción alta, por lo que hay que pensar que la anisotropia magnetoelástica es muy importante a la hora de modelar la estructura de dominios. Dado que en los materiales amorfos no existe anisotropia cristalográfica, *la única fuente de las anisotropías proviene de las tensiones internas que se producen en el hilo durante su proceso de fabricación*. Estas tensiones aparecen como consecuencia del procedimiento de enfriamiento ultrarrápido mediante el cual son producidos los hilos, en virtud del gradiente de temperatura que acompaña al proceso de solidificación. Estas tensiones dependerán de las características elásticas (módulo de Young, coeficiente de Poisson) y térmicas (coeficiente de dilatación) del material que se trate (Fe, Co, etc). Una vez generadas, las tensiones, σ , se acoplan con la imanación en virtud de la presencia de la magnetostricción λ , para producir una anisotropía de valor $K = (3/2) \cdot \lambda \cdot \sigma$. Las anisotropías serán tanto más altas cuando mayor sea la magnetostricción. Las anisotropías fuerzan a la imanación a disponerse en la dirección que ellas marcan. Pero habrán de pactar con la energía magnetostática para encontrar la disposición adecuada en la cual energía total se haga mínima.

Influencia de la energía magnetostática en la estructura de dominios

Se ha observado experimentalmente (Severino, 1992) que el proceso de imanación de los hilos amorfos biestables dependen sensiblemente de la longitud de la muestra, encontrándose una pérdida de la biestabilidad para longitudes inferior a una dada (para los hilos ricos en hierro esta longitud es del orden de 7 cm). Hay que pensar que la variación del factor desimanador, asociada a la variación de longitud influye decisivamente en la estructura de dominios.

Debido a la geometría del hilo, existirá una *anisotropía de forma*: la imanación tiende a disponerse en la dirección del eje del hilo, ya que el factor desimanador en la dirección axial es menor que en la dirección radial o circular (Chen, 1991 y Akishin, 1992). Esto provocará la aparición de *polos magnéticos*, cuya densidad será proporcional al valor de la imanación. Para reducir la energía magnetostática asociada a la presencia de los polos, se pueden nuclear dominios que tengan la imanación en sentido opuesto a la que tiene en el dominio central. Ello requiere la formación de paredes, que almacenarán una cierta cantidad de energía magnetoelástica, ya que en ellas los momentos magnéticos no están orientados en las direcciones de fácil imanación. La disposición final dependerá del balance entre las energías magnetoelástica y magnetostática.

Si la longitud del hilo disminuye, *aumenta el campo desimanador* (el valor de este campo depende de la cercanía de los polos de distinto signo que aparecen en cada extremo del hilo), y se *modifica la estructura de dominios en los extremos del hilo*, de forma que esos dominios con imanación invertida pueden extenderse mucho más en el interior del hilo (es decir, el tamaño de los dominios es mayor), pudiendo llegar a colapsar los dominios de ambos extremos para longitudes suficientemente cortas.

Se observa experimentalmente que el campo *switch*, H^* , disminuye al hacerlo la longitud del hilo; esto es debido a que el campo desimanador facilita el proceso de inversión de la imanación en el dominio central (recordar que para invertir la imanación se aplica un campo en dirección opuesta

a ésta, es decir, en la misma dirección que el campo desimanador). Para longitudes menores de 6 cm los ciclos de histéresis exhiben dos saltos Barkhausen, consecuencia de la modificación de la estructura de dominios al disminuir la longitud.

Estructura magnética en los extremos del hilo

Se ha medido la estructura de dominios en los extremos del hilo haciendo uso de pequeñas bobinas móviles (que miden la variación de la componente axial de la imanación), de longitud mucho menor que la del hilo, para investigar la estructura de dominios *local* (Chen, 1992) cuando éste se ve sometido a un campo axial. Se encuentran los siguientes resultados: i) el campo switch, H^* , queda constante a lo largo de todo el hilo, ii) la remanencia, M_r , se mantiene constante en casi todo el hilo excepto en los extremos del mismo, en donde se aprecia una *disminución* de la imanación, a distancias del orden de 3 cm desde los extremos, para tomar un valor muy pequeño en ellos, iii) la susceptibilidad diferencial (dM/dH , esto es, la pendiente de la curva de imanación) toma valores muy pequeños en los extremos del hilo, se incrementa a distancias del orden de 2 cm y disminuye para distancias mayores. Estos resultados experimentales se interpretan como consecuencia de la presencia de dominios de cierre en los cuales la imanación tiene sentido opuesto al resto del hilo.

Influencia de las tensiones externas sobre la estructura de dominios

La aplicación de tensiones externas a los hilos amorfos introduce anisotropías magnetoelásticas adicionales en ellos, con la consiguiente alteración de sus propiedades magnéticas.

Por ejemplo, para hilos de magnetostricción positiva, la aplicación de una tensión de tracción axial incrementa el valor de la remanencia relativa (M_r/M_s) desde su valor inicial de 0.5 hasta la saturación, 1, que se corresponde con la desaparición completa del dominio externo, ya que toda la imanación se dispone (por rotación) paralela al eje de anisotropía introducido por la tensión, que es paralelo a su vez al eje del hilo. Adicionalmente, la aplicación de la tensión disminuye el campo switch, H^* , hasta cierto valor de tensión, (del orden de 150 MPa), a partir del cual comienza a aumentar. La existencia de ese mínimo se atribuye a la compensación del efecto de la tensión interna radial, presente en el hilo, por parte de la tensión axial exterior.

Otro efecto relacionado con la aplicación de tensiones es la pérdida de la biestabilidad de hilos ricos en hierro cuando son sometidos a flexión; la biestabilidad se recupera para radios de curvatura muy pequeños, del orden de 1 cm (Vázquez, 1994).

Estructura de dominios e inversión de la imanación

Considerando el modelo simple de Humphrey, se puede considerar que existe en el dominio exterior una anisotropía, radial o circular, dependiendo del signo de la magnetostricción, y una anisotropía axial en el dominio interno, que tendría que competir con la energía magnetostática. Es decir, el dominio interno la imanación forma ángulos nulos con el eje del hilo, y el dominio externo forma ángulos rectos con dicho eje. No obstante, existen resultados experimentales que evidencian la simplicidad de este modelo y ponen de manifiesto la posibilidad de que los ejes fáciles formen ángulos comprendidos entre 0° y 90° . Estos resultados son los siguientes:

a) Medidas del segundo armónico en el voltaje inducido en el hilo

Cuando al hilo se le aplica un pequeño campo alterno axial, se obtiene un voltaje inducido en una pequeña bobina, de frecuencia doble a la del campo excitador, siempre que los momentos magnéticos en el dominio central formen ángulos distintos de cero con el eje (Kinosita, 1990). Se ha podido constatar que en el dominio interno de los hilos ricos en hierro, la imanación forma ángulos con el eje comprendidos entre los 40° y los 60° . La imanación del dominio externo no se ve involucrada en estas medidas a causa de la estructura de cierre.

b) Efecto Matteucci espontáneo

La medida de pequeños voltajes Matteucci evidencian la presencia de anisotropías helicoidales de origen interno (Mohri, 1985).

c) Medidas del efecto ΔE

El efecto ΔE , es decir, la variación del módulo de Young, E , con el campo aplicado, es muy sensible a la orientación de los ejes de anisotropía (Squire, 1993). Se encuentra que el módulo de Young exhibe un mínimo al aumentar el campo aplicado, para después incrementar su valor hasta alcanzar un valor de saturación. Este comportamiento se explica únicamente si existen ejes de anisotropía que formen ángulos entre 45° y 90° con el eje del hilo.

Estas medidas ponen de manifiesto que la estructura de dominios es algo más compleja de lo inicialmente supuesto. El modelo se complica aún más si se tiene en cuenta la estructura de dominios de los extremos del hilo, medida, como se ha visto antes, a partir de la variación de remanencia cerca de los extremos del hilo (Vázquez, 1992) y que sugieren que el dominio interno no consiste en un monodominio cilíndrico, sino que éste consta de un dominio central magnetizado en la dirección opuesta a la imanación remanente, rodeado de otro dominio en el que la imanación es paralela a la remanente, siendo el interior mucho más pequeño en el centro del hilo que en los extremos.

La longitud de los hilos influye en el proceso de inversión de la imanación. En hilos muy largos, la influencia de los extremos es pequeña, por lo que el proceso de inversión de la imanación se produciría por la nucleación de una pared de 180° , en los puntos en los que la densidad de energía magnetoelástica sea mínima. En los hilos de longitud menor, el proceso de inversión de imanación se verá influenciado por el desanclaje de las paredes que separan los dominios de los extremos, creciendo el dominio cuya imanación es paralela al campo, a expensas del que tiene la imanación en sentido opuesto.

Propagación de pared

Tanto para un mecanismo como para otro, se tiene una *pared que se propaga* en el hilo. La velocidad de propagación puede medirse mediante el clásico experimento de Sixtus-Tonks (Sixtus, 1932). Se aplica un campo local (mediante un pequeño solenoide) de sentido opuesto a la imanación remanente, mientras que el hilo es sometido a un campo homogéneo H . Se crea un dominio con imanación invertida que se propaga a una velocidad proporcional al valor del campo H , siendo el valor umbral para la propagación el llamado *campo de propagación*. La velocidad viene determinada también por amortiguamientos (*damping*) provenientes del efecto de corrientes de Foucault o procesos

de relajación. Se ha encontrado que, para un campo aplicado dado, la velocidad es tanto menor cuanto mayor sea el valor de una tensión axial que se aplique al hilo. También se ha comprobado que la forma de la pared es plana (del Real, 1993), por influencia de las corrientes de Foucault.

Propiedades magnetomecánicas

Los llamados efectos magnetomecánicos provienen de la interacción entre las propiedades magnéticas y las elásticas. Se pueden citar (Squire, 1993):

i) Variación de la constante de magnetostricción con el campo

Para hilos de magnetostricción alta y positiva, ricos en hierro, se ha encontrado que la magnetostricción, λ , varía en 40 ppm para campos aplicados del orden de KA/m. Se ha encontrado que sigue una ley cuadrática con el campo, $\lambda = cH^2$

ii) Variación del módulo de Young, ΔE , y del módulo de cizalladura, ΔG

En virtud de la magnetostricción, los módulos elásticos varían con el campo aplicado; en los hilos ricos en hierro su magnitud se ve modificada por un factor cinco para campos aplicados del orden de 1 KA/m.

iii) Amortiguamiento magnetomecánico (magnetomechanical damping)

Consiste en el amortiguamiento de las oscilaciones mecánicas en virtud del acoplamiento entre el desplazamiento mecánico y los movimientos irreversibles de paredes (Atalay, 1993).

Aplicaciones de los hilos amorfos

Los hilos amorfos encuentran múltiples aplicaciones gracias a su estado biestable, alterable con campos pequeños. Pueden ser usados como generadores de pulsos, como sensores de corriente, sensores de campo, de tensión y de torsión. Particularmente interesantes son los sensores de campo magnético basados en el efecto magnetoinductivo en hilos amorfos de magnetostricción casi nula.

• • •

Como se ha visto, la estructura de dominios que presentan los hilos amorfos obtenidos mediante enfriamiento ultrarrápido, depende en gran medida de las anisotropías magnetoelásticas que aparecen como consecuencia de la presencia de tensiones internas generadas durante el proceso de fabricación. En los capítulos siguientes, se va a calcular la distribución de esas tensiones internas de origen térmico.

II -. TENSIONES TERMOELASTICAS EN HILOS AMORFOS

TENSIONES TERMOELASTICAS EN HILOS AMORFOS

Introducción

La técnica de enfriamiento ultrarrápido permite producir muestras amorfas metálicas de forma cilíndrica. El procedimiento estándar, conocido como *in-rotating-water quenching technique*, consiste en expulsar el material sobre una rueda metálica giratoria, en cuyo interior existe una capa de agua sobre la que la masa fundida se sumerge y enfría. El giro de la rueda somete a la capa de agua a una fuerza centrífuga que provoca que ésta se disponga uniformemente sobre la rueda. La figura 1 ilustra el dispositivo.

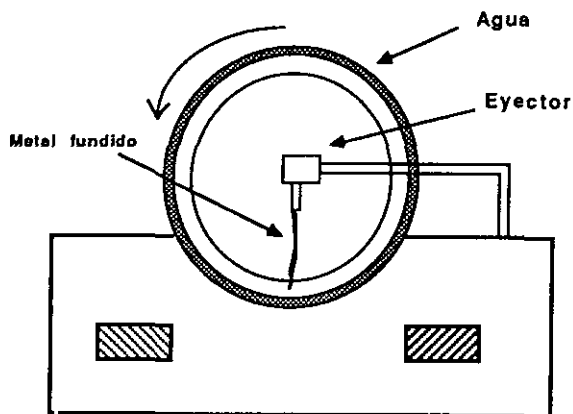


Figura 1 -. Rueda de hilos

Cuando la masa de metal fundido impacta sobre la capa de agua, se produce una rápida transferencia de calor que "congela" los átomos en posiciones metaestables y lleva a una solidificación en un *estado amorfo*. La velocidad de enfriamiento típica es de 10^6 grados kelvin por segundo, la cual se consigue haciendo girar la rueda hasta que adquiere una velocidad tangencial del orden de 10 m/s (el diámetro de la rueda es de unos 62 cm).

Al llegar la masa de metal fundido al agua, toma forma cilíndrica para reducir la *energía superficial* (figura 2).

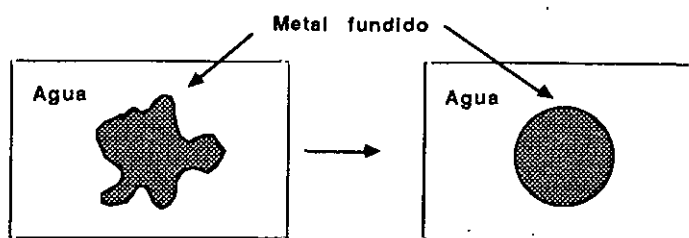


Figura 2 -. La masa de metal fundido toma forma cilíndrica para reducir la tensión superficial.

Amorfos

Se define sólido amorfo como aquel que presenta una *viscosidad* superior a 10^{14} Nsm⁻² y cuyo *diagrama de difracción de rayos X* no presenta picos agudos.

Viscosidad

La viscosidad, η , es una magnitud que permite establecer los límites entre el estado sólido y el líquido. Se define como el cociente entre la tensión de cizalladura, τ , que se aplica a un cuerpo y la variación en el tiempo de la deformación de cizalladura, γ , consiguiente. Es decir:

$$\eta = \frac{\tau}{\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)} \quad (1)$$

Aplicando esta definición a un sólido rígido, cuerpo ideal en el que la distancia entre los átomos componentes se mantiene constante, se obtendría una viscosidad infinita, ya que ninguna tensión de cizalladura sería capaz de inducir una deformación, por lo que $d\gamma/dt$ sería nulo. Se dice sólida toda aquella sustancia cuya viscosidad es superior a 10^{14} Nsm⁻².

Difracción de rayos X

La difracción de rayos X permite obtener información acerca de la distribución espacial de los átomos constituyentes del sólido estudiado.

Cuando un cuerpo recibe una radiación, sus átomos comienzan a oscilar; esta oscilación provoca la emisión de ondas de igual frecuencia que la de la radiación incidente. Todas las ondas emitidas por los átomos interferirán en cada punto del espacio. Si la longitud de onda es del orden de la separación existente entre átomos emisores, la interferencia será constructiva. Si, además, los átomos emisores están ordenados espacialmente con periodicidad traslacional en un volumen mínimo de 20 Å de diámetro, la interferencia de ondas dará lugar a *picos agudos de difracción*. La llamada *ley de Bragg* relaciona el ángulo de incidencia θ de la radiación de longitud de onda λ , con la distancia d , adecuada, entre planos atómicos paralelos entre sí para que existan picos de difracción:

$$2d \sin\theta = n\lambda \quad (2)$$

donde n es un número entero. La existencia de planos atómicos es una consecuencia de la *periodicidad traslacional* en la disposición atómica. En los amorfos, el espectro de rayos X no presenta picos agudos de difracción. *No tienen periodicidad traslacional*.

Los átomos constitutivos del sólido amorfo están situados en posiciones metaestables alejadas del equilibrio. Las *posiciones de equilibrio* presentan periodicidad traslacional: si se dotase al sólido amorfo de la energía suficiente (elevando su temperatura, por ejemplo) como para que sus átomos se moviesen hacia las posiciones de equilibrio, éstos se dispondrían en una estructura espacial periódica. Este último estado se conoce como *cristalino*. Desde el punto de vista termodinámico, se dice que la energía libre en el estado cristalino es menor que en el estado amorfo.

Para lograr retener los átomos en posiciones fuera del equilibrio, hay que reducir su *movilidad*. Esta magnitud está relacionada con la *temperatura* del cuerpo: a mayor temperatura mayor

movilidad. Si se reduce la temperatura bruscamente, los átomos quedarán "congelados" en las posiciones que ocupaban en el estado líquido. En esto consiste la llamada *técnica de enfriamiento ultrarrápido* para producir sólidos amorfos.

Existen otras técnicas que permiten llegar al estado amorfo: evaporación térmica, pulverización catódica (sputtering), descomposición de la fase vapor por descargas (glow-discharge descomposition), deposición química, desecación de gel, deposición electrolítica, por reacciones químicas, por irradiación de partículas ionizantes, por aplicación de ondas de choque (shock-wave transformation), por aplicación de tensiones cortantes (shear amorphization) y por calentamiento con láser (Elliot, 1989).

La más versátil de todas es la del enfriamiento ultrarrápido. Un parámetro característico de esta técnica es la *velocidad de enfriamiento*. Para amorfizar un metal puro se precisan velocidades de enfriamiento del orden de 10^{10} grados kelvin por segundo, las cuales son inalcanzables experimentalmente. En compuestos con 80% de átomos metálicos y 20 % de metaloides, el ritmo enfriamiento preciso es de 10^6 grados kelvin por segundo, ya que los átomos metaloides facilitan los enlaces entre los átomos metálicos. En los vidrios, formados por óxidos y silicatos, los átomos están unidos por fuertes enlaces covalentes, por lo que se precisan velocidades de enfriamiento bajas, 10 grados kelvin por segundo, para alcanzar el estado amorfo:

Se define *vidrio metálico* como un amorfo obtenido por enfriamiento ultrarrápido y cuya composición es aproximadamente de un 80% de átomos metálicos y un 20% de átomos metaloides.

Los hilos amorfos son vidrios metálicos en cuya composición típica se encuentran metales como Fe y Co, y metaloides como Si, B y C.

Técnica de solidificación ultrarrápida

La *preparación de la aleación* es muy importante en el proceso de fabricación de hilos amorfos.

Teniendo en cuenta la composición que se desea obtener, se mezclan los elementos constitutivos, en forma de polvo, en las proporciones adecuadas. Se les somete a una presión de cinco toneladas (poniendo los polvos en un troquel colocando éste en una prensa hidráulica) y a un sinterizado a 700°C en atmósfera de hidrógeno. El tratamiento térmico propicia la reactividad de las superficies de contacto de las partículas.

La pastilla que se obtiene se calienta mediante un horno de inducción hasta alcanzar su estado de fusión. La pastilla se introduce en un crisol de cuarzo de doble pared, en una de las cuales se hace el vacío y en la otra se coloca una atmósfera inerte. Dentro de un crisol de carbón que actúa como foco térmico se introduce un crisol de nitruro de boro en el que se ajusta la pastilla. El horno de inducción permite alcanzar temperaturas del orden de 1600°C , suficiente para fundir las mezclas de composiciones usuales.

Se deja enfriar la pastilla de la aleación formada. Una vez alcanzada la temperatura ambiente, se introduce en un tubo de cuarzo que actúa como crisol. La parte inferior del tubo de cuarzo tiene un orificio de algunas décimas de milímetro de diámetro; la parte superior se conecta a una botella de argón. El tubo se introduce entre las espiras de un horno de inducción. A pocos milímetros de la parte inferior del tubo de cuarzo se sitúa la superficie de una rueda metálica que gira a velocidades tangenciales, en su superficie, del orden de decenas de metros por segundo.

La aleación se calienta hasta su punto de fusión, entre 1200°C y 1300°C. Una sobrepresión de argón, expelle el chorro líquido de material fundido por el orificio, cayendo sobre la rueda y enfriándose en décimas de milisegundo. La violencia del impacto facilita la solidificación en forma de cinta. La **figura 3** muestra un esquema de la rueda.

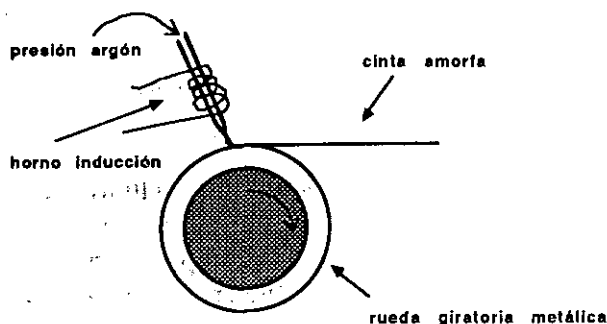


Figura 3 - Rueda de enfriamiento ultrarrápido

Es lógico esperar que la *velocidad de enfriamiento no sea homogénea* en todo el material. La superficie líquida, del material fundido, en contacto con la superficie de la rueda se enfría rápidamente, mientras que la parte no directamente en contacto con el metal lo hace más lentamente. La velocidad de enfriamiento disminuye en la dirección perpendicular al espesor del chorro.

Enfriamiento ultrarrápido en rueda de hilos

Las aleaciones amorfas ferromagnéticas con forma de hilo se obtienen mediante un proceso similar de enfriamiento ultrarrápido que incorpora algunas diferencias con respecto al de generación de aleaciones en forma de cinta.

Como ya se ha explicado anteriormente, el chorro de material fundido incide y se sumerge sobre una superficie líquida (agua). En el momento de la llegada del chorro de material fundido al agua, se tiene un *fluido en el seno de otro*, por lo que hay que considerar el efecto de la *existencia de superficies de separación entre los dos fluidos*.

Tensión superficial

En general, en los fenómenos en que interviene la superficie de un cuerpo se hallan implicados los átomos que se encuentran en la misma superficie del cuerpo. Si las dimensiones de los cuerpos no son pequeñas, el número de átomos en la superficie es muy pequeño en comparación con el de átomos en el volumen total. En los cuerpos de pequeñas dimensiones, como el chorro de material fundido que nos ocupa, los fenómenos de superficie son importantes. Los átomos situados en una delgada capa superficial que se hallan junto a la superficie, se encuentran en condiciones diferentes que los del interior del cuerpo, ya que en éste, los átomos están rodeados por todas partes por átomos semejantes, mientras que los que se hallan cerca de la superficie solamente tienen vecinos iguales a ellos mismos por un lado. Esto conduce a que la energía de los átomos de la capa superficial sea distinta que la de los del interior del cuerpo. La diferencia entre la energía de todos los átomos

(de ambos fluidos) junto a la superficie divisoria y la energía que estos poseerían de hallarse en el interior del cuerpo, se denomina *energía superficial* (Landau, 1979).

Las propiedades termodinámicas de una superficie de separación quedan completamente caracterizadas por una magnitud llamada *coeficiente de tensión superficial* α (Landau, 1975) y que se define de la siguiente forma: sea S el área de la superficie de separación y considérese un proceso reversible en el que esta área varía en una cantidad infinitesimal dS . El trabajo dW invertido en el proceso viene dado por:

$$dW = \alpha dS \quad (3)$$

Es decir, la energía superficial E_s es proporcional a la superficie de separación:

$$E_s = \alpha S \quad (4)$$

Al objeto de reducir la energía superficial, la superficie tenderá a ser lo más pequeña posible. Ello conduce a la adopción, por parte del material fundido, de una *forma cilíndrica*.

Imagínese un chorro de material fundido de sección irregular y longitud L (ver figura 4).

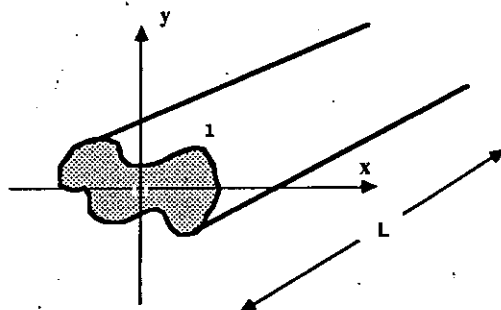


Figura 4 -. Chorro de material fundido de longitud L y longitud del contorno de la sección l

La superficie de contacto entre el chorro y el agua en la que se encuentra inmerso es:

$$S = l \cdot L \quad (5)$$

donde l es el *perímetro del contorno de la sección del chorro*. La superficie se minimizará cuando lo haga l .

Sea $y(x)$ la función que describe el contorno (en el sistema de referencia representado en la figura 4). La longitud l vendrá dada por la integral de contorno:

$$l = \oint \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \oint \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (6)$$

El problema se reduce a encontrar una función $y(x)$ que minimice la longitud l , manteniendo constante la sección del chorro. Esta sección vendrá dada por:

$$\oint y(x) dx \quad (7)$$

Formulado matemáticamente, el problema se encuentra entre los llamados *isoperimétricos de contorno* (Ross, 1981). Para solucionarlo, hay que resolver la *ecuación de Euler* siguiente:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0 \quad (8)$$

para el *funcional* $F(y, y', x)$, que depende de x , de $y(x)$ y de la derivada de ésta. En el caso que nos ocupa, este funcional es:

$$F(y, y') = \sqrt{1 + (y'(x))^2} + \lambda y \quad (9)$$

donde λ es un parámetro a determinar por las condiciones de contorno. En la ecuación (8), $F_{y'}$ representa la derivada de F respecto de la variable y' . La solución de la ecuación (8) será la función $y(x)$ que minimiza la longitud l del contorno del chorro. Si se desarrolla (9) se encuentra:

$$y''[F_{y'y'}] + y'[F_{yy'}] + F_{xy'} - F_y = 0 \quad (10)$$

donde, como se ha dicho $F_{y'y'}$ representaría la cantidad $\partial^2 F / \partial y' \partial y'$.

Si el funcional no depende explícitamente de x , como es el caso de (9), entonces la ecuación queda:

$$y''[F_{y'y'}] + y'[F_{yy'}] - F_y = 0 \quad (11)$$

que admite una primera integración :

$$y'[F_{y'y'}] - F = c_1 \quad (12)$$

donde c_1 denota una constante.

Usando el funcional dado en (9), se obtiene, a partir de (12):

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} - \lambda y = c_2 \quad (13)$$

Operando y separando variables, queda:

$$(x+c_2)^2 + \left(\frac{c_1}{\lambda} + y\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (14)$$

que es la ecuación de una *circunferencia*, donde c_2 representa una constante de integración. Es decir, el contorno de longitud mínimo será una circunferencia.

Según se ha visto, *para reducir la energía superficial, el chorro de material fundido adopta, al entrar en el agua, una forma cilíndrica.*

Proceso de enfriamiento. Generación de tensiones internas

Cuando el chorro de material fundido entra en contacto con el agua, se produce una *transferencia de calor* del material (que se encuentra a una temperatura del orden de 1200 °C) al agua (que se encuentra a temperatura ambiente); ello provoca variaciones de temperatura en el metal a un ritmo de 10° grados kelvin por segundo. Se produce un gradiente de temperaturas a lo largo de la sección del chorro de material fundido.

Dado que la parte externa del chorro líquido es la que está en contacto con el agua, se espera que el proceso de solidificación del hilo amorfo comience en su parte externa y progrese hacia el interior del mismo. La propagación de la solidificación dará lugar a tensiones internas residuales.

Cálculo de tensiones internas

Las tensiones internas aparecen en el proceso de solidificación debido a las diferentes velocidades de enfriamiento alcanzadas en la solidificación por diferentes partes del hilo (Liu, 1990). Haciendo uso de la teoría de la elasticidad pueden calcularse esas tensiones (Madurga, 1990, Costa, 1990 y Velázquez, 1991).

Aproximación de gradiente de temperaturas radial

La teoría de la elasticidad permite calcular las tensiones elásticas de origen térmico si se considera un gradiente de temperaturas dependiente únicamente de la dirección radial (Timoshenko, 1968). Esto constituye una aproximación al proceso real.

Tal y como se dijo anteriormente, para el caso de cintas amorfas, es de esperar que la velocidad de enfriamiento no sea homogénea en todo el hilo: la velocidad de enfriamiento disminuye en el espesor del chorro. Si nos imaginamos el chorro de material fundido como un cilindro, la velocidad de enfriamiento no será igual en diferentes planos paralelos al eje del cilindro y situados a distancias diferentes del eje; ello es debido a que una superficie lateral del cilindro entra en contacto con el agua antes que otra.

Un gradiente de temperaturas radial daría lugar a una *distribución simétrica* de tensiones respecto del eje del hilo. Hay que hacer notar aquí un simple hecho observacional: cuando se corta un trozo de hilo amorfo as-cast y se deja sobre una mesa, se observa que presenta una cierta curvatura, como la que se obtendría al *flexionar* el hilo. El origen de esa flexión intrínseca se

encuentra en que las tensiones internas no son simétricas respecto del eje del hilo, como consecuencia de que el gradiente de temperaturas tampoco lo es. Esta ausencia de simetría, tendrá consecuencias en la forma de la pared que se crea cuando se produce el salto Barkhausen que invierte en sentido de la imanación en los hilos amorfos. Podría pensarse que la forma circular de la rueda puede ser la causante de la flexión intrínseca de los hilos. No obstante, la inmersión y solidificación del material fundido tiene lugar en una superficie pequeña de la capa de agua, que puede considerarse tangencial a la superficie de la rueda.

Para calcular las tensiones internas vamos a considerar la *aproximación de gradiente de temperaturas radial* y hacer uso de la Teoría de la Elasticidad, por lo que convendría hacer un repaso de los fundamentos de ésta.

Teoría de la Elasticidad

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados éstos como *medios continuos*, es decir, que admiten una distribución continua de materia con variación asimismo continua de las distancias entre sus puntos (Landau, 1969).

Para establecer las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento mecánico de los sólidos deformables, es necesario establecer ecuaciones que relacionen las tensiones y deformaciones en el entorno de un punto. En el caso de pequeñas deformaciones, se comprueba que en la mayoría de los materiales, el proceso de deformación es reversible, hablándose de *comportamiento elástico*. De igual forma, se verifica en casi todos los materiales elásticos, la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, es decir, un comportamiento elástico lineal (Ortiz, 1985).

Concepto de tensión. Matriz de tensiones

Sea P un punto cualquiera de un sólido elástico. Siempre se puede considerar un entorno plano de ese punto y hacer pasar por él un plano Π que contenga dicho entorno. Sea $\Delta \mathbf{f}$ la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre todos los puntos del entorno plano de área $\Delta \Omega$. Se define la tensión σ en el punto P, según el plano Π , como:

$$\bar{\sigma} = \lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta \Omega} = \frac{d\mathbf{f}}{d\Omega} \quad (15)$$

La tensión σ es un vector colineal a $\Delta \mathbf{f}$ y su módulo representa la fuerza ejercida sobre la sección $\Delta \Omega$. Sus unidades en el sistema internacional son el Nm^{-2} , denominado *pascal* (Pa).

La fuerza $\Delta \mathbf{f}$ proviene del *equilibrio* en el que está el cuerpo. Supóngase un sólido elástico con forma de prisma, en el que se realiza un corte ideal mediante un plano Π y se quita una de las dos partes en que queda dividido. El equilibrio elástico de la parte que queda exige la existencia de una distribución continua de esfuerzos $d\mathbf{f}$ en todos los puntos interiores del prisma pertenecientes a la sección determinada por el plano Π .

Una vez fijado el plano Π , la dirección del vector tensión dependerá del sistema de fuerzas exteriores. Siempre se pueden considerar, para cada orientación del plano Π que pase por el punto P, dos direcciones particulares, como son la *normal exterior* \mathbf{n} y la que se obtiene al proyectar σ sobre el plano Π . Estas componentes de la tensión según esas direcciones se llaman *intrínsecas* y se denominan *tensión normal* y *tensión tangencial*, respectivamente.

Es evidente, según la definición, que el *vector tensión depende del plano* Π que pasa por el punto P. Pueden conocerse las componentes del vector tensión a partir de la *matriz de tensiones*; ésta última depende únicamente del punto P. Sea un sistema de referencia (x,y,z), en el que las componentes del vector tensión son $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Sean α , β y γ los cosenos directores del vector, \mathbf{u} , unitario normal al plano Π . Por consideraciones de equilibrio mecánico se encuentra que se verifica la relación matricial:

$$[\bar{\sigma}] = [T][\bar{u}] \quad (16)$$

donde $[\sigma]$ representa el vector:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (16a)$$

mientras que $[T]$ es el *tensor de tensiones*

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (16b)$$

y el vector $[\mathbf{u}]$ es:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (16c)$$

El estado tensional en el interior de un sólido elástico es conocido si lo es en todos sus puntos la matriz de tensiones. De la ausencia, en el equilibrio, de momentos mecánicos, se sigue el *teorema de reciprocidad de tensiones tangenciales*, que afecta a las componentes no diagonales de tensor de tensiones, y que afirma:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (17)$$

Las componentes del tensor de tensiones deben verificar las llamadas *ecuaciones de equilibrio*. Sea \mathbf{F} una fuerza por unidad de volumen cuyas componentes son F_x , F_y y F_z . Si consideramos un paralelepípedo que rodea un punto interior del sólido e imponemos que no existan fuerzas totales (es decir, que las tensiones internas compensen las externas), se encuentran tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Torroja, 1967), que no determinan unívocamente el tensor de tensiones, que tiene seis componentes, pero que han de cumplir sus componentes. Las ecuaciones son:

$$F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (18a)$$

$$F_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (18b)$$

$$F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (18c)$$

También ha de verificarse un equilibrio en los puntos de la superficie del sólido. Si actúa sobre el cuerpo una fuerza exterior por unidad de superficie cuyas componentes son S_x , S_y y S_z , se ha de cumplir, en el equilibrio:

$$S_x = \sigma_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma \quad (19a)$$

$$S_y = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{yy} \beta + \tau_{yz} \gamma \quad (19b)$$

$$S_z = \tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_{zz} \gamma \quad (19c)$$

donde α , β y γ son los cosenos directores del vector normal exterior a la superficie sobre la que actúa la fuerza externa.

Deformación en el entorno de un punto

La deformación de un cuerpo se describe analíticamente de la siguiente forma. La posición de cualquier punto P queda definida mediante su radio vector r , de componentes (x, y, z) en cierto sistema de referencia. Producida la deformación, el punto P pasa a ocupar la posición P', dada por (x', y', z') . El vector $\overline{PP'} = \delta$, llamado **vector desplazamiento**, tendrá por componentes (u, v, w) .

El estado de deformación se estudia mediante la matriz de deformación [D], cuyas componentes están relacionadas con la variación espacial de las componentes del vector corrimiento.

La matriz de deformación [D] es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (20)$$

y las componentes verifican:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (21a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (21b)$$

Mediante esta matriz, puede obtenerse la deformación unitaria ϵ en la dirección del vector unitario u (cuyos cosenos directores son α , β y γ) a través de una relación matricial semejante a la dada en (16):

$$[\bar{\epsilon}] = [D][\bar{u}] \quad (22)$$

Los términos de la matriz deformación tienen una sencilla interpretación. Los diagonales representan el corrimiento por unidad de longitud en la dirección del eje correspondiente. Por ejemplo, e_x representa la *deformación longitudinal unitaria* en la dirección del eje x . El término diagonal γ_{xy} , representa la variación angular experimentada por un ángulo inicialmente recto de lados paralelos a los ejes coordenados x e y . Análogo significado tienen las demás componentes no diagonales. La suma de los términos diagonales (traza de la matriz deformación) representa la variación relativa de volumen experimentada por el cuerpo en la deformación.

Para que la matriz de deformación represente un estado físicamente posible, sus componentes deben cumplir las llamadas *ecuaciones de compatibilidad*, que se obtienen a partir de imponer condiciones de integrabilidad a las diferenciales de las componentes del vector corrimiento. Por ejemplo, la diferencial de la componente u viene dada por:

$$du = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz \quad (23)$$

La diferencial ha de ser exacta, por lo que se tiene que cumplir la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y,z)}{\partial x} \quad (24)$$

Siguiendo el procedimiento descrito, se encuentran las relaciones de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} \quad (25b)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} \quad (25c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (25d)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (25e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \quad (25f)$$

Relaciones entre tensiones y deformaciones

El estado de tensión y deformación en cada punto del sólido elástico se describe mediante un tensor de segundo orden, una matriz, mediante la cual es posible obtener la tensión y la deformación en cualquier dirección del espacio. Hasta ahora, el tratamiento ha sido independiente pero, dado que la deformación y la tensión son causa y efecto, ha de existir alguna relación entre ellos.

Dada una fuerza externa que actúe sobre el cuerpo, las tensiones que aparecerán en él como consecuencia del mantenimiento del equilibrio, dependerá de la estructura del cuerpo. La relación entre deformaciones y tensiones se establece *experimentalmente*.

Si se somete un cuerpo a un esfuerzo de tracción y se mide la deformación producida, y se representan ambas magnitudes en un diagrama, se puede apreciar en el *diagrama de tensión-deformación* así obtenido dos comportamientos claramente diferenciados: una zona lineal, llamado régimen *elástico*, y otra no lineal conocido como régimen *plástico*. En la transición entre ambos se encuentra el régimen *anelástico*, caracterizado por una histéresis en la relación tensión-deformación.

En la zona elástica, lineal se puede considerar la siguiente relación:

$$\sigma = Ee \quad (26)$$

donde σ es la tensión, e la deformación y E el módulo de Young. La relación (26) constituye la expresión matemática de la *ley de Hooke*. Dado que e es adimensional, el módulo de Young tiene dimensiones de tensión.

Cuando un cuerpo es sometido a una tracción en una dirección dada se produce un estiramiento en esa dirección; se aprecia experimentalmente una disminución de las dimensiones transversales a la dirección de tracción. Este acortamiento se cuantifica mediante el *coeficiente de Poisson* ν . Supóngase que la tracción σ_x , en la dirección, provoca una deformación e_x en esa deformación. Si se consideran las deformaciones, en módulo, en las direcciones z e y , se verifica:

$$\nu = \frac{|e_y|}{e_x} = \frac{|e_z|}{e_x} \quad (27)$$

Dado que el coeficiente de Poisson informa sobre la magnitud del acortamiento, se considera el módulo de las deformaciones e_y y e_z , ya que el signo indica únicamente sobre si se trata de un acortamiento (signo negativo) o estiramiento (signo positivo). El mismo criterio de signos se usa para las tensiones, que son positivas si son tracciones y negativas si se trata de compresiones.

Las deformaciones transversales, recordando que son acortamientos (negativas por tanto) pueden expresarse en función de la tensión de tracción:

$$e_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad e_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (28)$$

Se puede formular la siguiente cuestión: dada una tensión en una dirección dada, ¿cuál es la deformación total en esa dirección? Para responder a esta cuestión hay que considerar el llamado

principio de superposición, válido en el dominio elástico.

Principio de superposición

Este principio afirma que el estado de equilibrio debido a varias fuerzas exteriores es equivalente a la superposición de las soluciones que corresponden a cada uno de los estados se cada fuerza exterior actuase independientemente.

Ley de Hooke generalizada

El principio de superposición permite obtener una *ley de Hooke generalizada*, que se expresa en la forma:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (29a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (29b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (29c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (29d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (29e)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (29f)$$

donde G es el llamado *módulo de cizalladura*.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (29g)$$

Estas ecuaciones relacionan las tensiones en una dirección con las deformaciones que produce tanto en su misma dirección como en la transversal a ella. Conviene mencionar que las tensiones en la dirección de los ejes coordenados coinciden con la componente correspondiente del tensor de tensión; por ejemplo, σ_x es la tensión que actúa sobre planos perpendiculares al eje x.

Ecuaciones de Lamé

Resultan de expresar las tensiones en función de las deformaciones. A partir de las ecuaciones (29) se obtiene:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2G \epsilon_x \quad (30a)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2G \epsilon_y \quad (30b)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2G \epsilon_z \quad (30c)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (30d)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (30e)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (30f)$$

donde λ tiene el valor:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (30g)$$

y donde $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$.

Los módulos λ y G son las llamadas *constantes de Lamé*.

Formulación del problema elástico

Un problema elástico puede ser formulado de dos formas: en *corrimientos* o en *tensiones*. A partir de las condiciones de compatibilidad (25), de las ecuaciones de equilibrio interno (18) y de las ecuaciones de equilibrio en el contorno (19), pueden obtenerse un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que relacionan las componentes del vector corrimiento entre si, o las componentes de la matriz de tensiones entre si.

En el primer caso (corrimientos), y a partir de las ecuaciones de equilibrio interno (18) y de las ecuaciones de Lamé (30), se obtienen la *ecuaciones de Navier*, tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que pueden condensarse en la llamada *ecuación fundamental de la elasticidad*:

$$\bar{F} + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \bar{\delta}) + G \Delta \bar{\delta} = 0 \quad (31)$$

donde \bar{F} es una fuerza exterior por unidad de volumen, $\Delta \bar{\delta} = \Delta u_i + \Delta v_j + \Delta w_k$, siendo $\bar{\delta}$ el vector corrimiento de componentes u, v y w , y donde ∇, Δ representan los operadores gradiente y laplaciano, respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones de Lamé (30) en las ecuaciones de compatibilidad (25), se pueden obtener seis ecuaciones diferenciales, una para cada componente de la matriz de tensiones; son las llamadas *ecuaciones de Michell*.

Tensiones de origen térmico

Una vez conocida la formulación básica de la teoría de la elasticidad, podemos abordar el problema de la determinación de tensiones generadas por procesos térmicos.

Cuando un cuerpo es sometido a un aumento de temperatura homogéneo se produce una dilatación en el mismo, que si no puede producirse libremente provoca la aparición de *tensiones internas*. Por otro lado, si en el interior del cuerpo existe un *gradiente de temperatura*, la dilatación de las superficies que se encuentran en un instante determinado a mayor temperatura serán mayores que las que están a temperaturas más bajas; esta diferencia de dilataciones relativas será causa de un estado tensional en el interior del cuerpo.

Se encuentra experimentalmente, que la relación que existe (en una barra, por ejemplo) entre una variación de temperatura ΔT y la variación de longitud ΔL provocada viene dada por:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \quad (32)$$

La constante de proporcionalidad α es una característica física del material que se llama *coeficiente de dilatación lineal*. El alargamiento unitario debido a la dilatación vendrá dado por:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T \quad (33)$$

Si la citada barra es libre, no aparecerá tensión alguna, pero si no puede alargarse, el fenómeno es equivalente a una compresión cuyo acortamiento es igual al alargamiento térmico. En virtud de la ley de Hooke (26), aparecerá una tensión $\sigma = -E \cdot \epsilon = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T$, donde ΔT es la variación de temperatura a que se somete la barra y α el coeficiente de dilatación lineal.

Puede parecer que las tensiones térmicas sólo aparecerán si el sólido elástico no puede dilatarse libremente. Esto es cierto únicamente si la temperatura es homogénea en todo el cuerpo, o si su gradiente es constante.

Dependencia no lineal de la temperatura

La existencia de un gradiente de temperaturas no nulo es condición necesaria pero no suficiente para la generación de tensiones en un cuerpo elástico que puede moverse libremente. Para que se produzcan esas tensiones, el campo escalar $T(x,y,z)$, que representa la temperatura en el punto de coordenadas (x,y,z) .

Supóngase que el cuerpo puede dilatarse libremente. En este caso, las únicas componentes no nulas de la matriz deformación $[D]$ son las diagonales, que tendrán el valor común αT . Este estado de deformación verificará tanto las ecuaciones de equilibrio interno (18) como las de equilibrio en el contorno (19). Para que también se cumplan las condiciones de compatibilidad (25) han de verificarse relaciones del tipo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \quad (35)$$

Por tanto, de (34) y (35) la función $T(x,y,z)$ ha de ser lineal, de la forma $a_1x + a_2y + a_3z$. Es decir, la temperatura tendría que variar linealmente con la posición para que existan deformaciones debidas a variaciones térmicas sin que aparezcan tensiones.

Para un caso distinto del lineal, las *condiciones de compatibilidad no se cumplirían*. Esto quiere decir que si el sólido elástico es sometido a un estado térmico no lineal, aparecen unas tensiones de origen térmico (con sus deformaciones elásticas correspondientes) que tendrán que verificar las ecuaciones de equilibrio interno, las de equilibrio en el contorno y las condiciones de compatibilidad. Si σ_{nx} , σ_{ny} , σ_{nz} , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} son las *tensiones termoelásticas* que aparecen, las deformaciones en cada punto se obtendrán como la suma de las producidas por esas tensiones y de las provocadas por la dilatación térmica. Las ecuaciones de Hooke quedan en la forma:

$$e_x = \frac{1}{E}[\sigma_{nx} - \nu(\sigma_{ny} + \sigma_{nz})] + \alpha T \quad (36a)$$

$$e_y = \frac{1}{E}[\sigma_{ny} - \nu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz})] + \alpha T \quad (36b)$$

$$e_z = \frac{1}{E}[\sigma_{nz} - \nu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})] + \alpha T \quad (36c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (36d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (36e)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (36f)$$

Las deformaciones angulares son debidas únicamente a las tensiones tangenciales termoelásticas, ya que la deformación de origen térmico no produce variaciones angulares (Ortiz, 1985).

Las correspondientes ecuaciones de Lamé son:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2G e_x - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (37a)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2G e_y - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (37b)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2G e_z - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad (37c)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (37d)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (37e)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (37f)$$

donde

$$e = \frac{\Theta}{E} (1-2\nu) + 3\alpha T, \quad \Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (38)$$

A la vista de las ecuaciones (37), se puede considerar las tensiones como suma de dos contribuciones. Esto queda justificado con el siguiente teorema.

Teorema de Duhamel

Afirma que los desplazamientos debidos a variaciones térmicas y tensiones termoelásticas son los mismos que se producirían en el sólido elástico si actuasen sobre él una fuerza por unidad de masa, de componentes:

$$F_x = \frac{-\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F_y = \frac{-\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad F_z = \frac{-\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (39)$$

y una fuerza por unidad de superficie, de componentes (donde $\cos u_i$ representa el coseno del ángulo que forma el vector normal a la superficie con la dirección i)

$$S_x = \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos u_x, \quad S_y = \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos u_y, \quad S_z = \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos u_z \quad (40)$$

sin que exista variación alguna de temperatura.

Estados de deformación plana

Cuando un sólido elástico es sometido a un sistema de fuerzas exteriores, puede ocurrir que la matriz de tensiones y la matriz de deformaciones no varíen en una determinada dirección, es decir, que el estado tensional sea el mismo en planos paralelos a uno dado, denominado *plano director* (Ortiz, 1985). Este estado de deformación es aplicable en el caso de la fabricación de hilos amorfos (como primera aproximación, sin tener en cuenta la influencia de la flexión intrínseca). En un hilo suficientemente largo el estado tensional debería ser el mismo, por simetría, en toda su longitud.

Se define un estado de deformación plano como aquel en que las componentes u y v del vector corrimiento son independientes de la coordenada z y en donde la tercera componente w es nula:

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y), \quad w=0 \quad (41)$$

En el caso en que u y v fueran independientes de z , pero w no sea nula, sino que verificase que $\epsilon_z = \partial w / \partial z = \text{constante}$, los estados de tensión y deformación se pueden obtener como superposición de los correspondientes a un estado de deformación plana ($w=0$) y una tracción o compresión uniformes en la dirección del eje z ($\epsilon_z = \text{constante}$).

Elasticidad en coordenadas cilíndricas

Dada la simetría cilíndrica de los hilos amorfos, es conveniente expresar las relaciones anteriores en coordenadas cilíndricas (r, θ, z), que se relacionan con las cartesianas (x, y, z) en la forma:

$$x=r \cos\theta, \quad y=r \sin\theta, \quad z=z \quad (42)$$

Las expresiones obtenidas anteriormente variarán en su forma en las nuevas coordenadas. Otras no, como es el caso de las ecuaciones de Hooke y de Lamé. Entre las que cambian cabe citar las condiciones de compatibilidad, las ecuaciones de equilibrio y la expresión de las componentes de la matriz de deformación en función de las componentes del vector desplazamiento.

Por ejemplo, las componentes de la matriz de deformación toman la forma:

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (43a)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (43b)$$

Las ecuaciones de equilibrio interno toman la forma:

$$F_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (44a)$$

donde F_r , F_θ y F_z son las componentes de la fuerza por unidad de masa que actúa sobre el sólido elástico.

$$F_{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (44b)$$

$$F_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (44c)$$

Tensiones térmicas en cilindros

Vamos a calcular la forma de las tensiones de origen térmico que aparecen en cilindros, suponiendo que nos encontramos en el caso de deformación plana.

Vamos a tomar un sistema de referencia en el cual el eje z coincide con el eje del hilo. En la deformación plana tenemos, según las relaciones (41), que $w=0$. En este caso se tiene que la deformación axial ϵ_z es nula.

A partir de la ecuación de Hooke (36c) se tiene que la tensión axial es de la forma:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_{\theta}) - E\alpha T \quad (45)$$

✧ Esta tensión será independiente de z.

Si suponemos que el gradiente de temperatura depende únicamente de la coordenada radial, las tensiones que aparezcan serán independientes de la coordenada θ . Tampoco aparecerán, por simetría, tensiones tangenciales. Si no se aplican fuerzas externas, las ecuaciones de equilibrio interno se reducen a:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (46)$$

Esta ecuación relaciona la variación de la tensión radial con la posición con los valores en cada punto r de la tensión radial y azimutal.

De las ecuaciones de Hooke (36a) y (36b) se obtienen las expresiones de las tensiones σ_{θ} y σ_r en función de las deformaciones ϵ_r y ϵ_{θ} , estando estas dos últimas relacionadas con la componente radial, u, del vector desplazamiento en la forma:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \quad (47)$$

Introduciendo la expresión de las tensiones en la ecuación de equilibrio (46), se encuentra una ecuación diferencial de segundo orden para u(r):

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr} \quad (48)$$

La solución que se obtiene es (Timoshenko, 1968):

$$u(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{1}{r} \int_a^r T(r) r dr + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (49)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración, y a es un límite de integración arbitrario.

A partir de (49), (47), (45) y de la ley de Hooke, se pueden obtener las tensiones buscadas:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{c_1}{1-2\nu} - \frac{c_2}{r^2} \right) \quad (50)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr - \frac{\alpha E T}{1-\nu} + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{c_1}{1-2\nu} + \frac{c_2}{r^2} \right) \quad (51)$$

$$\sigma_z = -\frac{\alpha E T}{1-\nu} + \frac{2\nu E c_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (52)$$

Las condiciones de contorno que se impongan al problema particular determinarán las constantes c_1 y c_2 .

En las secciones siguientes vamos a aplicar las tensiones dadas en (50), (51) y (52) para cuantificar las tensiones de origen térmico que aparecen en el proceso de solidificación de hilos amorfos convencionales y de microhilos.

PROCESO DE SOLIDIFICACION DE HILOS AMORFOS

Una vez determinadas las tensiones de origen térmico que aparecen en sistemas con simetría cilíndrica, vamos a abordar el problema de determinar las tensiones internas que aparecen en hilos amorfos debidas al proceso de fabricación y que determinarán su estructura de dominios. La fabricación consiste básicamente en eyectar el chorro de metal líquido sobre una superficie de agua. Gracias a la disminución de la energía superficial este chorro adquirirá forma cilíndrica. La solidificación se producirá por una transferencia de calor desde el metal líquido al agua.

Para determinar esas tensiones se han considerado las siguientes aproximaciones:

- Gradiente de temperaturas dependiente únicamente de la coordenada radial
- El proceso de solidificación se produce en pasos sucesivos: solidifica primero la capa cilíndrica exterior, es decir, la que está en contacto con el agua. *La solidificación progresa hacia el interior.*
- Suponiendo un perfil de temperaturas en que ésta varía de forma no lineal con la coordenada r , en la solidificación de cada capa aparecen unas tensiones térmicas. La solidificación no simultánea de las diferentes capas cilíndricas es la fuente de las tensiones internas residuales.
- Se supone un estado de deformación plano.

A continuación, vamos a detallar el perfil de temperaturas y las tensiones de origen térmico que aparecen en capas cilíndricas.

Perfil de temperatura

El perfil de temperatura, esto es la función $T(r)$, ha de ser solución de la ecuación de conducción del calor (Isachenko, 1979). En sistemas con simetría cilíndrica, la ecuación tiene la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales. La variable t representa el tiempo. La solución será una función que dependa de la posición y del tiempo, $T(r,t)$. La constante η es la *difusividad térmica*.

En la ecuación (1), la constante η toma el valor:

$$\eta = \frac{K}{\rho c} \quad (2)$$

donde K es la conductividad térmica, c el calor específico y ρ la densidad del material considerado.

La solución de la ecuación (1) implica, como todo problema de contorno de simetría cilíndrica, la aparición de las funciones de Bessel. Supongase que se tiene un cilindro, de un material dado, a una temperatura T_1 ; en el instante $t=0$ la superficie lateral del cilindro se mantiene a una temperatura $T_2 < T_1$. La distribución de temperatura en un instante posterior t y una posición r , vendrá dada por:

$$T(r,t) = T_2 + (T_1 - T_2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_j J_1(\beta_j)} J_0(\beta_j \frac{r}{R}) e^{-[\eta (\frac{\beta_j}{R})^2] t} \quad (3)$$

La variación temporal viene dada por una exponencial y la variación espacial mediante las llamadas funciones de Bessel de primera especie de orden cero, J_0 , y de orden uno, J_1 , cuyas expresiones vienen dadas por las series:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \quad J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} \quad (4)$$

En la expresión (3), las constantes β_j representan los ceros de la función $J_0(x)$, es decir, que cumplen la relación $J_0(\beta_j) = 0$. Por ejemplo, los tres primeros ceros son $\beta_1 = 2.4048$, $\beta_2 = 5.5201$, $\beta_3 = 8.6537$.

Como puede verse, la función $T(r,t)$ tiene una forma compleja, difícil de implementar en un cálculo numérico y más si se tiene en cuenta que las expresiones matemáticas de las tensiones térmicas involucran funciones integrales del tipo $f(r) = \int_a^r ds \cdot s \cdot T(s)$, donde a es un límite inferior de integración arbitrario.

Vamos a considerar una aproximación que simplifique el cálculo. La ecuación de conducción del calor (1) tiene una solución que presenta una expresión analítica simple, y que aunque es cuantitativamente distinta a la dada en (3), muestra un comportamiento cualitativo adecuado. Se trata de la solución correspondiente al *estado estacionario*, es decir, aquel en que el flujo de calor que sale del cilindro se mantiene constante con el tiempo. La temperatura, en este caso, no depende del tiempo. Esta solución se obtendría al resolver la ecuación (1) anulando la derivada de la temperatura con respecto al tiempo.

La solución específica para una capa cilíndrica de radio interno a y de radio externo b , y cuya parte interna se mantiene a una temperatura T_1 mientras que la de la externa es T_2 , tiene la siguiente forma:

$$T(r) = T_2 + \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(\frac{b}{a})} \ln(\frac{b}{r}) \quad (5)$$

La figura 1 muestra el perfil de temperatura para los casos estacionario y transitorio para el caso de una capa cilíndrica de radio externo R y de radio interno R_0 . Se considera una coordenada radial normalizada $x = r/R$, por lo que el intervalo de variación de x está comprendido en $[x_0, 1]$. Se toma $x_0 = 10^{-3}$ (prácticamente se trata de un cilindro compacto). Para el caso transitorio, se ha calculado el perfil de temperatura en el instante $t = 50 \mu s$, tras haber establecido la diferencia de temperaturas entre el interior y el exterior del cilindro. Se ha tomado $T_2 = 390 \text{ K}$ y $T_1 = 1300 \text{ K}$. Los valores de las constantes físicas relacionadas son la difusividad térmica son: $K = 30 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho = 7200 \text{ Kgr m}^{-3}$ y $c = 530 \text{ JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$ (Isachenko, 1979).

En la figura puede apreciarse la diferencia de los dos perfiles; el correspondiente al estado transitorio marca temperaturas superiores al caso del flujo estacionario de calor. Para tiempos superiores a $50 \mu s$, el perfil transitorio se acerca más a los valores que ofrece el estacionario (Timoshenko, 1968). Ambas tienen una dependencia no lineal con la posición x .

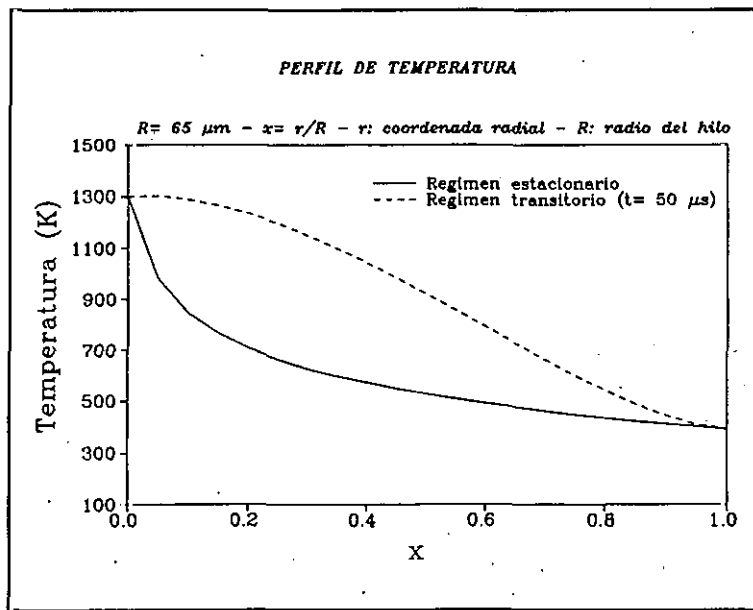


Figura 1 -. Perfiles de temperatura en un cilindro.

Una vez determinado el perfil térmico que se va a considerar en los cálculos, vamos a determinar la expresión matemáticas de las tensiones que aparecen en capas cilíndricas sometidas a gradientes de temperatura.

Tensiones en capas cilíndricas

A partir de las tensiones termoelásticas (50), (51) y (52) de la sección anterior, válidas para sistemas con simetría cilíndrica sometidos a estados de deformación planos, vamos a obtener las correspondientes al caso de una capa cilíndrica (ver figura 2) de radio exterior b y radio interior a .

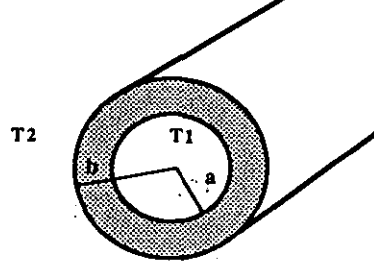


Figura 2 -. Capa cilíndrica

Las condiciones de contorno son, en este caso, la anulación de la tensión radial en las superficies interna y externa del cilindro, es decir

$$\sigma_r(r=b) = \sigma_r(r=a) = 0 \quad (6)$$

Usando la ecuación (50) de la sección anterior se obtienen las expresiones:

$$\sigma_r(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - \int_a^r T(r) r dr \right] \quad (7)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr + \int_a^r T(r) r dr - T(r) r^2 \right] \quad (8)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - T(r) \right] \quad (9)$$

3.3

Proceso de solidificación

Vamos a suponer que el proceso de solidificación consiste en la solidificación progresiva de capas cilíndricas comenzando por la más externa. La tensión total se obtendrá como la suma de las contribuciones de todas las capas cilíndricas implicadas (Velázquez, 1991). La figura 3 muestra un esquema del proceso.

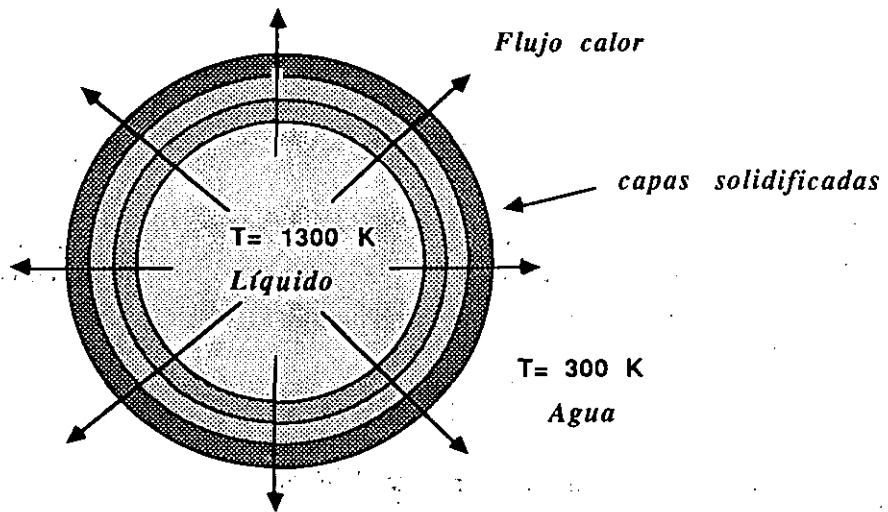


Figura 3 -. Proceso de solidificación de hilos amorfos

Como se ha visto anteriormente, en tubos cilíndricos con radio reducido externo 1 y radio reducido interno ϵ ($\epsilon < 1$), sometidos a un gradiente de temperatura dependiente únicamente de la dirección radial, aparecen tres tensiones: *radial* $\sigma_r^*(x, \epsilon)$, *circular* $\sigma_\theta^*(x, \epsilon)$ y *axial* $\sigma_z^*(x, \epsilon)$, donde $x=r/R$ es la coordenada radial reducida, siendo R el radio del hilo y r la coordenada radial cilíndrica. Las expresiones de estas tensiones se obtienen a partir de (7), (8) y (9):

$$\sigma_r^*(x, \epsilon) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \int_\epsilon^1 T(x) x dx - \int_\epsilon^x T(x) x dx \right] \quad (10)$$

$$\sigma_\theta^*(x, \epsilon) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^2 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \int_\epsilon^1 T(x) x dx + \int_\epsilon^x T(x) x dx - T(x) x^2 \right] \quad (11)$$

$$\sigma_z^*(x, \epsilon) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2}{1 - \epsilon^2} \int_\epsilon^1 T(x) x dx - T(x) \right] \quad (12)$$

Conforme va avanzando el proceso de solidificación desde afuera hacia adentro, el radio ϵ de la capa cilíndrica es cada vez más pequeño. Para cada ϵ habrá una contribución a la tensión total. Para obtener el valor de cada tensión en cada punto x , habrá que sumar todas las contribuciones de cada capa en el punto dado (Madurga, 1990). El valor de las tensiones totales se obtiene a partir de las expresiones:

$$\sigma_r(x) = \int_0^x \sigma_r^*(x, \epsilon) d\epsilon, \quad \sigma_\theta(x) = \int_0^x \sigma_\theta^*(x, \epsilon) d\epsilon, \quad \sigma_z(x) = \int_0^x \sigma_z^*(x, \epsilon) d\epsilon \quad (13)$$

Considerando el perfil térmico (5), correspondiente al flujo estacionario de calor, y escrito en forma conveniente:

$$T(x) = T_2 + [(T_1 - T_2) \frac{\ln x}{\ln \epsilon}] \quad (14)$$

se pueden calcular las tensiones totales. Las integraciones se hacen numéricamente. En el cálculo se han considerado los siguientes parámetros (Velázquez, 1991):

- $T_1 = 1300 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$
- $E = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\nu = 0.33$
- $\alpha = 4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

La figura 4 muestra el resultado obtenido.

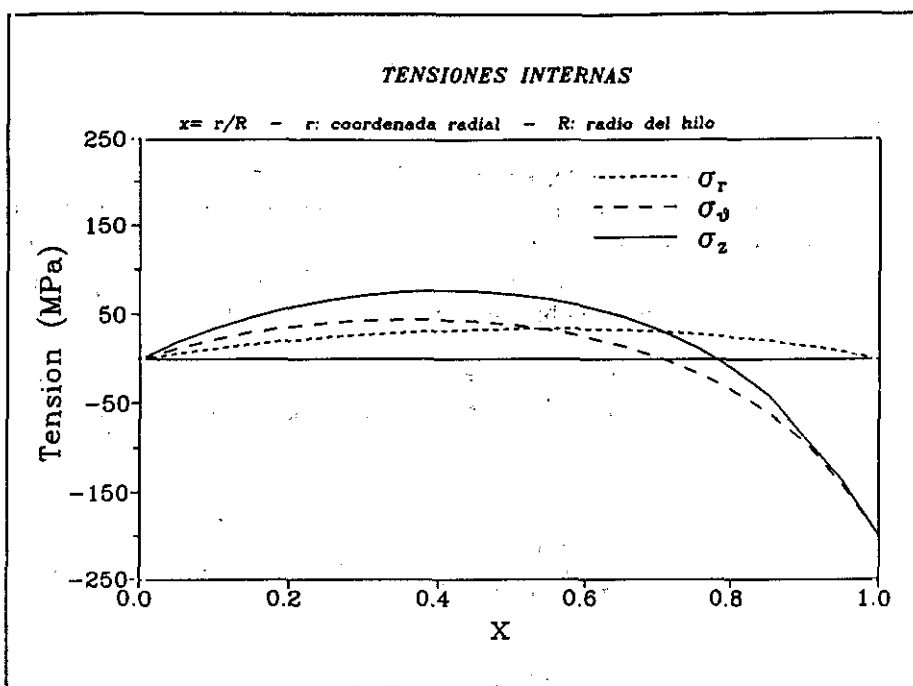


Figura 4 -. Distribución de tensiones internas.

Los valores de las tensiones internas están relacionadas con el valor del módulo de Young, E , del coeficiente de dilatación térmica, α , el coeficiente de Poisson, ν , y de la temperatura promedio durante la fabricación. El valor $\alpha E / (1 - \nu)$ multiplicado por la temperatura promedio aporta el orden de magnitud de las tensiones internas, que es de 200-300 MPa como valor medio

La tensión radial, σ_r , siempre toma valores positivos, anulándose en el eje y en la superficie del hilo. El ser positiva corresponde a una tensión de tracción. Esta tensión actúa sobre planos perpendiculares a la dirección radial.

La tensión circular, σ_θ , que se anula también en el origen, toma valores positivos (tracción) en el dominio de valores de x comprendido entre 0 y 0.706. Para valores de x mayores que 0.706, la tensión circular es negativa, lo cual indica que es compresiva. Esta tensión actúa sobre planos paralelos a las direcciones radial y axial.

La tensión axial, σ_z , tiene un comportamiento similar a la circular. Es positiva para x comprendida entre 0 y 0.782 y negativa para valores superiores a este último. Esta tensión actúa sobre planos perpendiculares al eje del hilo. Su valor es mayor que el de las otras dos tensiones, lo cual es lógico ya que hemos supuesto que las deformaciones son planas, por lo que la tensión axial será proporcional a la suma de la radial y la circular.

Esta distribución de tensiones explica perfectamente la estructura de dominios observada en hilos amorfos de magnetostricción alta y positiva. Cada tensión σ lleva aparejada una anisotropía

magnetoelástica, de valor $K_1 = (3/2) \cdot \lambda \cdot \sigma_1$, donde λ es la constante de magnetostricción. Para valores de $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$, como es el caso del hilo de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ que se estudia posteriormente, el acoplamiento entre los momentos magnéticos y las tensiones es muy fuerte; en este caso, las tensiones determinan la dirección de los momentos magnéticos en el hilo, que se dispondrán de forma que se minimice la energía magnetoelástica implicada, según el siguiente criterio: si la tensión es positiva la imanación se dispone en la misma dirección que la tensión, y si la tensión es negativa se dispondrá perpendicularmente a la tensión.

Dado que la axial es la mayor de todas las tensiones, la dirección de la imanación vendrá determinada por el valor de la anisotropía que esta tensión introduce (la anisotropía será la mayor de todas). En la zona comprendida entre $x=0$ y $x=0.782$ la tensión es positiva, por lo que la imanación estará dirigida según el eje del hilo. Para valores de x mayores que 0.782 la imanación tendrá un eje fácil perpendicular al eje del hilo. El eje fácil radial es debido al signo positivo de σ_r y al negativo de σ_ϕ y σ_z . La presencia de imanación circular local sugiere la posibilidad de efectos Matteucci y Wiedemann inverso.

En otra sección posterior se analizará más en detalle la estructura de dominios a la luz de la distribución de tensiones.

TENSIONES EN MICROHILOS

Introducción

Los hilos que hemos estudiado hasta ahora han sido obtenidos mediante la técnica de enfriamiento ultrarrápido sobre agua denominada *in-rotating-water quenching technique*, que permite producir hilos con diámetros típicos de $130\ \mu\text{m}$. Los hilos llamados *as-cast*, es decir, los que aún no han sido sometidos a ningún tratamiento, y ricos en hierro, ofrecen una particularidad muy interesante: presentan un ciclo de histéresis cuadrado con un único salto Barkhausen. Este comportamiento se ha interpretado a partir de la estructura de dominios de estos materiales: un dominio interno en el que la imanación es coaxial al eje, y otro externo en el que la imanación está orientada perpendicularmente al eje del hilo. El ciclo cuadrado se interpreta como una consecuencia de la inversión del sentido de la imanación en el dominio interno cuando el campo magnético aplicado alcanza un valor umbral (conocido como *switching field*, H^*). Estas características, junto con su alta constante de magnetostricción, hacen de ellos un material muy versátil para diversas aplicaciones técnicas, como pueden ser sensores de campo magnético y tensiones mecánicas.

Recientemente se ha venido produciendo otro tipo de hilos mediante una modificación de la técnica de Taylor (Baranov, 1995). Se trata de los llamados *microhilos*, que se caracterizan por tener un diámetro muy pequeño, del orden micras o decenas de micras, y por estar recubiertos de una capa de vidrio, cuyo espesor es de algunas micras.

A continuación vamos a explicar someramente la técnica de Taylor mediante la que se fabrican estos microhilos y a exponer algunas de sus propiedades magnéticas, para luego hacer un cálculo detallado de las tensiones térmicas que aparecen en el proceso de fabricación de éstos microhilos y que dan lugar a las anisotropías magnetoelásticas que determinan la estructura de dominio, y el comportamiento magnético de estos materiales.

Técnica de Taylor modificada

Los microhilos se fabrican haciendo uso de la llamada *técnica de Taylor modificada*. La figura 1 muestra un esquema del proceso.

Los componentes que formarán la aleación amorfa se sitúan en el interior de un tubo de vidrio "pyrex". La composición de este vidrio es la siguiente: 80.1% de SiO_2 , 12.3% de B_2O_3 , 5.3 % de Na_2O , 2.1% de Al_2O_3 y 0.3% de CaO .

El sistema experimental permite fundir el metal mediante una bobina de inducción a alta frecuencia. El calentamiento funde el tubo de vidrio, pudiéndose obtener un *fino capilar* (cuya parte interna es metálica y la externa es de vidrio). Este capilar se enrolla en una pequeña rueda giratoria, después de pasar a través de un chorro de agua que lo solidifica (Baranov, 1995).

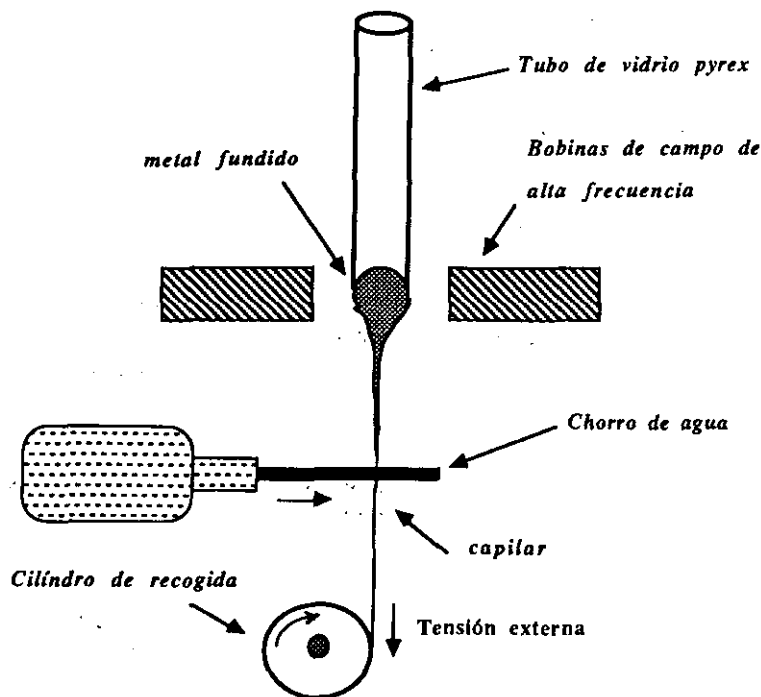


Figura 1 -. Técnica de Taylor modificada

Teniendo en cuenta este proceso, se pueden enumerar varios aspectos importantes:

- El enfriamiento es *ultrarrápido*, por lo que permitirá obtener muestras amorfas. El rápido enfriamiento dará lugar a un estado térmico no lineal que propiciará la aparición de tensiones termoelásticas.
- Solidifican dos materiales distintos: el vidrio aislante y el metal. Estos materiales presentan coeficientes de dilatación térmica distintos, lo cual dará lugar a tensiones adicionales.
- Cuando el capilar, que se va solidificando, se enrolla en la rueda giratoria, se ve sometido a una *tensión axial* por la acción mecánica de la citada rueda.

Propiedades magnéticas

Al igual que los hilos amorfos convencionales, los microhilos en cuya composición entra mayoritariamente el hierro como metal de transición, presentan un ciclo de histéresis cuadrado con un único salto Barkhausen (Zhukov, 1995, (2)). Por analogía con los hilos convencionales hay que pensar que su estructura de dominios es similar a la de aquellos y que las tensiones térmicas que se producen también lo son. Dado que los campos coercitivos que se encuentran en los microhilos son un orden de magnitud mayor que los obtenidos para hilos convencionales, hay que pensar en *tensiones adicionales* debidas al proceso de fabricación.

Es sabido que los hilos amorfos, ricos en hierro, convencionales, pierden la biestabilidad cuando su longitud es menor que una dada (del orden de 7 cm), debido a que el campo desimanador destruye la estructura monodominio del núcleo interno y por tanto aparecen más de un salto Barkhausen. En los microhilos, la longitud crítica es mucho menor, del orden de los 2 mm (Zhukov, 1995, (1)).

La relación entre el tamaño de la capa de vidrio y el tamaño de la parte metálica del microhilo también ha sido estudiada exhaustivamente (Zhukov, 1995, (2)). Se ha encontrado que *el campo coercitivo aumenta y la remanencia disminuye cuando aumenta el tamaño de la capa de vidrio*, para dimensiones constantes de la parte metálica. Esto puede entenderse si se considera que el aumento de la cubierta de vidrio introduce unas tensiones radiales mayores, lo que forzaría a la imanación a formar ángulos cada vez mayores con el eje del microhilo (recordar que la magnetostricción de los microhilos ricos en hierro es positiva, y la energía magnetoelástica se minimiza cuando la imanación se coloca paralelamente a la anisotropía que provoca la tensión), lo cual explica la disminución de la remanencia (que informa sobre la cantidad relativa de imanación que está dirigida según el eje del microhilo). El aumento del campo coercitivo se explica por el aumento de la magnitud de las tensiones (recordar que el campo de anisotropía es proporcional a la magnitud de la anisotropía, y el campo coercitivo está relacionado de alguna manera con el campo de anisotropía).

La estimación del orden de magnitud de las tensiones internas, a partir del trabajo de imanación, arroja un valor de 10^3 MPa, un orden de magnitud mayor que en los hilos convencionales (Zhukov, 1995, (5)).

Al igual que en los hilos amorfos convencionales, la estructura de dominios vendrá determinada por el compromiso entre las energías magnetoelásticas (debida a la tensiones) y magnetostáticas (debida a la presencia de polos magnéticos en los extremos del hilo). La reducción de la relación diámetro a longitud en los microhilos, provoca una disminución de la longitud mínima para observar biestabilidad, lo cual está relacionado con la reducción de la longitud de los dominios de cierre en los extremos del dominio interno en el cual la imanación es coaxial al eje del hilo.

También se han estudiado las propiedades magnéticas de microhilos con otras composiciones (Baranov, 1995). Para la serie $(\text{Fe}_x\text{Co}_{1-x})_{63}\text{Ni}_{10}\text{B}_{16}\text{Si}_{11}$, con diámetros totales del orden de $25\text{ }\mu\text{m}$ (y tamaños de la parte metálica del orden de $10\text{ }\mu\text{m}$) y longitud suficiente como para observar biestabilidad, se aprecia un cambio de signo de la constante de magnetostricción cuando varía el contenido en hierro. Por ejemplo, para $x=6$ el ciclo de histéresis no exhibe biestabilidad (no es cuadrado) y la constante de magnetostricción es negativa; en cambio, si $x=8$, el ciclo es cuadrado y la magnetostricción es positiva.

Para terminar con la descripción de las propiedades de los microhilos, conviene destacar la extrema dificultad experimental implicada en la medida de estas muestras. Las dimensiones son determinadas mediante un microscopio metalográfico, y el montaje experimental para medir ciclos de histéresis por el método de inducción, requiere del concurso de solenoides y carretes secundarios de muy pequeño diámetro. Un montaje experimental de este tipo ha sido desarrollado por el Dr. Zhukov, del Instituto de Magnetismo Aplicado.

Tensiones térmicas en microhilos

Para calcular las tensiones de origen térmico que aparecen en microhilos, vamos a seguir un procedimiento similar al considerado en el caso de los hilos convencionales. Se van a asumir las mismas aproximaciones que en aquel caso, es decir, se supone que *el gradiente de temperatura depende únicamente de la coordenada radial*, que el proceso de solidificación se efectúa *por capas cilíndricas* y que *el estado de deformación producido es plano*. También se considera aquí, para simplificar el cálculo, el perfil de temperatura correspondiente al flujo estacionario de calor.

El cálculo no añade dificultades conceptuales, sino únicamente de cálculo debido a la presencia de dos materiales distintos. Vamos a considerar en primer lugar las tensiones que aparecen en una capa cilíndrica para después sumar la contribución de las distintas capas que se van formando en el proceso de solidificación.

Vamos a considerar una capa cilíndrica de radio interno R_0 y de radio externo R_2 . Esta capa cilíndrica tiene una parte metálica y otra de vidrio; el radio externo de la capa de metal es R_1 , de forma que $R_0 < R_1 < R_2$. La figura 2 muestra la sección de la capa cilíndrica.

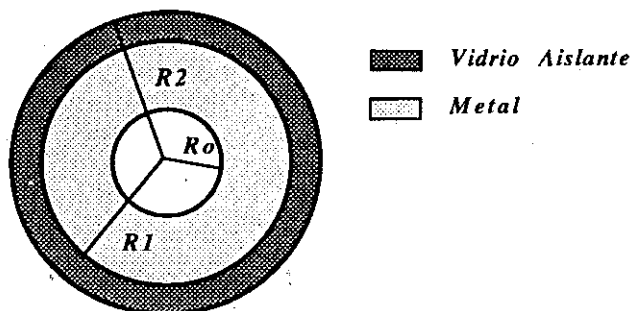


Figura 2 -. Sección de capa cilíndrica

En la sección dedicada al estudio de las tensiones termoelásticas, ya se obtuvo una expresión para las tensiones radial, circular y axial que se originan (ver expresiones (50), (51) y (52) de la citada sección). Para facilitar su manejo, vamos a escribirlas en forma más esquemática (Torroja, 1967). Por ejemplo, la tensión radial, σ_r , puede escribirse en la forma:

$$\sigma_r^i(r) = -K_i \frac{1}{r^2} I(r) + A_i + \frac{B_i}{r^2} \quad (1)$$

donde el subíndice i denota las dos clases de materiales ($i=1$ corresponde al metal, e $i=2$ al vidrio). Los símbolos A_i y B_i denotan constantes a determinar a partir de las *condiciones de contorno*, e $I(r)$ expresa la siguiente integral:

$$I(r) = \int_0^r ds \, s T(s) \quad (2)$$

siendo $T(r)$ el perfil de temperatura.

En la ecuación (1) el símbolo K_i representa la cantidad $\alpha_i E_i / (1 - \nu_i)$, donde ν_i , E_i y α_i , son el coeficiente de Poisson, módulo de cizalladura y coeficiente de dilatación, respectivamente, de cada material.

Haciendo uso de la *ecuación de equilibrio interno*:

$$\frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0 \quad (3)$$

puede obtenerse la tensión circular:

$$\sigma_\theta^i(r) = \sigma_r^i(r) + r \frac{d\sigma_r^i(r)}{dr} \quad (4)$$

donde r representa la coordenada radial. Operando, se obtiene el valor:

$$\sigma_\theta^i(r) = K_i \frac{1}{r^2} I(r) + A_i - \frac{B_i}{r^2} - K_i T(r) \quad (5)$$

Para calcular, la tensión axial se tiene en cuenta que el estado de deformación es plana, y esta tensión viene determinada por la suma de las tensiones radial y circular, a través de la expresión:

$$\sigma_z^i(r) = \nu_i [\sigma_r^i(r) + \sigma_\theta^i(r)] - \alpha_i E_i T(r) \quad (6)$$

A través de (4) puede expresarse en función de la tensión radial:

$$\sigma_z^i(r) = \nu_i \left[2\sigma_r^i(r) + r \frac{d\sigma_r^i(r)}{dr} \right] - \alpha_i E_i T(r) \quad (7)$$

Finalmente, queda:

$$\sigma_z^i(r) = 2\nu_i A_i - K_i T(r) \quad (8)$$

Las relaciones (1), (5) y (8) expresan las tensiones radial, σ_r , circular, σ_θ , y axial, σ_z en función de cuatro constantes A_1 , B_1 , A_2 y B_2 . Para determinarlas habrá que considerar cuatro condiciones de contorno.

Condiciones de contorno

Son las siguientes (Timoshenko, 1968):

- Anulación de la tensión radial en la superficie interna de la capa cilíndrica

La tensión radial de la parte metálica del microhilo debe anularse en la superficie interna de la capa cilíndrica para que no exista fuerza neta en dicha superficie. Su expresión matemática es:

$$\sigma_r^i(R_0) = 0 \quad (9)$$

donde R_0 denota el radio interno de la capa cilíndrica.

- Anulación de la tensión radial en la superficie externa de la capa cilíndrica

Análogamente al caso anterior, no debe existir fuerza neta sobre la superficie externa de la capa cilíndrica. Debe anularse en esa superficie la tensión radial en el vidrio. Es decir:

$$\sigma_r^2(R_2)=0 \quad (10)$$

donde R_2 es el radio externo de la capa cilíndrica.

- Continuidad de la tensión radial

Para que la capa cilíndrica se encuentre en equilibrio mecánico, debe actuar la misma fuerza radial en la superficie de separación de los dos materiales. Esto se traduce en la igualdad de tensiones radiales en esa superficie de separación.

$$\sigma_r^1(R_1)=\sigma_r^2(R_1) \quad (11)$$

donde R_1 es el radio externo de la parte metálica de la capa (y, por consiguiente, el radio interno de la parte de vidrio). Las tensiones radiales del vidrio y del metal deben igualarse en la frontera de separación.

- Fuerza axial nula en cada sección del hilo

En toda sección del hilo, la fuerza total axial debe ser nula para que se conserve el equilibrio mecánico, ya que si no fuese así existiría una fuerza neta en el hilo. Esta condición de contorno tiene que tener en cuenta la *tensión axial que se aplica al microhilo en su proceso de fabricación*. Vamos a denotar esta tensión como T_{ex} .

En el proceso de enfriamiento del microhilo, la tensión termoelástica axial que se produce debe ser tal que anule la influencia de la tensión axial externa, para dar una fuerza axial nula. Matemáticamente, esto se expresa en la forma:

$$F_z = \iint dS \sigma_z = 2\pi \int_0^R dr r [\sigma_z^{hilo} + T_{ex}] = 0 \quad (12)$$

donde σ_z^{hilo} simboliza la tensión axial termoelástica.

Resolución de las ecuaciones de contorno

Aplicando las condiciones de contorno (9), (10), (11) y (12) a las tensiones (1) y (8) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son A_i y B_i :

$$A_1 + \frac{B_1}{R_o^2} = \alpha \quad (13)$$

$$A_2 + \frac{B_2}{R_2^2} = \beta \quad (14)$$

$$(A_2 - A_1)R_1^2 + (B_2 - B_1) = \gamma \quad (15)$$

$$A_1 + pA_2 = \eta \quad (16)$$

donde las constantes α , β , γ , η y p dependen del perfil térmico, de las constantes elásticas y de las dimensiones de la capa cilíndrica en la forma siguiente:

$$\alpha = K_1 \frac{1}{R_o^2} I(R_o), \quad \beta = K_2 \frac{1}{R_2^2} I(R_2), \quad \gamma = (K_2 - K_1) I(R_1) \quad (17)$$

$$\eta = \frac{K_1 [I(R_1) - I(R_o)] + K_2 [I(R_2) - I(R_1)] - \frac{T_{ex}}{2} (R_2^2 - R_o^2)}{v_1 (R_1^2 - R_o^2)} \quad (18)$$

$$p = \frac{v_2 (R_2^2 - R_1^2)}{v_1 (R_1^2 - R_o^2)} \quad (19)$$

De (13) y (14), se expresa la diferencia $B_2 - B_1$ en función de A_2 y A_1 . De (16), se expresa el valor de A_1 en función de A_2 . Introduciendo todo ello en (15), se obtiene un valor para A_2 :

$$A_2 = \frac{1}{(x_1^2 - 1) + p(x_1^2 - x_o^2)} \left[\frac{\gamma}{R_2^2} + (\alpha x_o^2 - \beta) + \eta(x_1^2 - x_o^2) \right] \quad (20)$$

El resultado se ha expresado en función de la *coordenada radial reducida*, definida por $x = r/R_2$, de forma que $x_o = R_o/R_2$ y $x_1 = R_1/R_2$. Una vez conocido el valor de A_2 , es fácil conocer el resto de las incógnitas:

$$A_1 = \eta - pA_2, \quad B_2 = (\beta - A_2)R_2^2, \quad B_1 = (\alpha - A_1)R_2^2 x_o^2 \quad (21)$$

donde, esta vez

$$\eta = \frac{K_1[I(x_1)-I(x_o)] + K_2[I(x_2)-I(x_1)] - \frac{T_{ax}}{2}(1-x_o^2)}{\nu_1(x_1^2-x_o^2)}, \quad p = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \frac{1-x_1^2}{x_1^2-x_o^2} \quad (22)$$

Una vez conocidas las constantes, y usando la coordenada radial relativa, las tensiones radiales toman una expresión muy simple:

- *Tensión radial en metal:*

$$\sigma_r^1(x) = -K_1 \frac{1}{x^2} I(x) + A_1 \left[1 - \frac{x_o^2}{x^2} \right] + \alpha \frac{x_o^2}{x^2} \quad (23)$$

- *Tensión en vidrio:*

$$\sigma_r^2(x) = \frac{[\beta - K_2 I(x)]}{x^2} + A_2 \left[1 - \frac{1}{x^2} \right] \quad (24)$$

Las tensiones circular y axial de cada zona se obtienen fácilmente a partir de (5) y (8).

Tensiones radiales en coronas cilíndricas

Una vez obtenidas las tensiones radiales para capas cilíndricas formadas por dos materiales distintos, vamos a estudiar el comportamiento cuantitativo y cualitativo de la tensión *para capas cilíndricas de distintos tamaños y para distintos valores de la tensión axial externa*.

El valor de la tensión dependerá de los valores de los módulos de Young, E_i , de los coeficientes de Poisson, ν_i y de los coeficientes de dilatación, α_i , de cada material. Se toman los siguientes valores (Zhukov, 1995 (2)):

- Metal:

$$E_1 = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \quad \nu_1 = 0.33, \quad \alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$$

- Vidrio:

$$E_2 = 7.5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad \nu_2 = 0.30, \quad \alpha_2 = 0.5 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$$

Nótese la diferencia de los coeficientes de dilatación: el metal se dilata mucho más que el vidrio. Se ofrece su valor en $(\text{°C})^{-1}$, por ser estas unidades las habitualmente encontradas en la bibliografía (Handbook, 1986). Las temperaturas consideradas en el perfil térmico han sido $T_1 = 1300 \text{ K}$ y $T_2 = 300 \text{ K}$.

Vamos a denominar ρ a la cantidad que cuantifica la relación entre los tamaños de la capa de vidrio:

$$\rho = \frac{R_1}{R_2} = x_1 \quad (25)$$

Se ha tomado un radio máximo $R_2 = 10 \mu\text{m}$. El radio interno reducido de cada capa cilíndrica se denota por x_0 .

La figura 3 muestra el valor de la tensión radial para varios tamaños de la capa cilíndrica y de la capa de vidrio y para tensión axial exterior nula. Las tensiones son del orden de 500 MPa (más altas que en los hilos convencionales). Las curvas son continuas, los puntos se han pintado para diferenciar mejor los diferentes casos.

La figura 3a muestra la tensión radial en MPa para $x_0 = 0.2$ y distintos valores de $\rho = 0.5, 0.7$ y 0.9 . El valor más alto de tensión se alcanza en la frontera de separación entre el vidrio y el metal. Parece importante recalcar que se alcanza una tensión máxima tanto más alta cuanto mayor es el tamaño de la capa de vidrio.

La figura 3b muestra el valor de la tensión radial para un valor $\rho = 0.5$, para dos capas cilíndricas con distintos radios internos. La tensión máxima es tanto mayor cuanto más pequeño es el radio interno de la capa, es decir, cuanto mayor sea el tamaño total de la capa.

Para estudiar la influencia de la tensión externa de fabricación, T_{ex} , vamos a considerar una capa cilíndrica muy grande, de radio interno reducido $x_0 = 0.01$. La figura 4 muestra los resultados obtenidos para distintos valores de tensión externa y tamaños de la capa de vidrio respecto del metal. Las tensiones son muy altas, del orden de 15000 MPa.

La figura 4a muestra la tensión radial para dos valores distintos de ρ (0.5 y 0.6) y tensión axial externa nula. En ambos casos el comportamiento cualitativo es similar: la tensión en el metal permanece casi constante para caer bruscamente en la superficie interna de la capa cilíndrica ($x = 0.01$). En la parte correspondiente al vidrio, la tensión disminuye suavemente hasta tomar un valor nulo en la superficie externa de la capa cilíndrica ($x = 1$). El valor máximo de la tensión es más alto cuanto mayor es el tamaño de la capa de vidrio.

La figura 4b muestra la tensión radial para distintos valores de ρ (0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9) cuando la tensión axial externa es de 20 MPa. Se observa la misma tendencia que en el caso de la figura 4a, pero los valores máximos de las tensiones son algo más bajos que en el caso de tensión nula.

Si la tensión axial externa se incrementa mucho, el comportamiento cambia cuantitativa y cualitativamente. La figura 4c muestra la tensión radial cuando la tensión axial externa de fabricación es de 200 MPa. El valor de la tensión radial máxima es menor que en los casos anteriores (es del orden de 8000 MPa), y se encuentra que la tensión mayor es la correspondiente al caso en que la capa de vidrio menor (en los casos de tensión axial externa de 20 MPa se encontraba un comportamiento opuesto a éste).

Como se ve, el valor de la tensión axial de fabricación es importante a la hora de determinar las tensiones residuales en el microhilo. La figura 5a muestra la tensión radial en una capa cilíndrica de radio interno $x_0 = 0.01$ y con un tamaño de la capa de vidrio dado por $\rho = 0.5$, para distintos valores de la tensión axial externa ($T_{ex} = 0, 20 \text{ MPa}, 100 \text{ MPa}, 200 \text{ MPa}, 250 \text{ MPa}$ y 300 MPa). La forma de la curva $\sigma_r(x)$ apenas varía con la tensión externa: la tensión radial es casi constante en la

parte metálica (se anula en la superficie interna de la capa cilíndrica) y disminuye suavemente en la parte del vidrio para alcanzar un valor nulo en la superficie externa de la capa. Por el contrario, lo que si cambia con la tensión externa es el valor de la tensión radial máxima: pasa de aproximadamente 15000 MPa para $T_{ex}=0$, a ser prácticamente nulo cuando $T_{ex}= 250$ MPa, e *incluso cambiar de signo* y tomar el valor de -2500 MPa (la tensión radial sería ahora de compresión) cuando $T_{ex}= 300$ MPa.

¿Cómo saber cuál es la tensión axial externa correcta? Para elucidar el valor adecuado, hay que tener en cuenta un hecho experimental descrito anteriormente: el campo coercitivo es tanto mayor cuanto más grande es la capa de vidrio. Si suponemos que este campo está relacionado con el valor de la magnitud de las tensiones internas, *un aumento del campo coercitivo debe estar relacionado con un incremento de las tensiones internas*. La figura 4b muestra que para tensiones externas de 20 MPa, el comportamiento es el adecuado: a mayor tamaño de la capa de vidrio, más alto es el valor de la tensión radial. Cuando la tensión axial externa es *del orden de 200 MPa el comportamiento ya no es el correcto* (la tensión radial es mayor cuanto menor es la capa de vidrio). Por otro lado, la figura 5b muestra que para tensiones externas del orden de 300 MPa, la tensión radial en el microhilo puede llegar a ser de compresión, lo que produciría un eje fácil perpendicular a la dirección radial y la imanación tendería a formar ángulos nulos con el eje del microhilo, lo cual está en contra de las observaciones experimentales, que sugieren una estructura de dominios semejante a la de los hilos convencionales ricos en hierro. Podemos concluir, que la *tensión externa real* que se aplica a los microhilos en su proceso de fabricación, y que es difícil de medir directamente, debe tener un valor comprendido entre los 100 MPa y los 200 MPa, para que se generen microhilos con las características observadas y que tengan unas tensiones internas del orden de 10^3 MPa.

¶ No obstante todas estas consideraciones, los cálculos que hemos efectuado anteriormente son meramente orientativos ya que *se ha considerado únicamente una capa cilíndrica*, y el proceso de solidificación de los microhilos debe involucrar un proceso similar al descrito para los hilos convencionales: enfriamiento en capas sucesivas, comenzando por las más externas. Para poner de manifiesto la diferencia que se obtendría con capas de distinto tamaño, la figura 5b ofrece las tensiones radiales para dos capas cilíndricas cuyos radios internos con $x_0= 0.01$ y $x_0= 0.3$, cuando la tensión externa es de 20 MPa y la relación de tamaños entre la capa de metal y vidrio es $\rho= 0.5$. Si la capa cilíndrica es menor, la tensión radial en el metal tiene un valor máximo menor y ya no es constante. Se concluye que capas de distintos tamaños contribuyen de forma diferente tanto cuantitativa como cualitativamente.

Tensiones totales en microhilos

El proceso de solidificación por capas dará lugar a la formación del microhilo, cuya configuración final se muestra en la figura 6.

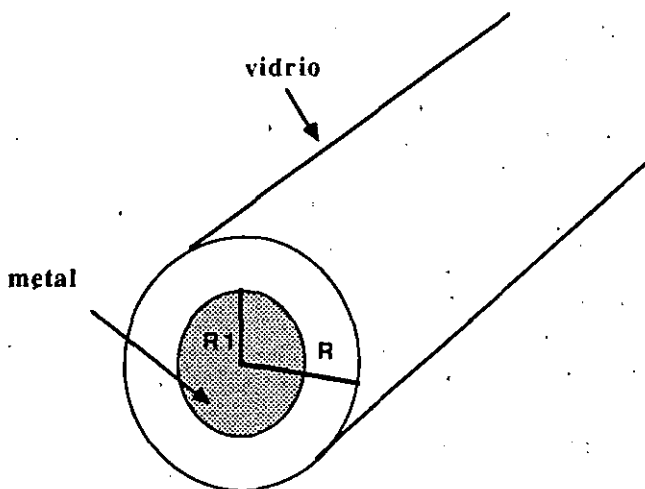


Figura 6 -. Microhilo. (R: radio total , R1: radio de parte metálica)

Para calcular las tensiones totales en los microhilos a partir de la contribución de cada capa, vamos a considerar un proceso de integración similar al descrito para el caso de los hilos convencionales. El cálculo es del tipo:

$$\sigma_r(x) = \int_0^x \sigma_r^*(x, \epsilon) d\epsilon \quad (26)$$

donde $\sigma_r^*(x, \epsilon)$ representa la tensión radial en una capa cilíndrica de radio interno ϵ , en el punto de coordenada radial x .

Las integrales se calculan numéricamente. Mediante este proceso se obtiene el valor de la *tensión radial total*. Una vez obtenida ésta, y a partir de ecuación de equilibrio interno, (expresión (3)) se obtiene la tensión circular σ_θ , y de ésta y la radial se obtiene la azimutal, mediante una expresión del tipo mostrado en (6).

La figura 7 muestra las tensiones totales radial, circular y axial para el caso de un hilo de 10 μm de radio, con tensión axial exterior nula y para dos tamaños diferentes de la capa de vidrio: $\rho = 0.5$ y $\rho = 0.7$. Dada la dificultad del cálculo numérico, que involucra resolver una integral doble, se han obtenido únicamente 21 puntos.

La figura 7a muestra la tensión radial, que decrece de forma prácticamente lineal en la parte metálica del microhilo. Se encuentra que la tensión radial en la parte metálica correspondiente al hilo con capa de vidrio mayor presenta valores superiores (en la parte metálica común, es decir, para $x < 0.5$) a los ofrecidos por el microhilo con capa de vidrio más pequeña. No obstante, se encuentra que el valor máximo de tensión radial, alcanzado en la frontera de separación metal-vidrio, es más alto

para el caso en que $\rho = 0.7$, que para $\rho = 0.5$.

Esto parece contradecir el hecho experimental anteriormente citado referente al valor del campo coercitivo en función del tamaño de la capa de vidrio, y que se verificaba perfectamente para una única capa cilíndrica.

La contradicción es tan sólo aparente si se tiene en cuenta que el valor del *campo coercitivo depende también de las dimensiones de la parte metálica*. Como se verá en una sección posterior, el campo coercitivo es inversamente proporcional al radio de la parte magnética (metal). Intuitivamente puede entenderse de la siguiente forma: considérese, por ejemplo, un hilo convencional, de una determinada longitud y diámetro, y por consiguiente con un factor desimanador dado. Si aumenta el diámetro del hilo, desde el punto de vista del factor desimanador, es como si su longitud fuese más pequeña (aumentará el factor desimanador) y el campo coercitivo se hará más pequeño.

Si aplicamos lo anterior al resultado obtenido en microhilos, podemos entender que aunque la tensión máxima para $\rho = 0.7$ sea mayor que para $\rho = 0.5$ (y el campo coercitivo debería ser mayor también en un caso que en el otro), el efecto compensador del tamaño reduce el valor del campo coercitivo para los hilos con capa de vidrio pequeña. Obviamente, las consideraciones del efecto del campo desimanador y del tamaño de la parte metálica, sólo tiene sentido hacerlas en hilos completos y no en capas cilíndricas, a efectos de comparación con los datos experimentales.

La **figura 7b** muestra el valor de la tensión circular, σ_r , para el caso de la figura 7a. Es positiva en la parte metálica: tiene un valor nulo en el eje del microhilo ($x=0$), aumenta alcanzando un valor máximo y disminuye hasta anularse en las cercanías de la frontera de separación metal-vidrio. En la parte del vidrio toma valores negativos, alcanzando un valor máximo para anularse en la superficie externa del microhilo. Para el caso en que $\rho = 0.7$, la tensión circular vuelve a cambiar de signo y hacerse positivas cerca de la superficie del microhilo. La tensión axial σ_z , muestra un comportamiento similar tal y como muestra la **figura 7c**.

La **figura 8** muestra las tensiones totales para el caso en que la tensión axial externa es de 100 MPa. La tensión radial (**figura 8a**) ofrece un cambio cualitativo respecto al caso de la figura 6c, y es que la tensión más alta es la correspondiente al microhilo con capa de vidrio menor. La tensión radial para $\sigma = 0.5$ incluso cambia de signo en las cercanías de la superficie del microhilo (en la parte del vidrio). El comportamiento de la tensión circular (**figura 8b**) y axial (**figura 8c**) es similar al descrito en las figuras 7b y 7c, con la diferencia de que ahora las tensiones de tracción mayores son las correspondientes a $\rho = 0.7$. La magnitud de las tensiones ha disminuido respecto del caso en que la tensión axial externa es nula (figura 7). Esta figura pone de manifiesto un hecho importante: el valor de la tensión axial externa de fabricación, T_{ex} , determina la magnitud de las tensiones internas en el microhilo.

La **figura 9** muestra la superposición de las tres tensiones para el caso en que $\rho = 0.5$ y distintos valores de la tensión axial externa: $T_{ex} = 0$ (**figura 9a**), $T_{ex} = 250$ MPa (**figura 9b**) y $T_{ex} = 275$ MPa (**figura 9c**). La figura 9a corresponde al caso en que $T_{ex} = 0$. La tensión más alta es la circular, que llega a tomar valores del orden de 10^4 MPa, siendo positiva (tracción) en la parte metálica del microhilo, al igual que las tensiones radial y axial. Si $T_{ex} = 250$ MPa, el carácter de las tensiones se invierte (**figura 9b**). Ahora las tres son negativas (compresión) siendo dominante la circular. Su valor máximo no supera los 5000 MPa. Para $T_{ex} = 275$ MPa (**figura 9c**), la tensión dominante sigue siendo la circular. Su valor máximo supera los 5000 MPa y continua siendo negativa, al igual que la radial y la axial. En general se comprueba que, en valor absoluto, la tensión más alta es la circular y la menor la radial. Todas las tensiones alcanzan sus valores máximos cerca de la frontera metal-vidrio aislante. El signo de la tensión y, por tanto, su carácter de tracción o

compresión es controlado por la tensión externa de fabricación. En la parte del vidrio aislante las tensiones tienen signo opuesto al que exhiben en el metal. Se anulan en la superficie externa del microhilo.

Estructura de dominios en microhilos

A la luz de la distribución de tensiones anterior, puede entreverse una estructura de dominios. Para hilos con constante de magnetostricción positiva, la imanación tenderá a disponerse paralelamente a la dirección de la tensión más alta. Hay que tener en cuenta también la *anisotropía de forma*, que tenderá a disponer la imanación en aquellas direcciones en que el campo desimanador sea menor.

En las zonas próximas al eje del hilo, las tensiones aumentan más o menos linealmente con x , coordenada radial reducida, desde un valor nulo en el eje del hilo.

Como se sabe, los microhilos de magnetostricción positiva muestran una remanencia axial muy alta. Esta característica puede ser explicada por cualquiera de las distribuciones de tensiones que aparecen en las figuras 9b y 9c. Una tensión compresiva circular predominante fuerza a la imanación a disponerse perpendicularmente a ella, concretamente en la dirección axial, ya que ésta es la que exhibe un factor desimanador más pequeño. Encontraremos microhilos prácticamente saturados axialmente. Si la constante de magnetostricción es negativa, la imanación sería circular por lo que no aparecería biestabilidad, y dada la magnitud de las tensiones la señal magnética axial sería pequeña. Esto coincide con los resultados experimentales.

Cuando se analizó la relación entre T_{ex} , ρ y el valor de la tensión radial se concluyó que el valor adecuado de T_{ex} debía ser del orden de 200 MPa. Los resultados de la figura 9 parecen corroborar esta afirmación, ya que una tensión externa pequeña o nula propicia una distribución de tensiones que no es consistente con la estructura de dominios real.

Como conclusión, se puede decir que los microhilos presentan unas tensiones internas que exhiben unas peculiaridades directamente relacionadas con la presencia de dos materiales distintos. La tensión radial es continua en la frontera de separación de los dos materiales, para que se verifique la condición de equilibrio mecánico. En la citada frontera esta tensión alcanza su valor máximo y cambia bruscamente su pendiente, por lo que la tensión circular, relacionada con el valor de la tensión radial y de la derivada espacial de ésta, presentará los valores más altos, incluso mayores que la tensión axial, que era la predominante en los hilos convencionales. En el caso de los microhilos, ésta última tensión, que depende de la suma de las tensiones radial y circular, del perfil térmico (ver expresión (6)) y de las *constantes elásticas de los dos materiales*, no es la predominante.

La anisotropía de forma desempeña un papel importante en la formación de la estructura de dominios, al igual que la tensión axial de fabricación, cuya magnitud determina en gran medida el valor de las anisotropías magnetoelásticas de origen térmico.

Figura 3 -. a) Tensión radial en capas cilíndricas para diferentes tamaños de la capa de vidrio e igual tamaño total. b) Tensión radial para capas cilíndricas de distinto tamaño total e igual tamaño relativo de la capa de vidrio.

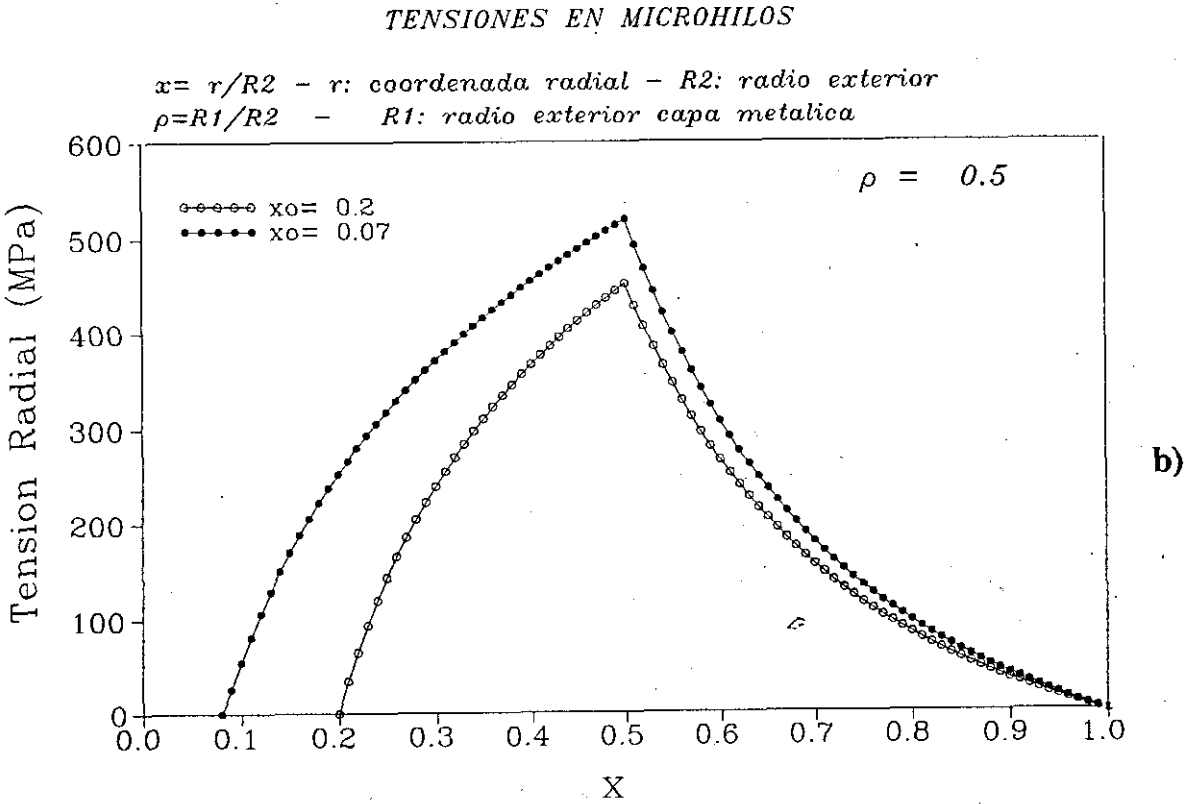
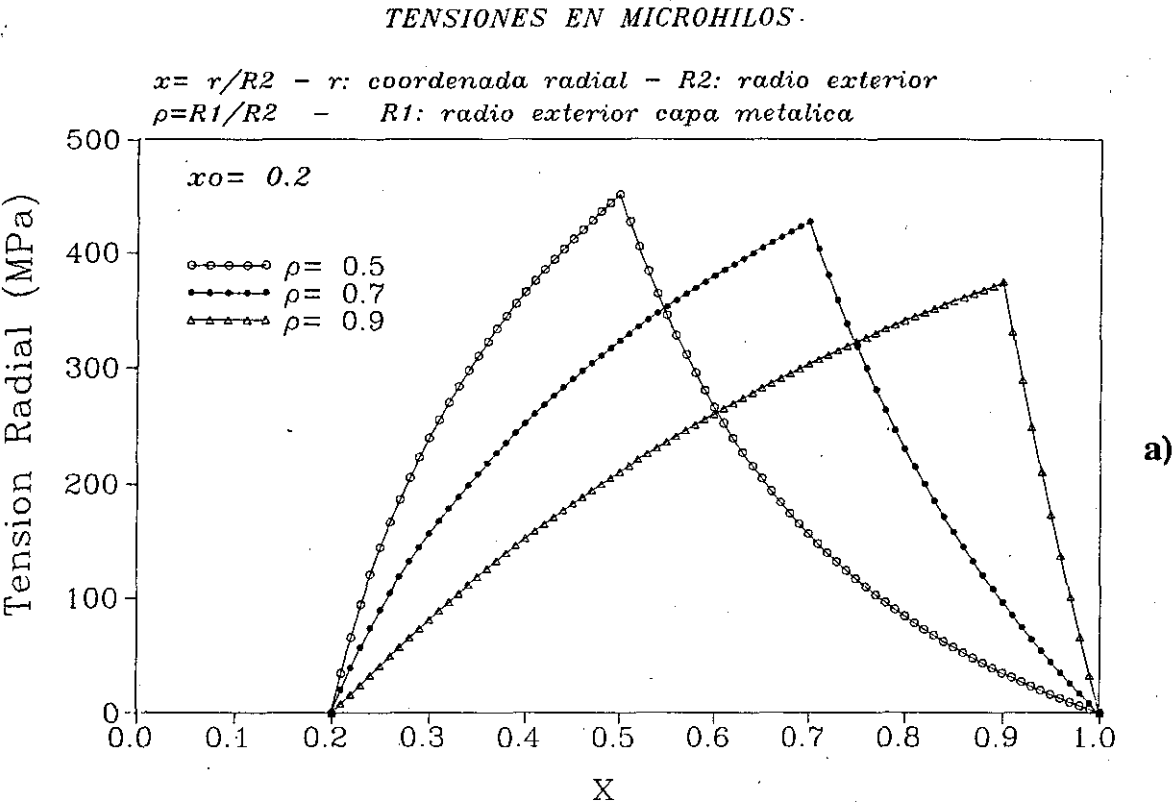


Figura 4 -. Tensión radial en capa cilíndrica para distintos tamaños de la capa de vidrio y tensiones externas de fabricación: a) $T_{ex} = 0$, b) $T_{ex} = 20$ MPa, c) $T_{ex} = 200$ MPa

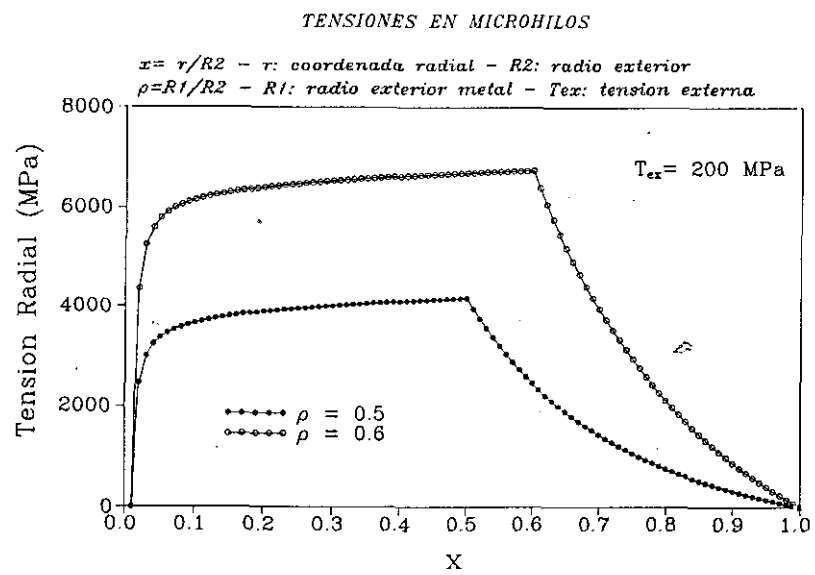
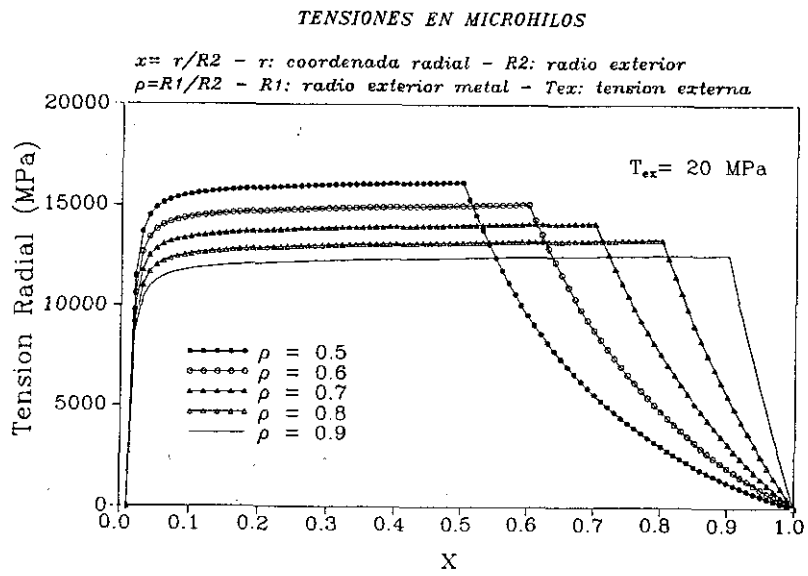
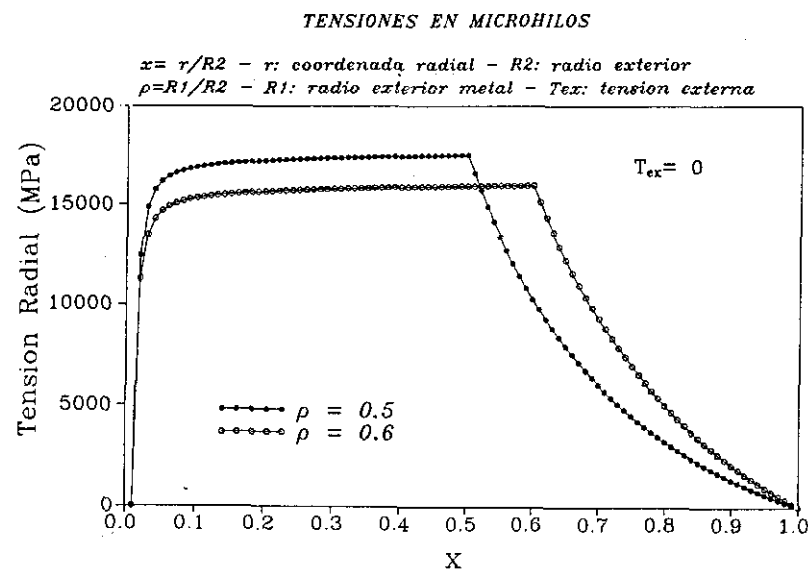
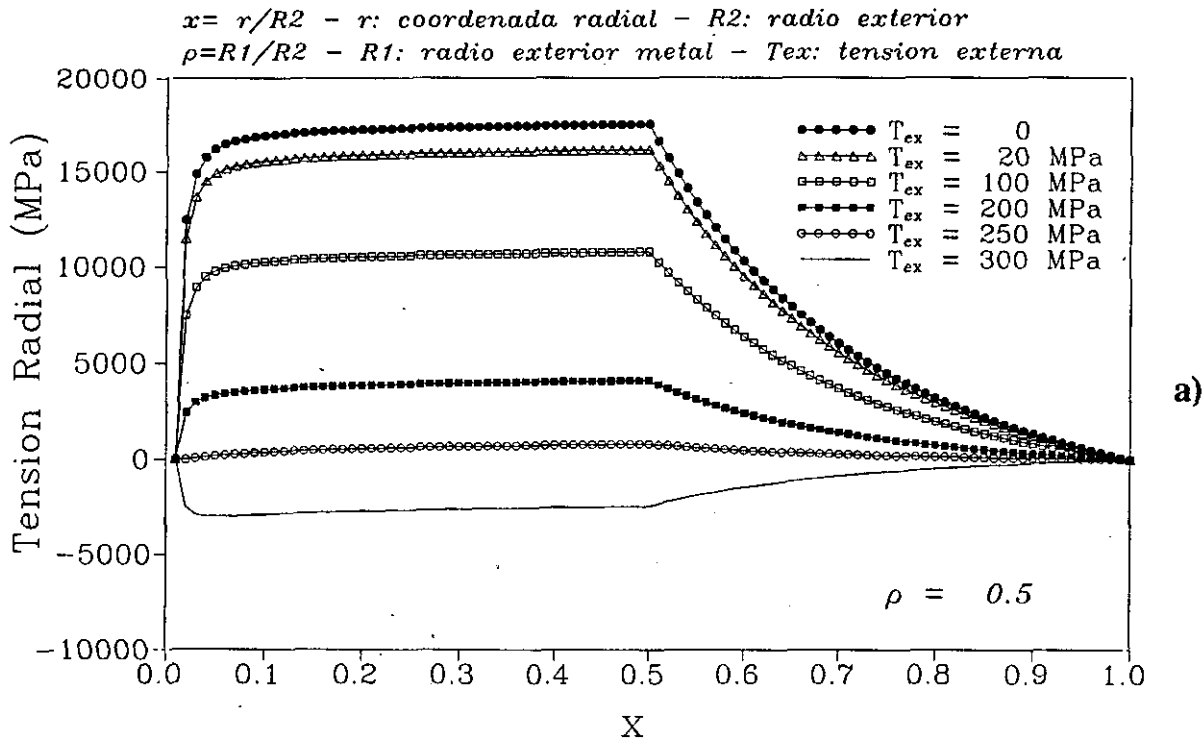
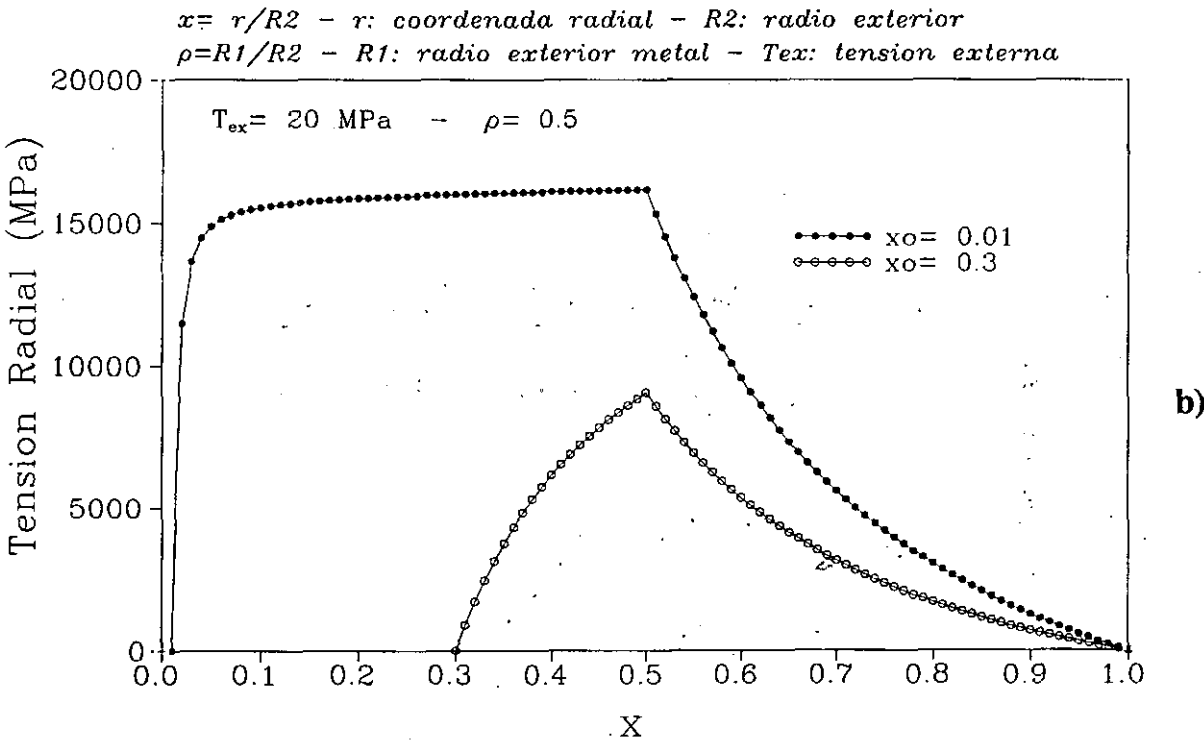


Figura 5 -. a) Tensión radial para diferentes tensiones externas.
 b) Tensión radial para capas de distintos tamaños e igual tensión axial exterior.

TENSIONES EN MICROHILOS

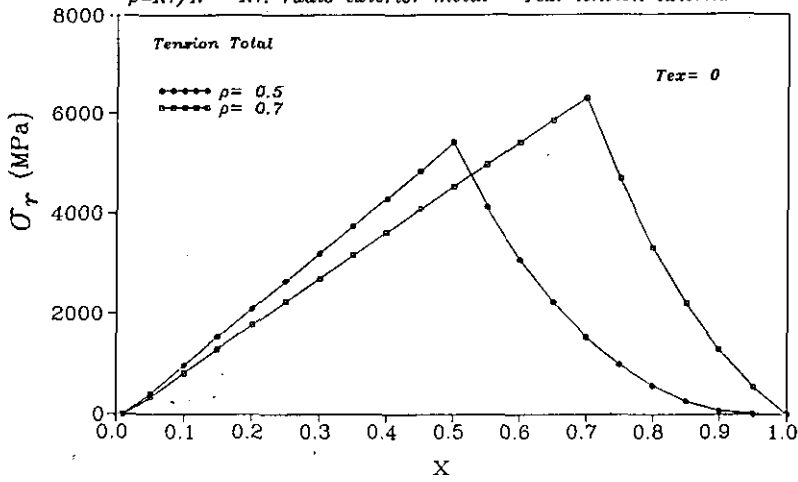


TENSIONES EN MICROHILOS



TENSIONES EN MICROHILOS - RADIAL

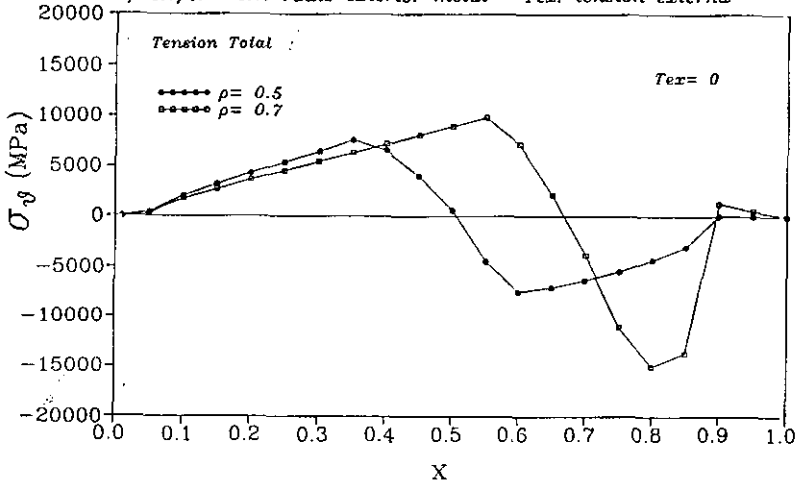
$x = r/R$ - r : coordenada radial - R : radio total microhilo
 $\rho = R1/R$ - $R1$: radio exterior metal - T_{ex} : tension externa



a)

TENSIONES EN MICROHILOS - CIRCULAR

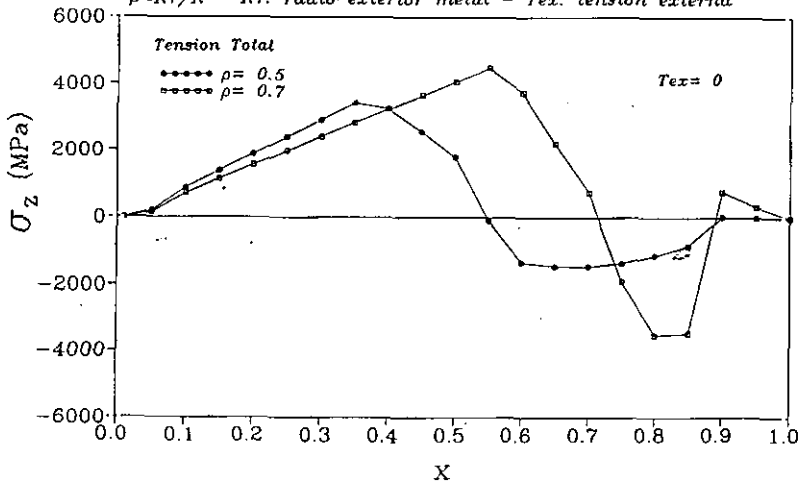
$x = r/R$ - r : coordenada radial - R : radio total microhilo
 $\rho = R1/R$ - $R1$: radio exterior metal - T_{ex} : tension externa



b)

TENSIONES EN MICROHILOS - AXIAL

$x = r/R$ - r : coordenada radial - R : radio total microhilo
 $\rho = R1/R$ - $R1$: radio exterior metal - T_{ex} : tension externa



c)

Figura 8 -. Tensión total en microhilo, para tensión externa de 100 MPa. a) radial, b) circular, c) axial.

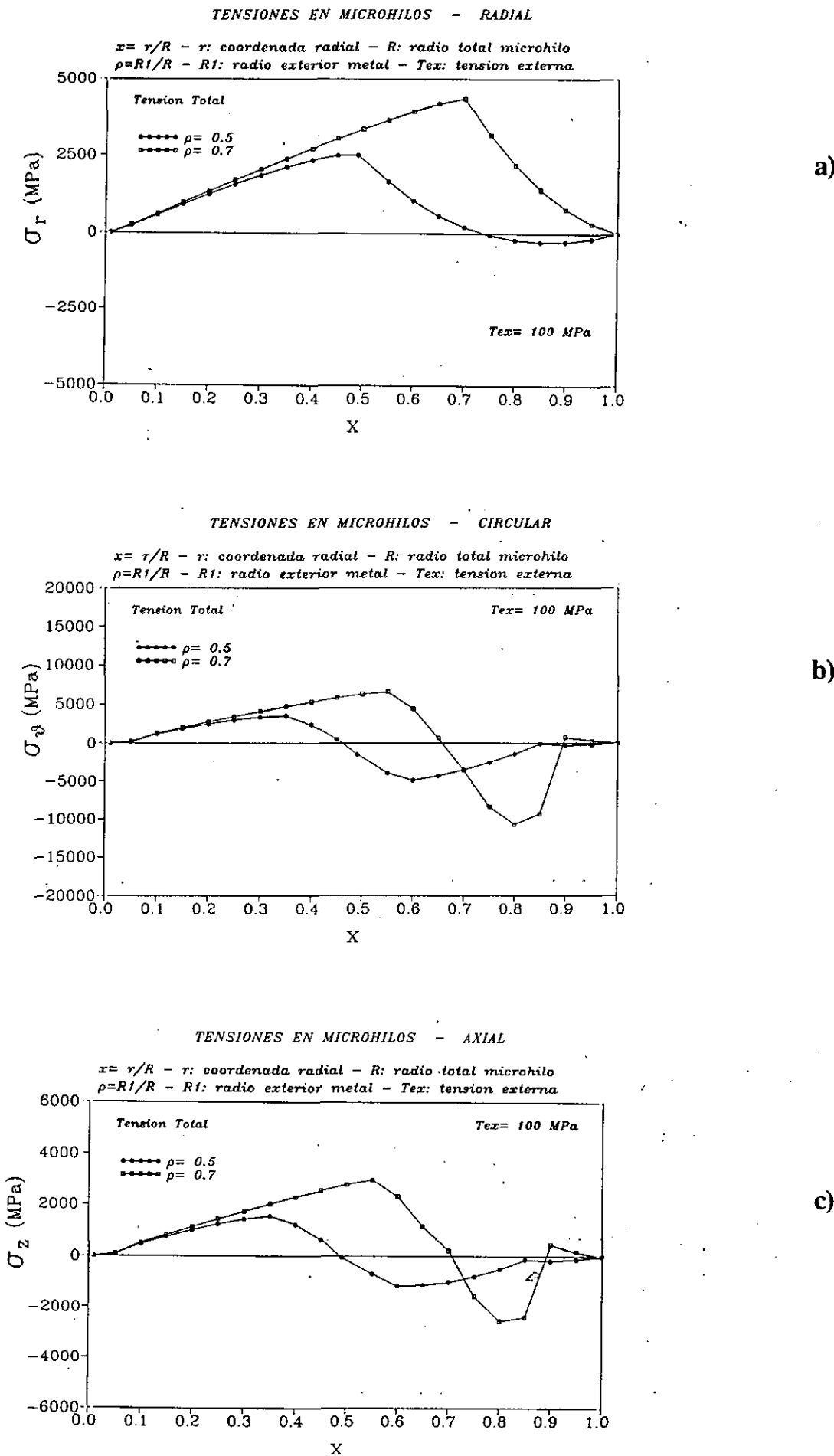
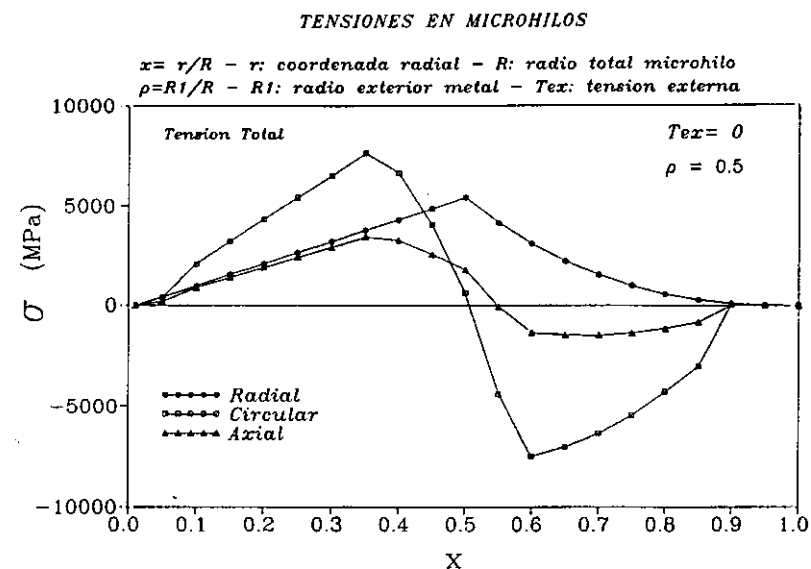
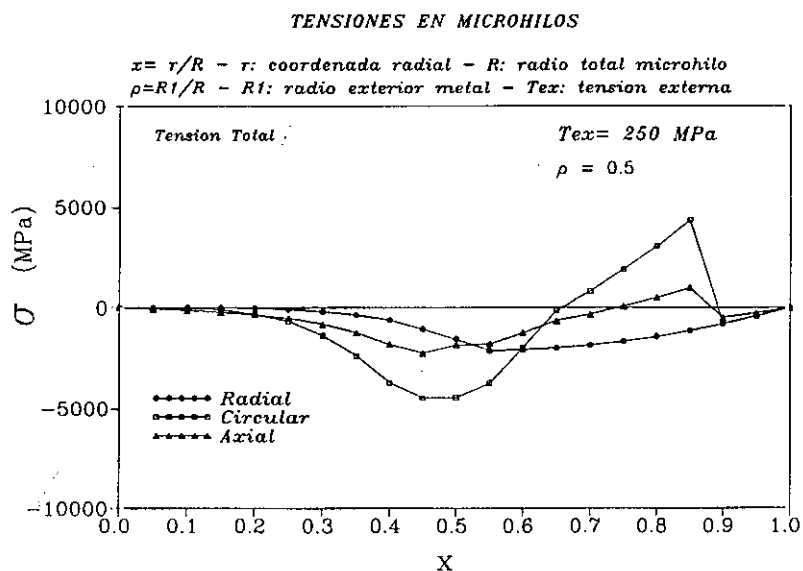


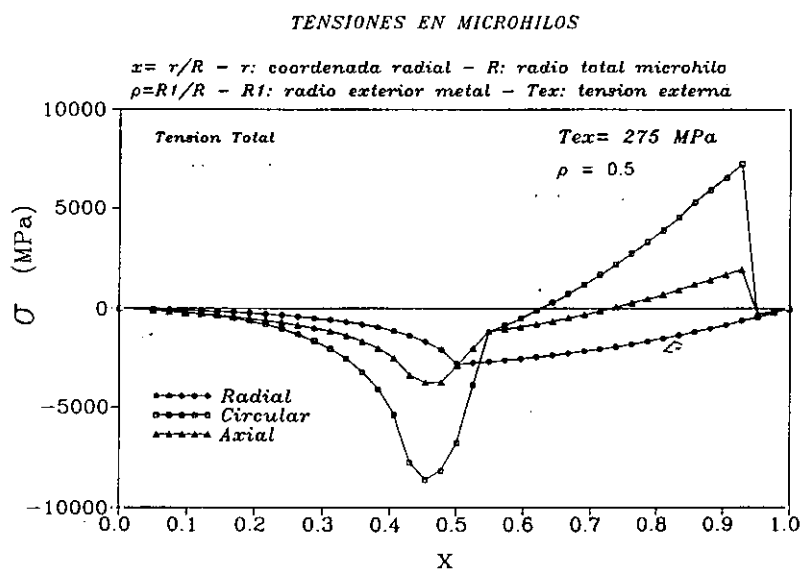
Figura 9 - Tensiones totales en microhilo, para $\rho = 0.5$ y diferentes tensiones axiales externas de fabricación: a) $T_{ax} = 0$, b) $T_{ax} = 250$ MPa, c) $T_{ax} = 275$ MPa.



a)



b)



c)

FLEXION EN HILOS Y GRADIENTE TERMICO REAL

En las secciones anteriores se ha determinado la expresión de las tensiones internas generadas durante el proceso de fabricación en hilos convencionales y en microhilos. Para ello se ha usado la teoría de la elasticidad aplicada a sistemas cilíndricos con simetría de revolución en torno a su eje, es decir, que todas las cantidades dependen únicamente de la coordenada cilíndrica radial. Una de esas cantidades es el perfil de temperatura.

Si se tiene en cuenta el proceso de solidificación de hilos amorfos, asumir un perfil térmico de ese tipo implica aceptar que el flujo de calor que emite el material fundido al solidificarse es *simétrico en torno al eje*, es decir, cada capa cilíndrica que solidifica *lo hace al mismo tiempo en todo su perímetro*.

Una observación experimental

Si esta simetría se produjese realmente, las tensiones que se derivan la deberían reflejar y el hilo *debería ser recto*.

Cuando se corta un trozo de hilo amorfo as-cast, se aprecia claramente una *curvatura*. Adquiere la misma forma que si un hilo perfectamente recto *se somete a una flexión*. Una flexión implica la *aparición de tensiones que no son radialmente simétricas*. Si se atribuye la curvatura intrínseca observada en los hilos amorfos, a unas tensiones de flexión intrínsecas generadas durante el proceso de fabricación, hay que pensar que el *gradiente térmico real no es radialmente simétrico*.

¿Tiene sentido pensar en un gradiente no simétrico? Lo tiene si se piensa en el proceso de fabricación (*in-rotating water quenching technique*): cuando la masa de material fundido llega al agua, no toda ella entra en contacto con el líquido al mismo tiempo, por lo que es posible, que aunque la tensión superficial dote a la masa metálica fundida de una forma cilíndrica, alguna parte del perímetro del cilindro esté solidificando cuando otra no ha empezado aún.

Si se recuece el hilo, al elevar la temperatura se relajan esas tensiones de flexión y adquieren una forma perfectamente recta.

En los microhilos, también se aprecia una curvatura similar, aunque de menor magnitud.

Pérdida y recuperación de biestabilidad por flexión

Existe un hecho experimental, sin duda relacionado con la presencia de esas tensiones de flexión intrínsecas, que consiste en la pérdida del carácter biestable del ciclo de histéresis de hilos amorfos ricos en hierro cuando se someten a una flexión exterior (Vázquez, 1994) de radio de curvatura menor de 11 cm. La biestabilidad vuelve a recuperarse si el radio de curvatura es muy pequeño, menor de 2.5 cm.

Para tratar de entender el origen de este comportamiento, vamos a estudiar las tensiones que aparecen en un hilo amorfo cuando se ve sometido a una flexión caracterizada por un valor dado del radio de curvatura.

Tensiones derivadas de la flexión

Para estudiar las tensiones que aparecen al flexionar un hilo, vamos a considerar el siguiente sistema: un cilindro, de radio a se sitúa sobre un plano. El cilindro tiene un modulo de Young E y un coeficiente de Poisson ν . El sistema de referencia (en coordenadas cilíndricas) que se va a utilizar tiene el eje z perpendicular al plano y los ejes r y θ contenidos en él. Se somete al cilindro a un par de fuerzas, de momento M , hasta que el cilindro se flexiona adquiriendo un radio de curvatura R_c . La figura 1 muestra un esquema del cilindro (figura 1a) y del sistema de referencia.

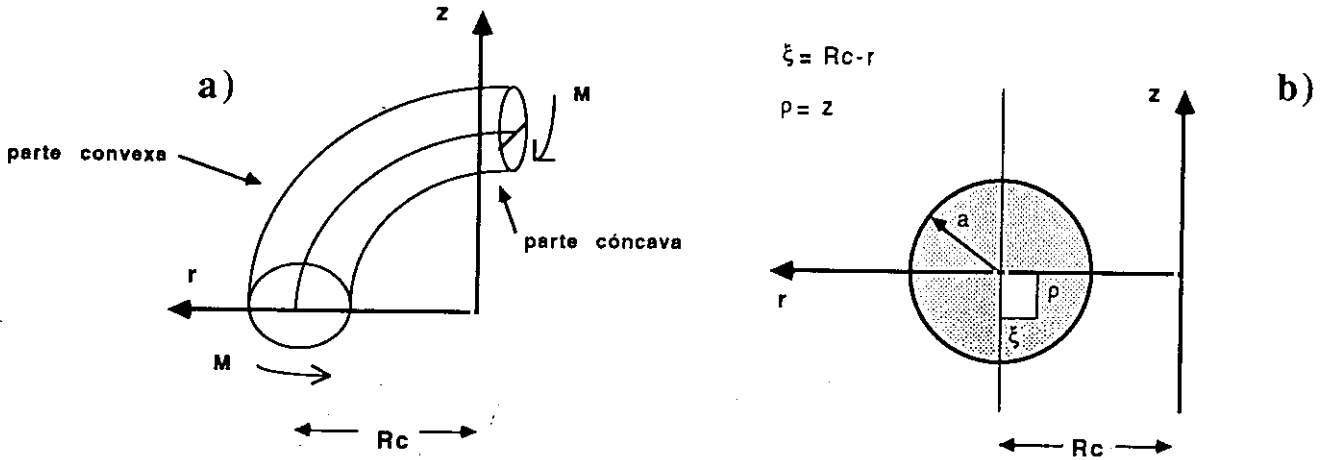


Figura 1 -. Sistema de referencia

Se produce una deformación simétrica respecto del eje z . Por simetría, las tensiones tangenciales $\tau_{r\theta}$ y $\tau_{\theta z}$ son nulas (Timoshenko, 1968), por lo que las únicas componentes del tensor de tensiones son las diagonales y la tensión tangencial τ_{rz} . Para calcular su valor, se hace uso de las ecuaciones de equilibrio interno y de las ecuaciones de compatibilidad, descritas en una sección anterior. Para simplificar su expresión, se refieren a un sistema de referencia centrado en el propio hilo (figura 1b). La coordenada $\xi = R_c - r$ determina la distancia horizontal de un punto del hilo a su eje, y la coordenada $\rho = z$ determina la distancia vertical de ese punto al eje del hilo. Las tensiones que aparecen son las siguientes:

$$\sigma_{\xi} = \frac{cE}{16R_c(1+\nu)} \{ (7+6\nu)(\xi^2 - a^2) + (5+2\nu)\rho^2 \} \quad (1)$$

$$\sigma_{\rho} = -\frac{cE(1+2\nu)}{16R_c(1+\nu)} \{ 3\xi^2 + \rho^2 - a^2 \} \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta} = -cE \left(-\xi + \frac{(8+10\nu+4\nu^2)\xi^2 - (6\nu+4\nu^2)\rho^2 - (2+\nu)a^2}{8(1+\nu)R_c} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{\xi\rho} = \frac{cE(1+2\nu)}{8R_c(1+\nu)} \xi \rho \quad (4)$$

donde

$$c = \frac{4M}{\pi a^4 E} \quad (5)$$

Estas tensiones actúan en diferentes direcciones y sobre distintos planos:

i) la tensión σ_{ξ} actúa en la dirección del radio de curvatura y sobre planos perpendiculares este radio y al plano horizontal sobre el que reposa el hilo.

ii) la tensión σ_{ρ} actúa en dirección del eje z y sobre planos paralelos al que se encuentra el hilo.

iii) σ_{θ} tiene una *dirección paralela al eje del hilo y actúa sobre la sección transversal del hilo*.

iv) la tensión tangencial $\tau_{\xi\rho}$ actúa sobre planos paralelos al eje z y su dirección es también paralela al eje z.

Las tensiones dependen del radio de curvatura R_c presentan una proporcionalidad con el momento torsor M. No obstante, debe existir una relación entre estas dos magnitudes, dado que para un material con características elásticas dadas, para alcanzar un determinado radio de curvatura habrá que aplicar el momento torsor necesario. Para encontrar el orden de magnitud de este momento vamos a realizar una aproximación: en la teoría elemental de la flexión (Timoshenko, 1968), la única componente del tensor de tensiones es σ_{θ} , cuyo valor es:

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{R_c} \xi \quad (6)$$

Representa la fuerza normal que actúa sobre la sección del hilo. El momento que genera esta fuerza, integrando en toda la sección del hilo debe ser igual al momento torsor exterior aplicado. Su valor es:

$$M = \iint \xi dF = \iint \xi \sigma_{\theta} dS = \frac{E}{R_c} \iint \xi^2 dS = 2\pi \frac{E}{R_c} \int_0^a \xi^2 d\xi = \frac{\pi E a^4}{2R_c} \quad (7)$$

Es decir, para conseguir un determinado radio de curvatura el momento torsor debe tener el valor dado en (7), que depende del módulo de Young del cilindro y de la cuarta potencia de su radio.

Introduciendo el valor del momento en (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

$$\sigma_x(x,z) = \frac{E a^2}{8 R_c^2 (1+\nu)} [(7+6\nu)(x^2-1) + (5+2\nu)z^2] \quad (8)$$

$$\sigma_z(x,z) = -\frac{(1+2\nu) E a^2}{8 R_c^2 (1+\nu)} [3x^2 + z^2 - 1] \quad (9)$$

$$\sigma_\theta(x,z) = - \left\{ \frac{x}{a} + \frac{(8+10\nu+4\nu^2)x^2 - (6\nu+4\nu^2)z^2 - (2+\nu)}{8(1+\nu)R_c} \right\} \frac{2 E a^2}{R_c} \quad (10)$$

$$\sigma_{xz}(x,z) = \frac{E a^2}{8 R_c^2} \frac{1+2\nu}{1+\nu} z x \quad (11)$$

donde las coordenadas x, z están normalizadas con el radio del hilo, a :

$$x = \frac{\xi}{a} \quad z = \frac{\rho}{a} \quad (12)$$

La figura 2 representa el sistema de referencia centrado en el hilo, considerando las nuevas coordenadas.

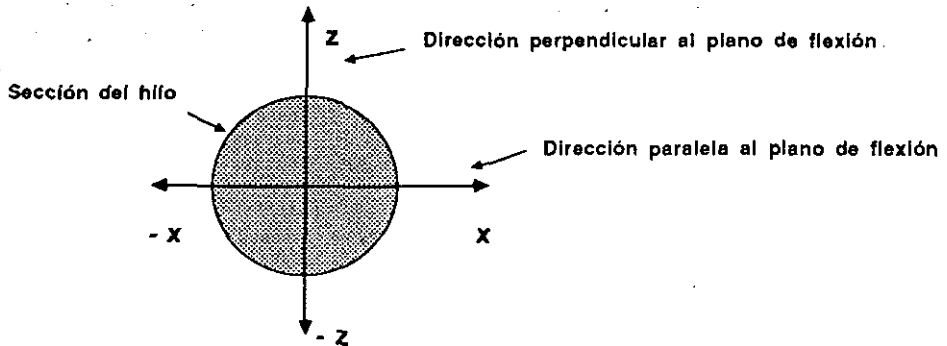


Figura 2 -. Sistema de referencia en coordenadas normalizadas

Ordenes de magnitud de las tensiones

Vamos a determinar el orden de magnitud de las tensiones para el caso de un hilo amorfo. Para ello, se consideran los siguientes parámetros:

- Módulo de Young $\rightarrow E = 1.52 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- Coeficiente de Poisson $\rightarrow \nu = 0.33$
- Radio del hilo $\rightarrow a = 50 \text{ }\mu\text{m}$
- Radio de curvatura $\rightarrow R_c = 5 \text{ cm}$

Las tensiones dependen de dos variables, x y z . Para poder visualizar mejor su dependencia vamos a fijar una de ellas y a variar la otra. Se toma $z=0$, es decir, se está considerando la variación de las tensiones en la dirección del eje x (ver figura 2). El eje z es perpendicular al plano sobre el que se apoya el hilo flexionado.

La figura 3a muestra la variación de la tensión σ_θ (cuya dirección es paralela al eje del hilo). Se aprecia que varía de forma prácticamente lineal con la coordenada x , siendo positiva (es decir, de tracción) en la parte convexa del hilo flexionado y es negativa (de compresión) en su parte cóncava; la tensión se anula en el eje del hilo (el cual se conoce con el nombre de *fibra neutra*). La tensión máxima, que se alcanza en la superficie del hilo, es del orden de 500 MPa.

La figura 3b muestra el valor de las otras tensiones. La tensión tangencial σ_{xz} es nula (ya que su valor es proporcional a la coordenada z , según la expresión (11), y estamos considerando la posición $z=0$). La tensión σ_z tiene una forma parabólica, siendo de tracción en las cercanías de la fibra neutra y de compresión cerca de la superficie del hilo. No se anula en la fibra neutra. La tensión σ_x es siempre negativa, alcanza su valor más alto en la fibra neutra y se anula en la superficie. El orden de magnitud de estas tensiones es de 10^2 MPa.

Si comparamos el valor máximo de la tensión σ_θ con el de las otras tres, se comprueba que es órdenes de magnitud mayor que el de σ_x , σ_z y τ_{xz} . Las tensiones *únicamente son comparables en las cercanías del eje del hilo* (fibra neutra), que es donde la tensión σ_θ toma valores muy pequeños.

Finalmente, la figura 3c muestra como varía la tensión σ_θ máxima (que se alcanza en la superficie del hilo) para diferentes radios de curvatura y dos radios de hilo distintos. La tensión aumenta mucho para radios de curvatura pequeños y es tanto más grande cuanto mayor sea el radio del hilo. Para radios de curvatura del orden de 2.5 cm, toman valores del orden de 1000 MPa.

Se aprecia la misma tendencia para valores de la coordenada z no nulos.

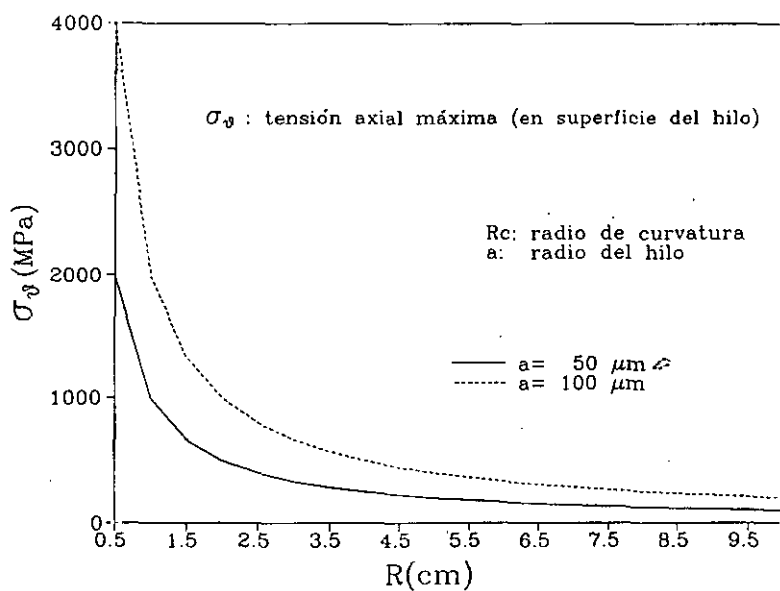
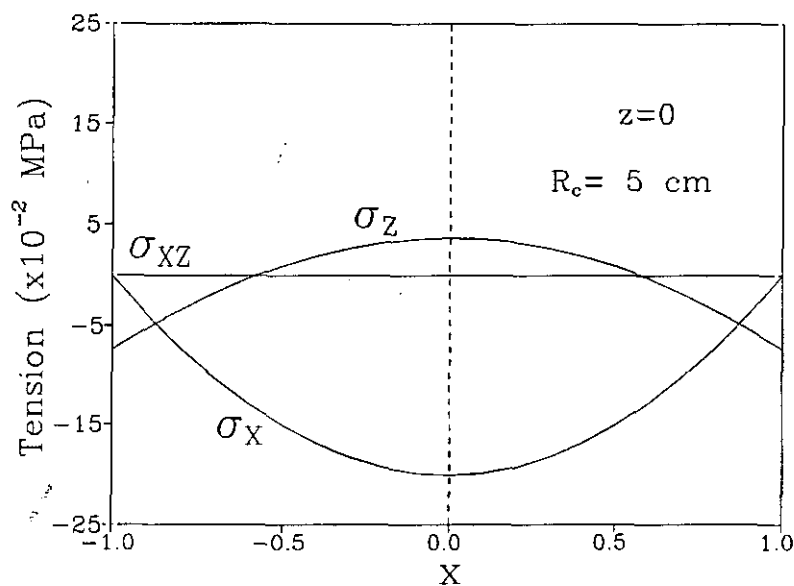
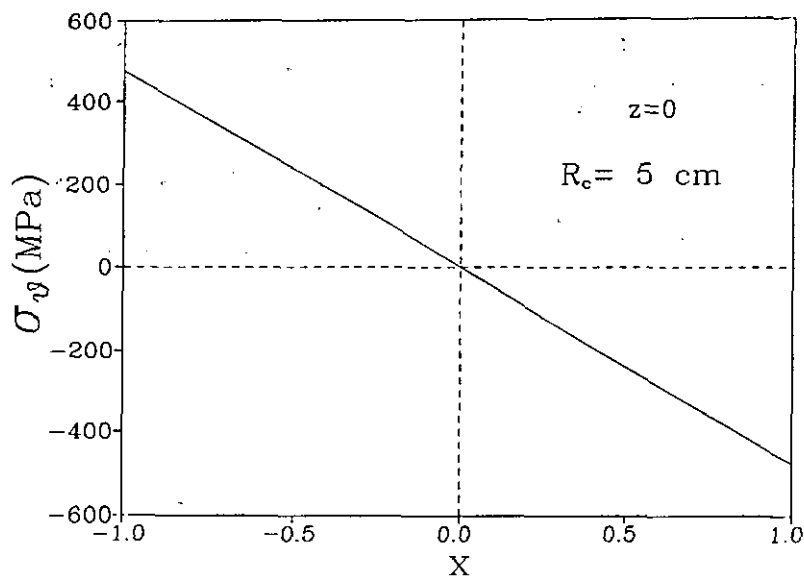
¿ Por qué varía el carácter biestable del ciclo de histéresis ?

Teniendo en cuenta la distribución de tensiones que aparecen cuando el hilo es flexionado, se puede pensar que la desaparición y posterior reaparición de la biestabilidad en los ciclos de histéresis de los hilos amorfos ricos en hierro de alta magnetostricción, está relacionada con la variación de la forma del dominio interno, en el que la imanación está dirigida paralelamente al eje del hilo, ya que la inversión de la imanación en este dominio es la responsable del salto Barkhausen (Vázquez, 1994).

Cuando se somete al hilo a una flexión, la mitad de su sección está sometida a una tracción y la otra mitad a una compresión, por lo que aparecerá un eje de anisotropía paralelo al eje del hilo

en la zona de tracción (zona convexa del hilo), y un eje de anisotropia perpendicular al eje del hilo en la zona de compresión. Dado que *la magnitud de las tensiones son comparables a las del propio hilo*, las densidades de energía magnetoelástica introducidas también lo son, por lo que podrán alterar la posición de la imanación. Teniendo esto en cuenta, se puede pensar que para radios de curvatura pequeños (menores de 11 cm) el dominio axial queda destruido, por lo que desaparecería la biestabilidad. Si se sigue disminuyendo el radio de curvatura, las tensiones de flexión aumentan mucho, creando en la parte convexa del hilo un eje de anisotropia paralelo al eje del hilo, y que da lugar a la formación de un dominio que propicia la reaparición de la biestabilidad.

Figura 3 -. a) dependencia de σ_y con la coordenada x para $z=0$; b) dependencia de σ_x , σ_z y τ_{xz} con la coordenada x para $z=0$; c) dependencia del valor máximo de σ_y con el radio de curvatura.



III - TENSIONES INTERNAS Y ESTRUCTURA DE DOMINIOS. CICLOS DE HISTERESIS

TENSIONES INTERNAS Y ESTRUCTURA DE DOMINIOS

Introducción

En la formación de la estructura de dominios de materiales ferromagnéticos contribuyen varios tipos de energías, entre las cuales se cuenta la *magnetoelástica* y la de *canje*. En muestras de tamaño finito, hay que considerar también el efecto de los extremos y de las superficies de la muestra, que dan lugar a la aparición de polos magnéticos y a la *energía magnetostática* correspondiente.

Los hilos amorfos, fabricados por enfriamiento ultrarrápido, presentan unas *tensiones internas*, consecuencia del proceso de fabricación, que son la fuente de la *anisotropía magnetoelástica*, determinante de la estructura de dominios y, en consecuencia, del comportamiento magnético del material.

En un capítulo anterior se ha calculado la *distribución de tensiones internas*, generadas en el proceso de enfriamiento, haciendo uso de la Teoría de la Elasticidad. Una distribución quiere decir que la tensión no es homogénea, esto es, varía de un punto a otro. En pro de la simplicidad, se ha considerado la siguiente aproximación: la tensión en cada punto, depende únicamente de la distancia de ese punto al eje del hilo, es decir, la distribución de tensión se puede representar por una función matemática del tipo $\sigma(x)$, que representa la tensión σ en el *punto de coordenada radial reducida* x (donde $x=r/R$, siendo r la coordenada cilíndrica radial y R el radio del hilo). De $\sigma(x)$ es fácil obtener la *distribución de anisotropías* $K(x)$, a partir de la constante de magnetostricción λ , según la expresión:

$$K(x) = \frac{3}{2} \lambda \sigma(x) \quad (1)$$

Influencia de la distribución de anisotropía en la estructura de dominios

Para estudiar cómo afecta la distribución de anisotropías a la estructura de dominios, vamos a considerar muestras de longitud infinita a fin de poder despreciar los efectos desimadores provenientes de la presencia de polos. Consideremos el siguiente esquema: una imanación M_i en el punto x_i forma un ángulo θ_i con el eje del hilo. La *figura 1* muestra el esquema para dos posiciones distintas. El dominio de variación de la variable x va desde cero, que representa el eje del hilo, hasta $x=1$, valor alcanzado en la superficie. En ángulo θ_i dependerá de la energía de canje y magnetoelástica. Veamos cómo contribuyen cada una de ellas por separado. En la discusión que sigue se supone que $\lambda > 0$.

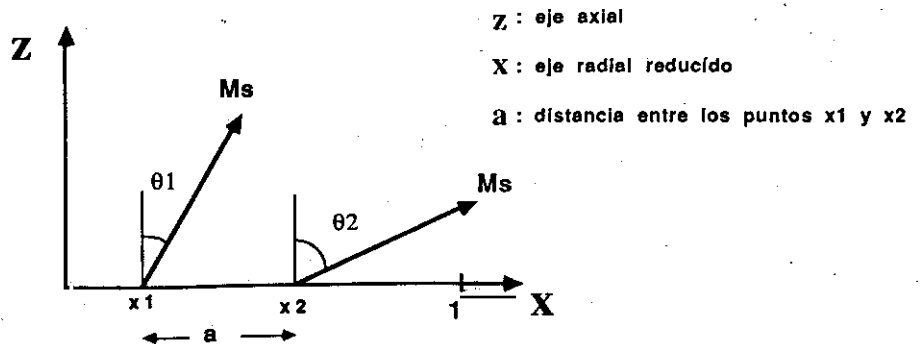


Figura 1 -. Variación de la orientación de la imanación

Energía magnetoelástica

Sea $\alpha(x)$ el ángulo que forma la imanación con el eje de anisotropía, y $\sigma(x)$ la tensión, evaluadas ambas magnitudes en el punto x . La densidad de energía magnetoelástica viene dada por la expresión:

$$D_{me}(x) = K(x) \sin^2 \alpha(x) = \frac{3}{2} \lambda \sigma(x) \sin^2 \alpha(x) \quad (2)$$

La posición de la imanación respecto de la dirección de la tensión (dada por α) debe optimizar $D_{me}(x)$, esto es, tiene que minimizar su valor. La condición necesaria de mínimo verifica:

$$\frac{\partial D_{me}}{\partial \alpha} = \frac{3}{2} \lambda \sigma \sin 2\alpha = 0 \quad (3)$$

condición que se cumple si $\sin 2\alpha_0 = 0 \rightarrow \alpha_0 = n \pi/2$ (n entero). Los extremos deben verificar la condición de mínimo:

$$\frac{\partial^2 D_{me}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 3 \lambda \sigma \cos 2\alpha_0 > 0 \quad (4)$$

La situación de equilibrio *dependerá del signo de la tensión*. Los mínimos se encuentran en las siguientes condiciones:

- $\sigma > 0$ (tensión de tracción) $\rightarrow \alpha_0 = 0, \pi$
- $\sigma < 0$ (tensión de compresión) $\rightarrow \alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$

Es decir, para el caso de *anisotropía uniaxial* que nos ocupa, la imanación se dispone paralelamente a la tensión (si $\lambda > 0$) para $\sigma > 0$, y perpendicular si $\sigma < 0$. Para $\lambda < 0$, la situación se invierte.

¿ Qué ocurre si se tienen varias anisotropías uniaxiales perpendiculares entre sí ?

Supongase que una de ellas, K_z , va dirigida paralela al eje z y la otra, K_x , paralela al eje x . Sea θ el ángulo que forma la imanación con el eje z . La densidad de energía magnetoelástica queda entonces:

$$D_{me} = K_z \sin^2 \theta + K_x \sin^2 (90 - \theta) = K_z \sin^2 \theta + K_x \cos^2 \theta = K_x + (K_z - K_x) \sin^2 \theta \quad (5)$$

Haciendo uso de la relación trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se ha encontrado que dos anisotropías mutuamente perpendiculares equivalen a una uniaxial cuya magnitud es la diferencia de las dos de partida. El análisis de los extremos y mínimos permite afirmar que para K_x, K_z positivos la imanación se dispone paralelamente a la anisotropía mayor

El resultado para tres anisotropías uniaxiales mutuamente perpendiculares es idéntico, pero el análisis se complica ya que la densidad de energía depende de *dos ángulos*:

$$D_{me}(\beta, \theta) = K_x \sin^2 \alpha + K_y \sin^2 \beta + K_z \sin^2 \theta = 2K_x + (K_y - K_x) \sin^2 \beta + (K_z - K_x) \sin^2 \theta \quad (6)$$

donde se ha hecho uso de la relación trigonométrica $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, siendo α , β y γ los ángulos que forma la imanación con los ejes de anisotropía K_x , K_y , K_z , respectivamente. El análisis de mínimo de la función $D_{mc}(\alpha, \beta)$ es más complejo, ya que involucra el cálculo de la *matriz hessiana* (cuyas componentes son las diferentes derivadas parciales de D_{mc}). Si el determinante de esta matriz y la derivada $\partial^2 D_{mc} / \partial \theta^2$ son positivos en el punto (θ_0, β_0) en que se anulan las derivadas primeras, ese punto es un mínimo (Apostol, 1980). Se obtiene que para K_x , K_y , K_z positivos, *la imanación se dispone paralelamente al eje de anisotropía mayor*.

Energía de canje

La energía de canje fuerza a los momentos magnéticos a permanecer paralelos los unos a los otros. La energía de dos momentos magnéticos vecinos es:

$$E_c = -2Js^2 \cos\phi \quad (7)$$

siendo s el espin de cada átomo, J la integral de canje y ϕ el ángulo que forman los dos momentos magnéticos (ver figura 1). La energía será mínima cuando ϕ sea nulo (para J positiva, como ocurre en ferromagnetismo). El ángulo ϕ puede relacionarse con θ_1 y θ_2 a través de la variación espacial del ángulo de imanación θ . La relación es la siguiente:

$$\theta_2 = \theta_1 + \phi = \theta_1 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)a^* \quad (8)$$

siendo $a^* (= a \cdot R)$ la distancia entre los puntos de coordenada radial $r_1 = x_1 \cdot R$, $r_2 = x_2 \cdot R$

Si los átomos portadores de momento magnético son próximos vecinos, ϕ será muy pequeño, por lo que, de (7), se tiene:

$$E_c = -2Js^2 \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) = E_c^0 + Js^2 \phi^2 \quad (9)$$

Tomando el origen de energías en E_c^0 , se tiene que:

$$E_c = Js^2 \phi^2 \quad (10)$$

Dado que a representa la distancia interatómica, dividiendo E_c entre a^3 , se obtiene la *densidad de energía de canje*:

$$D_c = \frac{E_c}{a^3} = \frac{Js^2}{a} \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 = A \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 \quad (11)$$

De (11) se aprecia que D_c se minimizará cuando $\partial\theta/\partial r = 0$, es decir, cuando los momentos magnéticos vecinos estén paralelos. El valor de $A = Js^2/a$.

Energía total en el hilo

Teniendo en cuenta la contribución de la energía magnetoelástica y la de canje, la densidad de energía total será:

$$D = A \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{3}{2} \lambda \sigma(r) \sin^2(\bar{M}, \bar{\sigma}) \quad (12)$$

donde r representa la coordenada radial cilíndrica y $(\bar{M}, \bar{\sigma})$ el ángulo formado entre la imanación y el eje de anisotropía propiciado por la tensión σ . Si $\theta(r)$ es el ángulo que forma la imanación con el eje z (ver figura 1) y $\alpha(r)$ es que forma el eje de anisotropía con el citado eje, entonces se tiene que $(\bar{M}, \bar{\sigma}) = \theta(r) - \alpha(r)$.

La densidad de energía D presenta dos contribuciones opuestas: la magnetoelástica, que impele a la imanación (que es el momento magnético total por unidad de volumen) a seguir la dirección del eje de anisotropía (para magnetostricción positiva), y la de canje, que fuerza a mantener el paralelismo entre los momentos magnéticos. La distribución de imanación, dada por $\theta(r)$, dependerá de las magnitudes relativas de A y $\lambda \cdot \sigma$. Se puede obtener una *distribución continua* de la imanación a partir de la energía total del hilo.

Distribución continua de imanación

La energía total, para un hilo de radio R y longitud L , viene dada por:

$$E = \iiint_{\text{hilo}} D dV = 2\pi \int_0^L \int_0^R dr r D[\theta(r)] \quad (13)$$

siendo D la densidad de energía dada en (12) y $dV = 2\pi dr dz$ un elemento diferencial de volumen. La situación de equilibrio se alcanzará para aquella distribución de ángulos de imanación que minimice la energía dada en (13), es decir, que haga mínimo el siguiente *funcional*:

$$e(\theta) = \int_0^R dr r D[\theta(r), \theta'(r)] = \int_0^R dr r f(r, \theta, \theta') \quad (14)$$

donde $f = r \cdot D$. Nos encontramos ante un problema de *cálculo variacional*.

Si recordamos el modelo de hilo amorfo de magnetostricción positiva, en el que la imanación en el dominio central es paralela al eje del hilo, y tiene dirección radial en el dominio externo, se pueden considerar las siguientes *condiciones de contorno*:

$$\theta(r=0) = 0 \quad \theta(r=R) = \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

La condición necesaria pero no suficiente para que $e(\theta)$ sea mínima descansa en el cumplimiento de la *ecuación de Euler* (Ross, 1981) por parte del integrando de (14):

$$\frac{d}{dr} f_{\theta'} - f_{\theta} = 0 \quad (16)$$

donde f_θ y $f_{\theta'}$ denotan las derivadas parciales $\partial f/\partial\theta$ y $\partial f/\partial\theta'$, respectivamente. Aplicando la ecuación de Euler al integrando, cuyo valor es:

$$f(r, \theta, \theta') = A r \theta'^2 + \frac{3}{2} \lambda \sigma(r) \sin^2[\theta(r) - \alpha(r)] \quad (17)$$

se obtiene:

$$\theta''(r) + \frac{\theta'(r)}{r} - \frac{3\lambda}{4A} \sigma(r) \sin 2[\theta(r) - \alpha(r)] = 0 \quad (18)$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden queda perfectamente determinada por las condiciones de contorno dadas en (15), y dependerá de la cantidad $3 \cdot \lambda \cdot \sigma(r)/4 \cdot A$, y del ángulo $\alpha(r)$ que forma el eje de anisotropía con el eje del hilo.

Análisis de la estructura de dominios

La estructura de dominios, esto es, la función $\theta(r)$ que representa el ángulo de la imanación con el eje del hilo, quedará determinada por la magnitud de las tensiones internas $\sigma(r)$ y por la orientación de los ejes de anisotropía que aquellas inducen. Si únicamente tenemos en cuenta la influencia de la energía magnetoelástica, la estructura de dominios de los hilos amorfos puede entenderse mediante el concurso de anisotropías uniaxiales, y puede hacerse de dos formas. Para concretar, definamos con precisión la estructura de dominios típica de hilos amorfos (de $\lambda > 0$):

- *Dominio interno* -. Situado en la zona $0 < r < r_0$, con $r_0 = 0.7 \cdot R$, donde R es el radio del hilo. La imanación es paralela al eje del hilo.
- *Dominio externo* -. Situado en la zona $r_0 < r < R$. La imanación es perpendicular al eje del hilo.

La distribución de anisotropía que propicia esta estructura puede entenderse de dos formas, según el signo de $\sigma(r)$ y del ángulo de anisotropía $\alpha(r)$ (ver figura 2).

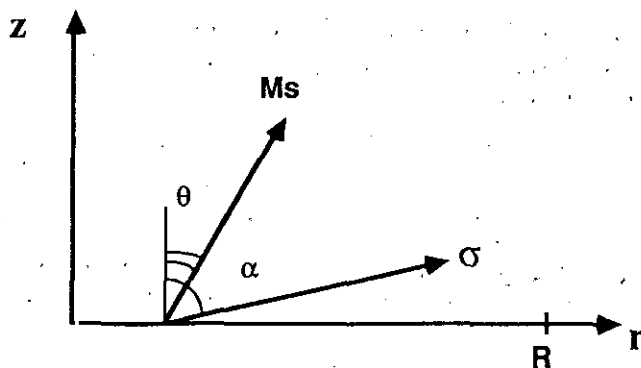


Figura 2 -. Distribución de imanación y tensión.

i) Una anisotropía axial con signo diferente en cada dominio

- En dominio interno \rightarrow a) ángulo de anisotropía, $\alpha(r)=0$
b) tensión, $\sigma(r)>0$
- En dominio externo \rightarrow a) $\alpha(r)=0$
b) $\sigma(r)<0$

ii) Dos anisotropías uniaxiales de igual signo y diferente orientación en cada dominio

- En dominio interno \rightarrow a) $\alpha(r)=0$
b) $\sigma(r)>0$
- En dominio externo \rightarrow a) $\alpha(r)=\pi/2$
b) $\sigma(r)>0$

Si sólo se considerase la energía magnetoelástica, la estructura de dominios es muy sencilla:

- Dominio interno $\rightarrow \theta(r)=0$
- Dominio externo $\rightarrow \theta(r)=\pi/2$

Habría un cambio brusco del ángulo de imanación en la frontera de separación de los dominios. Si se tiene en cuenta la energía de canje, esta variación tendría que ser más lenta. Si se multiplican ambos miembros de (18) por $d\theta$ y se integra, se obtiene que *la densidad de energía magnetoelástica y la de canje son iguales en cada punto r , es decir, la rotación del momento magnético será tanto más rápida cuanto mayor sea el valor de la anisotropía.*

La ecuación diferencial (18) permite obtener la distribución de la imanación una vez conocida la distribución de las tensiones internas, esto es, el valor de la tensión $\sigma(r)$ en cada punto del hilo. Formulaciones semejantes han sido utilizadas para estudiar la influencia de tensiones y torsiones sobre cintas amorfas (Hernando, 1980) y para analizar la estructura magnética de películas delgadas con anisotropía perpendicular a su superficie (Aharoni, 1993).

Valores macroscópicos

Las propiedades magnéticas medidas en un material como, por ejemplo, la magnetostricción en cintas amorfas (Sánchez, 1992), no dependerán únicamente de los valores máximos y mínimos de las tensiones, sino de su distribución. A partir de la función $\theta(r)$, obtenida al resolver (18), es posible calcular las magnitudes que se miden experimentalmente, macroscópicas, mediante un promedio en el hilo. Por ejemplo, la *remanencia reducida axial*, m_r , o valor de la imanación axial (según el eje z) a campo axial nulo, vendrá dada por:

$$m_r = \left\langle \frac{M_z}{M_s} \right\rangle = \left\langle \frac{M_s \cos \theta(r)}{M_s} \right\rangle = \frac{\iiint \cos \theta(r) dV}{\iiint dV} = \frac{2}{R^2} \int_0^R dr r \cos \theta(r) \quad (19)$$

siendo M_s la imanación de saturación y que, utilizando la coordenada radial reducida $x=r/R$, queda:

$$m_r = 2 \int_0^1 dx x \cos \theta(x) \quad (20)$$

El cálculo del valor medio de otras magnitudes, $f(x)$, involucra una expresión semejante a la dada en (20).

Influencia de la distribución de tensiones en el ángulo de imanación $\theta(x)$

Vamos a analizar con casos concretos, cómo varía la función $\theta(x)$ (con $x=r/R$, coordenada radial reducida, con lo que su dominio es $0 < x < 1$) según la distribución de tensiones $\sigma(x)$.

La ecuación diferencial (18) se resuelve numéricamente, teniendo en cuenta las condiciones de contorno $\theta(x=0)=0$ y $\theta(x=1)=\pi/2$. La solución se obtiene mediante aproximaciones sucesivas partiendo de poligonales que verifican las condiciones de contorno (Burden, 1985). Las integrales se resuelven por el método de Simpson.

Vamos a considerar anisotropias uniaxiales en la dirección del eje del hilo, positivas en el dominio interno y negativas en el externo. Se toma $A = 10^{11} \text{ Jm}^{-1}$ (Chikazumi, 1964), $R = 60 \text{ } \mu\text{m}$ y $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$.

La figura 3a muestra tres distribuciones de tensiones internas distintas: una lineal, otra cuadrática y otra de grado cuarto en x (ésta última es semejante en su forma a la tensión axial encontrada en el proceso de enfriamiento de hilos amorfos). El orden de magnitud de las tensiones es de 10^4 Pa . El cambio de signo se efectúa en un entorno de $x_0=0.7$.

La figura 3b muestra el ángulo $\theta(x)$ obtenido para cada una de estas tensiones. Cada función $\sigma(x)$ ofrece un resultado $\theta(x)$, poniendo de manifiesto la importancia de cada distribución particular. La transición más suave de la imanación la ofrece la tensión de grado cuarto y la menos suave, la cuadrática. Se ofrece también el resultado de la remanencia reducida $\langle \cos \theta(r) \rangle$, que es mayor para la tensión de grado cuarto, resultado lógico si se tiene en cuenta que la zona donde es positiva esta tensión es mayor que la de las otras dos; entre estas últimas, la remanencia es mayor para la cuadrática que para la lineal (nótese que ambas se anulan en el mismo punto, pero su *magnitud* es diferente, y ello influye en una propiedad macroscópica como es la remanencia).

La figura 3c muestra la influencia de la magnitud de las tensiones en el ángulo de imanación. Se ha considerado la tensión cuadrática para $\sigma_0 = 10^3 \text{ Pa}$ y $\sigma_0 = 10^4 \text{ Pa}$, siendo σ_0 su valor máximo. Cuanto mayor es σ_0 , menos suave es la transición de $\theta(x)$, más se parece a la función escalón que se obtendría de no mediar la energía de canje. En los hilos amorfos, las tensiones son del orden de 10^8 Pa , por lo que hay que esperar una transición brusca (se diría que el ancho de la pared es menor), no tan gradual como los casos mostrados en la figura 3c.

Ciclos de histéresis teóricos

Hasta ahora se ha visto la influencia de la distribución de tensiones en la imanación, para campos aplicados nulos. ¿Cómo reacciona la imanación frente a campos externos según cada $\sigma(x)$ particular? Es decir, ¿cómo influye la distribución de tensiones internas en los ciclos de histéresis? Para tratar de estudiarlo, vamos a calcular los ciclos de histéresis haciendo uso de un modelo de rotación de la imanación. El modelo es obviamente limitado ya que no tiene en cuenta procesos de imanación por nucleación y desanclaje de paredes, ni los efectos derivados de la presencia de pérdidas magnéticas por presencia de corrientes de Foucault.

Para estudiar la dependencia mencionada arriba, vamos a calcular los diferentes ciclos de histéresis que se pueden obtener en hilos amorfos, esto es, el axial, el circular y los debidos a los efectos Matteucci y Wiedemann inverso (Kraus, 1994). Los ciclos vendrán dados en función del tipo de campo magnético excitador y de la respuesta magnética que se quiere calcular.

Consideremos un punto interior del hilo; en ese punto, la imanación M_i formará unos ángulos α , β y θ con los ejes coordenados cilíndricos cuyos vectores unitarios son u_r , u_ϕ y u_z , respectivamente. Las componentes de la imanación respecto esos ejes son: $M_r = M_i \cdot \cos \alpha$, $M_\phi = M_i \cdot \cos \beta$ y $M_z = M_i \cdot \cos \theta$. La posición de la imanación vendrá dada por los ángulos α , β y θ , determinados por la magnitud de los campos magnéticos a las energías magnetoelástica y de canje.

Tipos de campos magnéticos. Energía magnética

Se pueden aplicar dos tipos de campos:

i) Axiales $\rightarrow H = H_z u_z$, producidos por solenoides coaxiales al hilo; son constantes en toda la sección del hilo.

ii) Circulares $\rightarrow H = H_\phi u_\phi$, debidos al flujo de una corriente eléctrica a lo largo del hilo; no son constantes en la sección del hilo, sino que aumentan linealmente con la coordenada radial r , según la expresión $H_\phi = I \cdot r / 2\pi R^2$, siendo I la intensidad de corriente y R el radio del hilo. Para dar un valor de H_ϕ en el ciclo de histéresis se considera el llamado *promedio balístico* (Kraus, 1994):

$$H_\phi = \frac{1}{R} \int_0^R H_\phi(r) dr = \frac{I}{4\pi R} \quad (21)$$

Las densidades de energía debidas a los campos son del tipo $D_z = -\mu_0 \cdot M_i \cdot H_z \cdot \cos \theta$ y $D_\phi = -\mu_0 \cdot M_i \cdot H_\phi \cdot \cos \beta$

Tipos de anisotropías. Energía magnetoelástica

Se han considerado dos tipos de anisotropías intrínsecas:

i) Anisotropías uniaxiales -. Presentan densidades de energía del tipo $D_k = K_r \cdot \sin^2 \alpha$, $D_k = K_\phi \cdot \sin^2 \phi$, $D_k = K_z \cdot \sin^2 \theta$, donde K_r , K_ϕ y K_z simbolizan la magnitud de las anisotropías uniaxiales dirigidas a lo largo de los ejes r , ϕ y z , respectivamente. Alcanzan los valores mínimos para $\alpha = \beta = \theta = 0$ si K_r , K_ϕ y K_z son positivos y $\alpha = \beta = \theta = \pi/2$ si son negativos. La magnitud de las anisotropías se relacionan con la de la tensión por relaciones del tipo $K_i = (3/2) \cdot \lambda \cdot \sigma_i$, donde σ_i

sería la tensión radial, K_r la anisotropía radial y λ la constante de magnetostricción.

ii) Anisotropías de torsión -. Son debidas a la presencia de tensiones de cizalladura, τ , intrínsecas al hilo y que fuerzan a la imanación a seguir una dirección helicoidal (la imanación estaría cerca contenida o cerca del plano coordenado $z-\phi$). La densidad de energía tiene la expresión general:

$$D_\tau = -\frac{3\lambda\tau}{4} [\cos\theta + \cos\beta]^2 \quad (22)$$

que para el caso en que $\alpha = \pi/2$, se reduce a:

$$D_\tau = -\frac{3\lambda\tau}{4} [1 + \sin 2\theta]^2 \quad (23)$$

ya que $\beta + \theta = \pi/2$. Se minimiza cuando $\theta = \pi/4 = 45^\circ$

Energía de canje

Para calcular la densidad de energía de canje, se ha tomado la siguiente expresión:

$$D_c = (-A \cos[\theta(x_i) - \theta(x_{i-1})] - A \cos[\theta(x_i) - \theta(x_{i+1})]) \cdot EXN \cdot \left(\frac{N}{R}\right)^2 \quad (24)$$

donde A es la constante de canje, EXN un parámetro adimensional que toma valores comprendidos entre cero y uno, R el radio del hilo y N representa el número de partes en que se divide el dominio de variación de la variable radial reducida $x = r/R$, que es $0 < x < 1$. Los ángulos $\theta(x_i)$ representan el ángulo de imanación en el punto x_i de la partición (i varía desde 1 hasta N). La densidad de energía D_c se minimiza cuando $\theta(x_i) = \theta(x_{i-1}) = \theta(x_{i+1})$. El parámetro EXN permite controlar la magnitud de la interacción de canje desde su valor mínimo (EXN=0) hasta el máximo (EXN=1).

Cálculo de la posición de la imanación

La densidad de energía total, $D(x)$, resulta de la suma de las diferentes contribuciones:

$$D(x) = D_z(x) + D_\phi(x) + D_K(x) + D_\tau(x) + D_c(x) \quad (25)$$

donde $D(x)$ depende de la variable radial reducida x . Para calcular la posición de la imanación hay que encontrar el valor de α , β y θ que hagan mínima D en cada punto x . Para resolver el problema se sigue la siguiente táctica:

1 -. Para cada punto x , se calcula el ángulo θ para el que la derivada (respecto de θ) primera de la energía se anula, $D' = 0$ (condición de extremo). Para ello se recurre al *método de Newton* (Burden, 1985), que genera series numéricas a partir del algoritmo:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{D'(\theta_n)}{D''(\theta_n)} \quad (26)$$

siendo D'' la derivada segunda de la energía. Partiendo de un θ_n inicial dado, la serie puede

converger. Si lo hace, el valor de convergencia es la solución de $D'(\theta_0)=0$.

2 -. Para el valor θ_0 obtenido se comprueba que $D''(\theta_0)>0$ (condición de mínimo).

3 -. Si la serie de Newton no converge para ningún valor inicial dado, se genera una tabla de 500 valores de $D(\theta_n)$ con θ_n comprendidos en el intervalo $[0,2\pi]$ y se evalúa, por comparación de unos valores con otros, el valor de θ_n que hace mínima $D(\theta_n)$.

El algoritmo de Newton sólo es aplicable cuando D depende de una única variable, como es el caso correspondiente a la densidad de energía en el dominio interno de los hilos amorfos, en el que la imanación es perpendicular a la dirección radial, por que se tiene $\alpha=\pi/2 \rightarrow \beta+\theta=\pi/2$. En el dominio externo, se tiene que $\alpha\neq\pi/2$, con lo cual $D=D(\beta,\theta)$. En este caso, el mínimo se obtiene por comparación de las energías correspondientes a las diferentes soluciones que se obtienen al anular el gradiente de $D(\beta,\theta)$.

Una vez calculada la posición de la imanación en el punto x , se obtiene mediante promedio (integrando mediante el método de Simpson) la magnitud deseada. Por ejemplo, si se desea calcular la componente axial de la imanación, se tendría que tomar $M_z=<M_s\cos\theta>$. Todos los cálculos numéricos se han efectuado mediante sencillos programas escritos en *basic*. La imanación de saturación se ha tomado como $\mu_0 M_s=1.55\text{ T}$.

Los ciclos que pueden obtenerse son los siguientes:

- *Ciclo axial* → representación de M_z frente a H_z .
- *Ciclo circular* → " " M_ϕ " H_ϕ .
- *Ciclo Mattuecci* → " " M_ϕ " H_z .
- *Ciclo Wiedemann inverso* → " " M_z " H_ϕ .

Cálculo de ciclos de histéresis

La interacción de canje, D_c , complica mucho el cálculo ya que involucra posiciones de la imanación en tres puntos distintos. Dado que el efecto del canje es evitar un cambio brusco de la orientación de la imanación, se puede prescindir de ella y estudiar únicamente el efecto de los campos magnéticos y las anisotropías sobre los diferentes ciclos. No obstante, se han calculado dos ciclos de histéresis axiales en los que sí se considera el canje. En la **figura 4** se representa el ciclo de histéresis axial obtenido para la siguiente distribución de anisotropía:

$$K(x)=\begin{cases} K\cdot(1-x/x_0) & \text{si } x < x_0 \\ N\cdot K\cdot(1-x/x_0) & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

con $N=3$ y $K=5\text{ Jm}^{-3}$. Esta distribución de anisotropía uniaxial, lineal, es la más sencilla posible que reproduce la estructura de dominios de hilos amorfos ricos en hierro. Es positiva en el dominio interno ($x < x_0$) y negativa en el exterior ($x > x_0$). El parámetro x_0 representa la frontera entre el dominio externo y el interno.

La **figura 4a** representa el ciclo de histéreis para interacción de canje nula ($EXN=0$). La **figura 4b** para $EXN=0.2$ y la **figura 4c** para $EXN=0.5$. Nótese que aumenta el valor del campo

coercitivo con EXN, al igual que la remanencia. Cuando $EXN \neq 0$, el valor de la remanencia antes de aplicar campo (recordar que en los hilos amorfos no se alcanza el estado desimanado) no coincide con la obtenida cuando el campo va disminuyendo desde su valor máximo hasta anularse. El aumento de la remanencia y el campo coercitivo puede entenderse si se tiene en cuenta que la interacción de canje tiende a orientar todos los momentos magnéticos en una dirección, en la del campo H_z . cuanto mayor es EXN, mayor es la interacción de canje respecto de la anisotropía, por lo que la orientación será mayoritariamente paralela al eje del hilo y se precisará un campo mayor para variar la posición de los momentos magnéticos de esa dirección.

El campo magnético sigue una ley sinusoidal de frecuencia $\nu = 1$ Hz. En los ciclos que se presentan a continuación no se ha tenido en cuenta la interacción de canje.

Influencia de la distribución de anisotropía en los ciclos de histéresis

Vamos a considerar dos anisotropías uniaxiales (de dirección paralela al eje z, coaxial al hilo) y de valor positivo en el dominio interno (la imanación se pondrá paralela al eje z) y negativa en el externo (tomará una dirección perpendicular al eje z). Una anisotropía es lineal, semejante a la considerada arriba, mientras que la otra tiene forma parabólica (responde a un ajuste con un polinomio de grado cuatro de la forma de la tensión axial encontrada en el cálculo de las tensiones de enfriamiento). Ambas tensiones tienen el mismo valor máximo, $K_{MAX} = 75.5 \text{ Km}^{-3}$ y mínimo, $K_{MIN} = -198.2 \text{ Jm}^{-3}$, y se anulan en $x_0 = 0.78$. La figura 5a muestra su forma.

La figura 5b ofrece el ciclo de histéresis axial para la anisotropía parabólica, y la figura 5c para la anisotropía lineal. La remanencia es prácticamente la misma en ambos casos, pero no el campo coercitivo, mucho mayor en el caso de $K(x)$ parabólica. Ello es debido a que en este caso, el valor máximo de la anisotropía se alcanza en un punto interior del hilo ($x \sim 0.5$) y no en el eje ($x=0$), como es el caso de la anisotropía lineal. En virtud de la geometría cilíndrica, hay tantos más momentos magnéticos cuanto mayor sea la distancia al eje. Por ello, en $x \sim 0.5$, la dirección de la imanación estará más fija que en $x=0$ y, por tanto, el campo necesario para hacerla girar hasta los 90° con el eje del hilo (situación en que $M_z=0$) será mayor, es decir, el campo coercitivo aumenta.

Influencia de las tensiones internas en la respuesta ante tensiones externas

La distribución de tensiones internas influirá decisivamente en la respuesta del hilo ante tensiones mecánicas externas.

La figura 6a muestra la variación de la remanencia axial reducida, M_r/M_s (siendo M_s la imanación de saturación) cuando se aplica una tensión axial externa. Se han considerado dos distribuciones de anisotropía:

$$\begin{array}{ll}
 \text{i) } K(x) = \begin{array}{ll} K_i \cdot (1-x/x_0) & \text{si } x < x_0 \\ N \cdot K_i \cdot (1-x/x_0) & \text{si } x > x_0 \end{array} & ; \quad \text{ii) } K(x) = \begin{array}{ll} K_i \cdot (1-2x^2) & \text{si } x < x_0 \\ N \cdot K_i \cdot (1-2x^2) & \text{si } x > x_0 \end{array} \\
 \text{lineal} & \text{parabólica}
 \end{array}$$

Ambas se anulan en $x_0 = 0.7$, y se toma $N=3$ y $K_i = 50 \text{ Jm}^{-3}$. La anisotropía inducida por la tensión axial externa, T , se representa por $K = (3/2) \cdot \lambda \cdot T$. Como se comprueba, la saturación se alcanza antes para el caso de la anisotropía lineal que para la parabólica (el aumento por saltos es debido a la ausencia de anisotropía de canje). Para el caso de la no lineal, cuando $K = 1.3 K_i$, el hilo está prácticamente saturado. Para la distribución parabólica, el incremento de la remanencia axial es más progresivo.

La figura 6b muestra el incremento de remanencia con la tensión externa para el caso de la anisotropía lineal y dos tamaños diferentes del dominio interno ($x_0 = 0.7$ y $x_0 = 0.9$). Es tanto más fácil saturar el hilo axialmente cuanto menor sea el tamaño del dominio externo, en donde la imanación es perpendicular al eje del hilo.

La figura 6c ofrece la evolución de la remanencia frente a una torsión externa con y sin aplicación simultánea de un campo externo. En el caso de que no se aplique campo, la remanencia evoluciona desde el valor de 0.5 hasta $1/\sqrt{2}$, lo cual indica que la imanación forma un ángulo de 45° con el eje del hilo en toda la sección del mismo. Cuando se aplica un campo magnético axial externo de 40 A/m, la remanencia disminuye desde casi la saturación ($M_z/M_s \sim 1$) hasta el citado valor de $1/\sqrt{2}$.

Influencia de la distribución de tensión en los diferentes ciclos de histéresis

A continuación, vamos a analizar someramente la forma de algunos ciclos de histéresis en función de la magnitud de las tensiones internas. Se han considerado las siguientes distribuciones:

i) Anisotropía uniaxial positiva con diferente ángulo en cada dominio (0° en el interno y 90° en el externo).

$$K(x) = \begin{cases} K \cdot (1 - x/x_0) & \text{si } x < x_0 \\ N \cdot K \cdot (x/x_0 - 1) & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad x_0 = 0.7$$

ii) Anisotropía de torsión

$$K_T(x) = T \cdot x$$

Para esta tensión, se toma un incremento lineal con x por analogía con la dependencia de la torsión que se introduce cuando se retuerce un hilo. T denota el valor máximo de la tensión de torsión intrínseca.

La figura 7 muestra los ciclos de histéresis axiales, M_z-H_z , para $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, $T=0$ y diferentes valores de N (que regula la magnitud de la anisotropía radial del dominio externo). La figura 7a muestra el caso para $N=3$. La figura 7b para $N=10$ y la figura 7c para $N=30$. Cuanto mayor es N más difícil es alcanzar la saturación (para el campo máximo de 60 A/m). Para $N=30$ (figura 7c) el ciclo se encuadra bastante, recordando la forma de los ciclos de hilos biestables. En esos hilos la imanación se invierte por nucleación y/o desanclaje de paredes, dando lugar al salto Barkhausen, que no se aprecia en este modelo ya que en él la imanación sólo se invierte por

rotaciones. No obstante, y según los resultados de la figura 7, la dificultad de saturación en hilos amorfos puede atribuirse a una anisotropia radial muy alta.

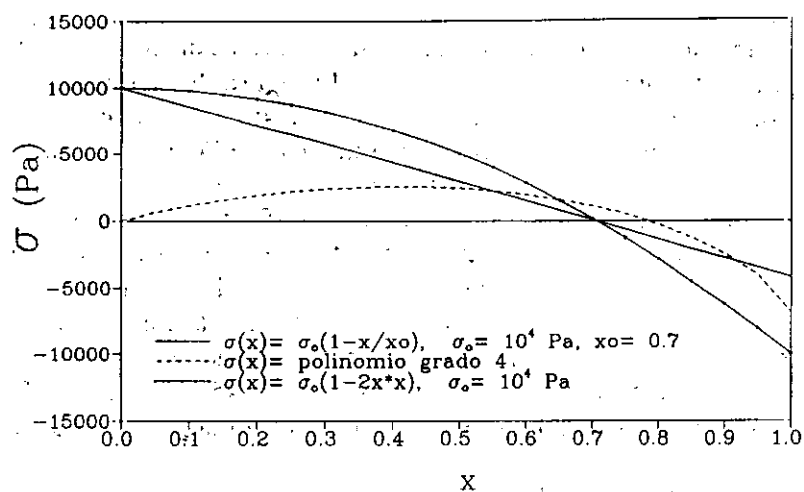
La figura 8 muestra el ciclo axial para la misma distribución de anisotropia uniaxial con $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, $N=3$ y diferentes anisotropías de torsión T . La figura 8a muestra el resultado para $T = 5 \text{ Jm}^{-3}$. Si se compara con la figura 7a (que corresponde a $T=0$) se puede constatar un aumento de la remanencia y una mayor facilidad para alcanzar la saturación. Ello es debido a que la anisotropía de torsión facilita el movimiento de la imanación radial, en el dominio externo, hacia posiciones más cercanas al eje del hilo. Si se aumenta la torsión a $T = 10 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 8b) la remanencia sigue aumentando, mientras que el campo coercitivo es prácticamente el mismo. Para $T = 20 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 8c) la remanencia es más alta que en los dos casos anteriores y la saturación se alcanza antes. Estos resultados se explican si se tiene en cuenta que, dado que la anisotropía de torsión aumenta linealmente con x , afectará en mayor medida al dominio externo que al interno, facilitando que la imanación forme, en el primero, ángulos comprendidos entre 45° y 90° con el eje en este dominio. A mayor T , más cerca de 45° estará la imanación y mayor será la remanencia axial.

La figura 9 muestra los ciclos M_ϕ - H_z (Matteucci) para las distribuciones de anisotropía propuestas. En este caso, la anisotropía en el dominio externo es circular (como en los hilos ricos en cobalto) y no radial. La figura 9a muestra el resultado para $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, $N=0$ (anisotropía de dominio externo nula) y $T = 20 \text{ Jm}^{-3}$. Si el campo axial H_z aumenta mucho, fuerza a poner la imanación paralela al eje, disminuyendo su componente circular. Si $N=3$ y $T = 5 \text{ Jm}^{-3}$ se aumenta la anisotropía circular y disminuye la anisotropía de torsión (figura 9b). El efecto del campo es el mismo que en el caso anterior. Un cambio de signo (figura 9c) en la torsión, $T = -5 \text{ Jm}^{-3}$ (ahora sería de compresión) conlleva un comportamiento inverso al de figura 9b.

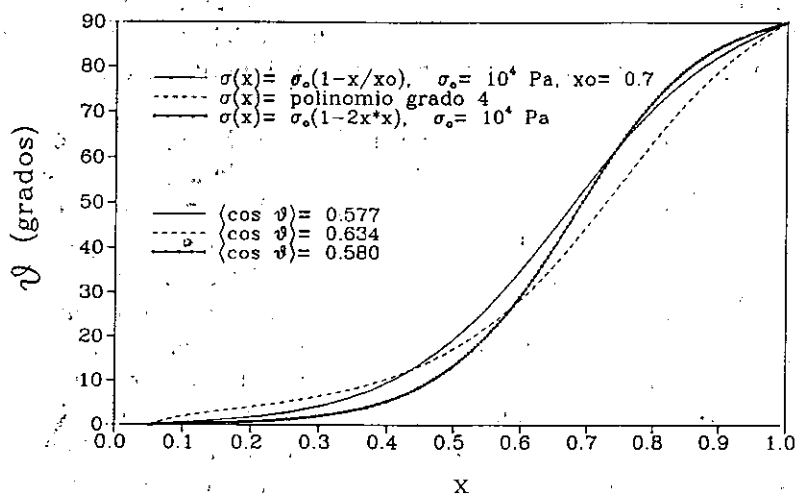
La figura 10 muestra los ciclos Wiedemann inverso, M_z - H_ϕ , cuando se hace circular una intensidad sinusoidal cuyo valor máximo es 20 mA. Se considera que la anisotropía en el dominio externo tiene dirección circular y no radial (una fuerte anisotropía radial anularía la componente circular M_ϕ y no se observaría ciclo). La figura 10a muestra el resultado para $K=0$ y $T = 10 \text{ Jm}^{-3}$. Cuanto mayor es el campo H_ϕ , menor es la componente axial de la imanación. Obsérvese que la imanación axial cambia bruscamente de sentido. Ello es debido al tránsito de la imanación, debido al cambio de sentido de H_ϕ , entre los dos sentidos de fácil imanación que introduce la anisotropía de torsión. Si se aumenta el valor de la anisotropía de torsión a $T = 20 \text{ Jm}^{-3}$, se aprecia un incremento del campo coercitivo (figura 10c), debido a que la imanación queda más fija por la acción de la torsión y el campo H_ϕ encuentra más dificultad para moverla. La presencia de anisotropías uniaxiales ($K = 20 \text{ Jm}^{-3}$ y $N=3$) complica la variación de la componente axial de la imanación (figura 10b).

La figura 11 muestra los ciclos circulares, M_ϕ - H_ϕ , para la intensidad máxima de 20 mA, $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, $N=3$ y diferentes anisotropías de torsión T . La figura 11b muestra el resultado para $T=0$. El aumento a $T = 10 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 11a) y $T=30 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 11c) propicia el aumento de la remanencia y el campo coercitivo.

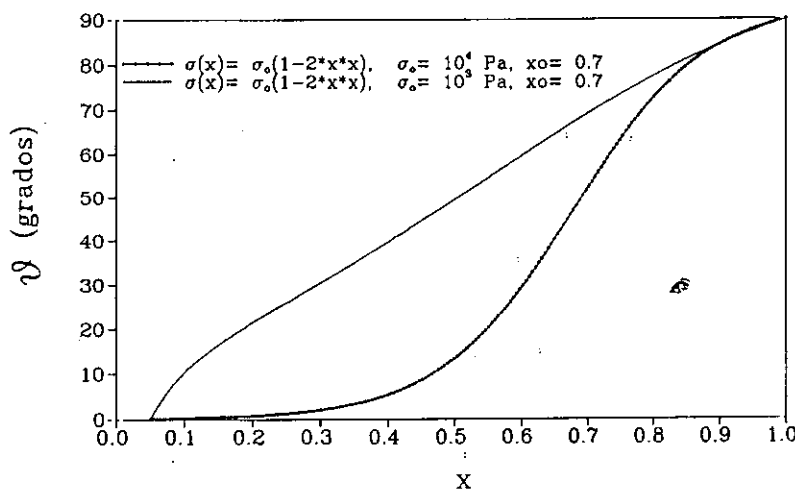
Figura 3 -. a) distribuciones de tensión; b) ángulo de la imanación con eje del hilo frente a la coordenada radial reducida, para las distribuciones dadas en a); c) ángulo $\theta(x)$ para dos valores de tensión máxima, σ_0 , y una misma distribución.



a)



b)



c)

Figura 4 -. Ciclos de histéreis axiales para diferentes grados de importancia de la energía de canje frente a la magnetoelástica: a) EXN= 0; b) EXN= 0.2; c) EXN= 0.5.

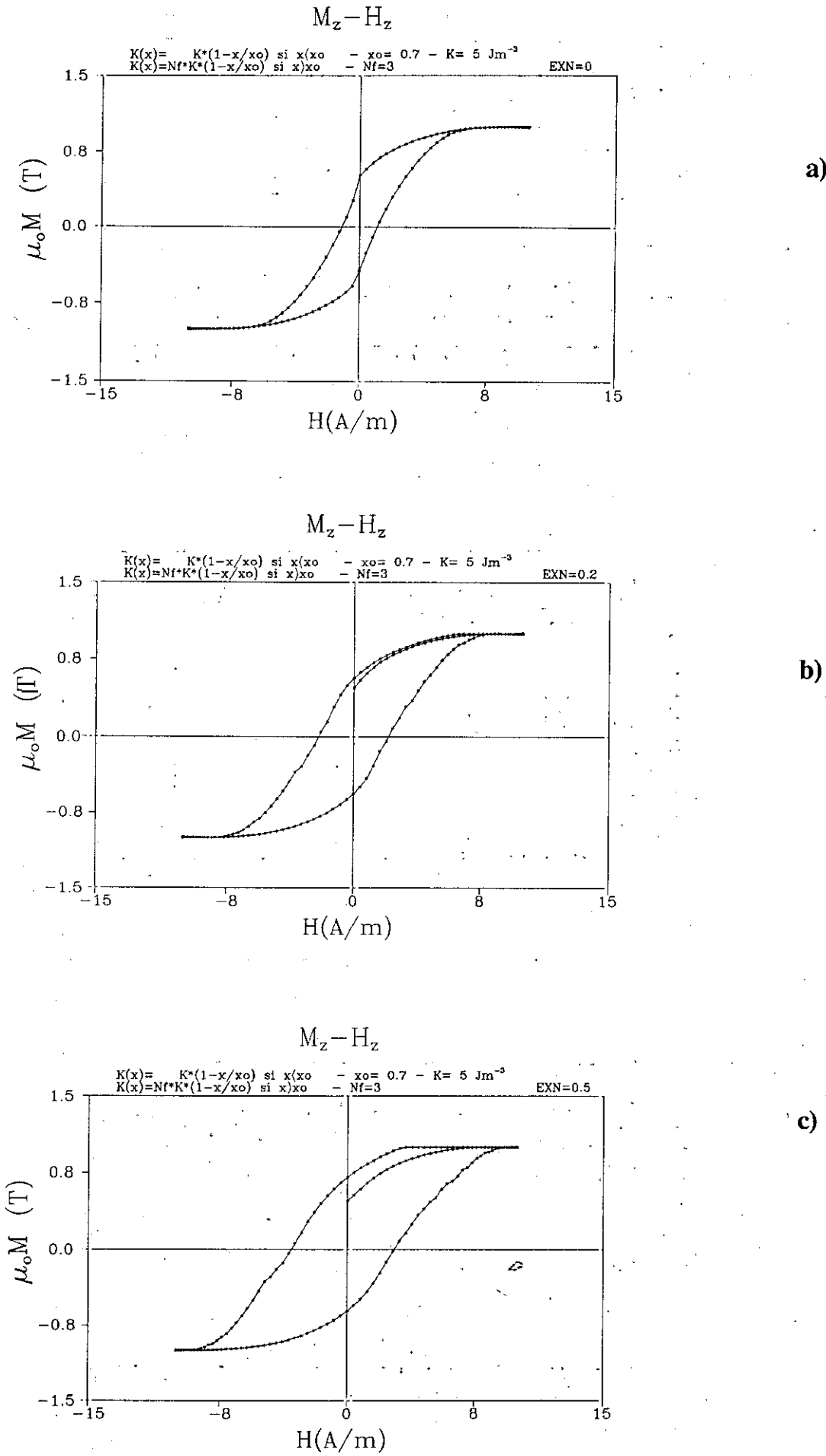
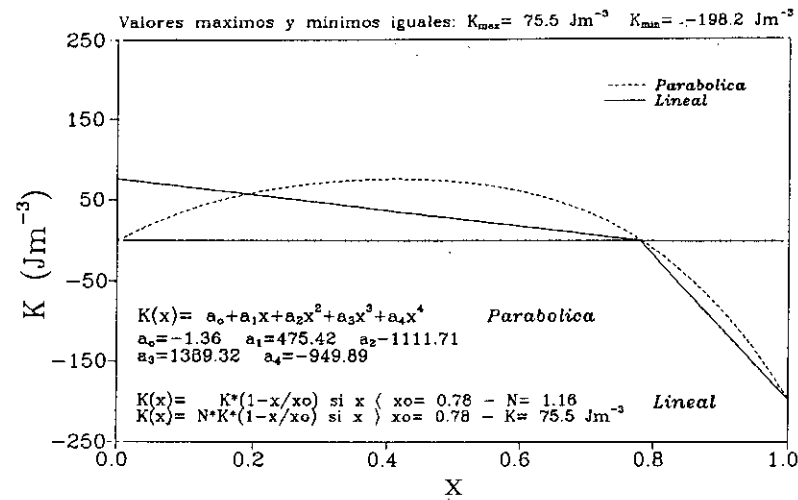
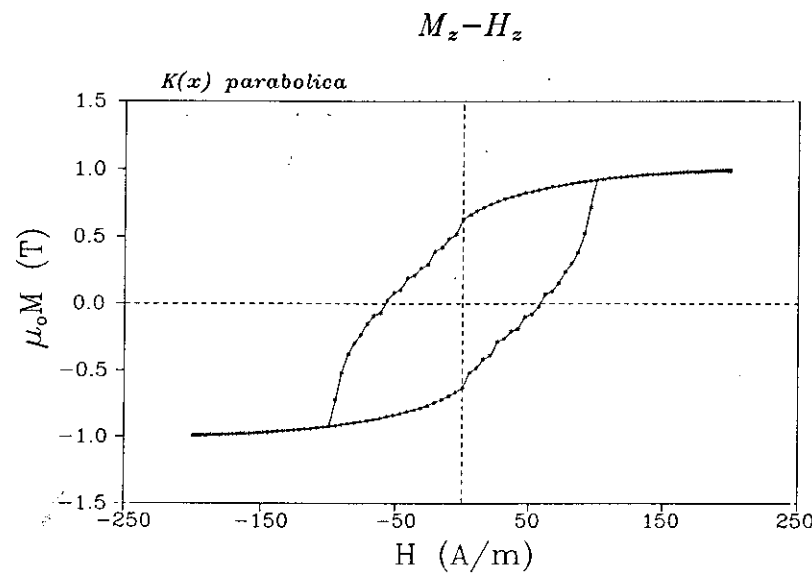


Figura 5 -. Ciclos de histéresis axiales para dos distribuciones de anisotropía: a) distribuciones de tensión; b) ciclo para anisotropía parabólica; c) ciclo para anisotropía lineal.

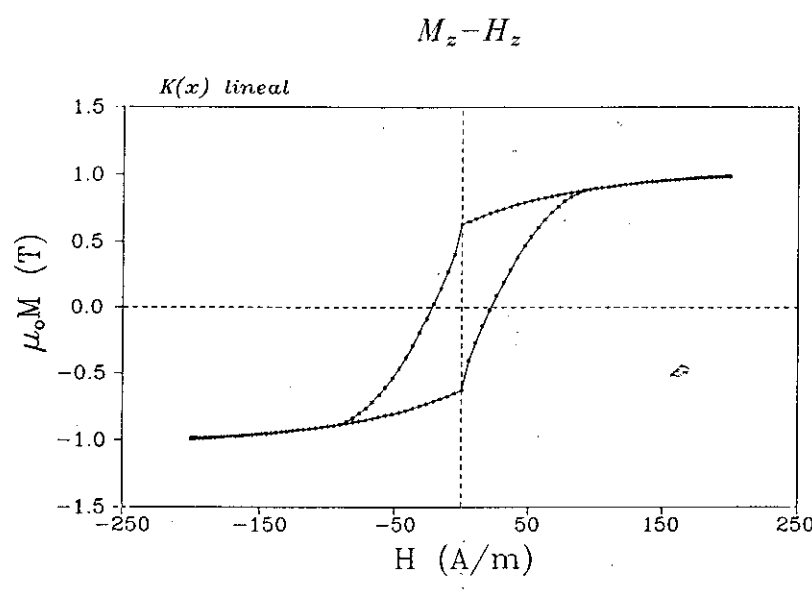
DISTRIBUCIONES DE ANISOTROPIA



a)

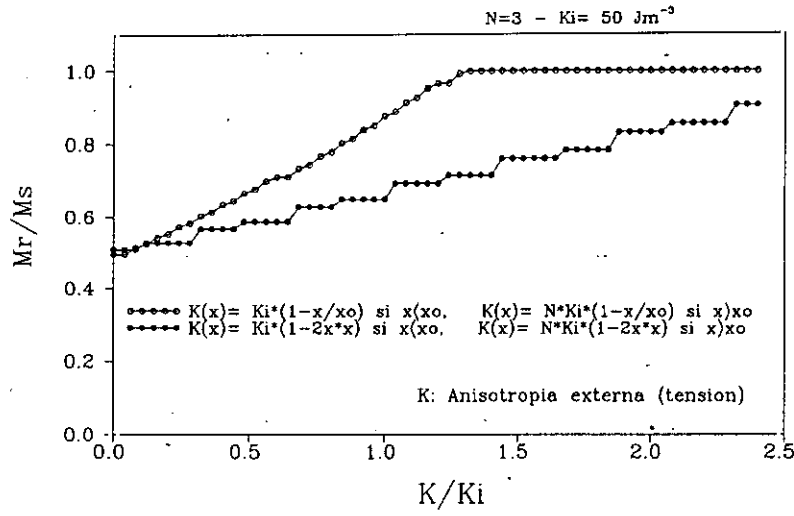


b)

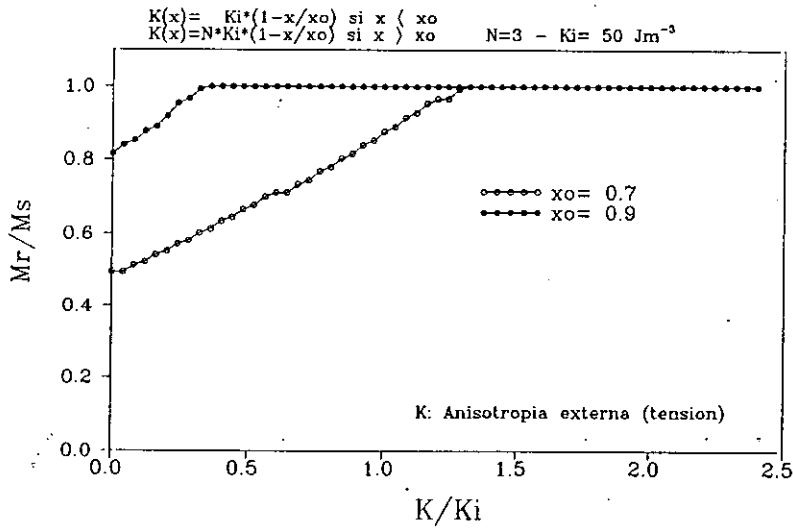


c)

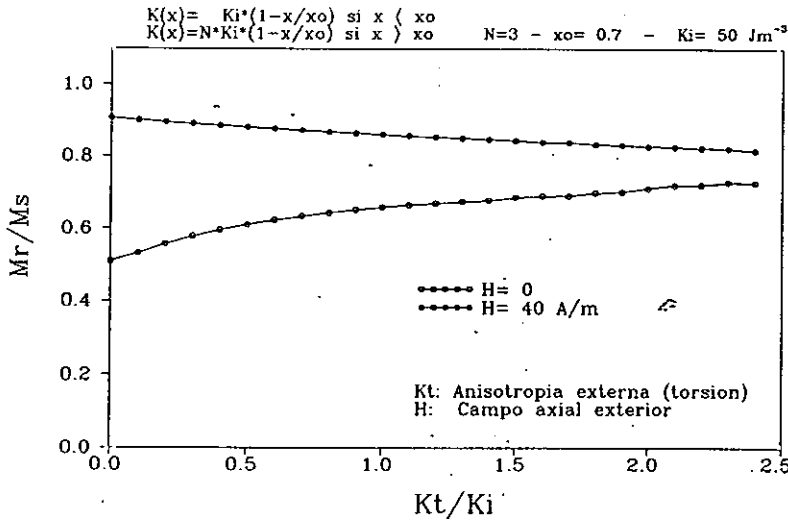
Figura 6 -. a) remanencia axial frente a tensión externa, para dos distribuciones de anisotropia;
b) remanencia axial frente a tensión externa para dos tamaños del dominio interno;
c) remanencia axial frente a torsión externa con y sin campo axial aplicado.



a)

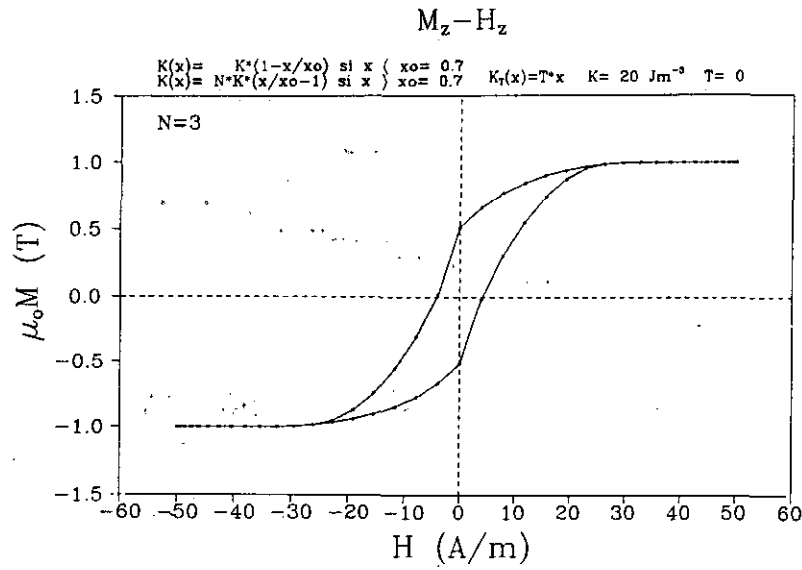


b)

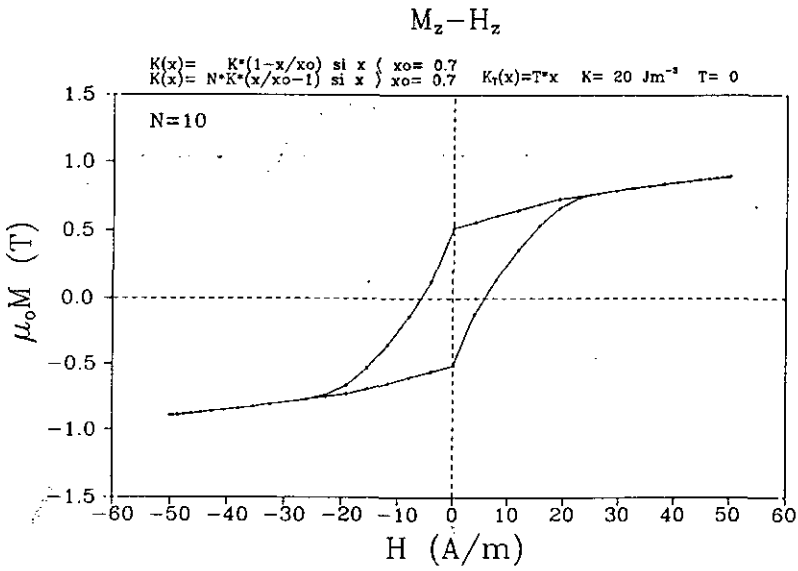


c)

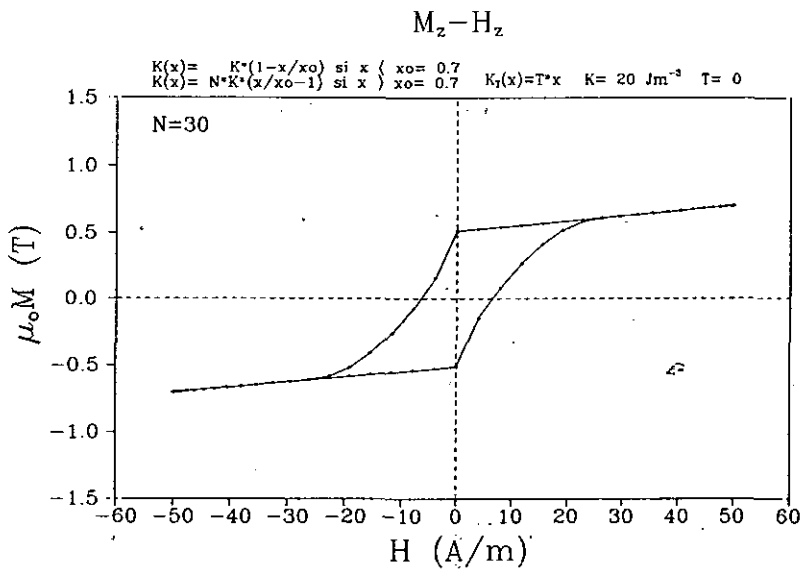
Figura 7 -. Ciclos de histéresis axiales para diferentes magnitudes de la anisotropía radial, en dominio externo, dada por el factor N: a) N= 3; b) N=10 y c) N= 30.



a)



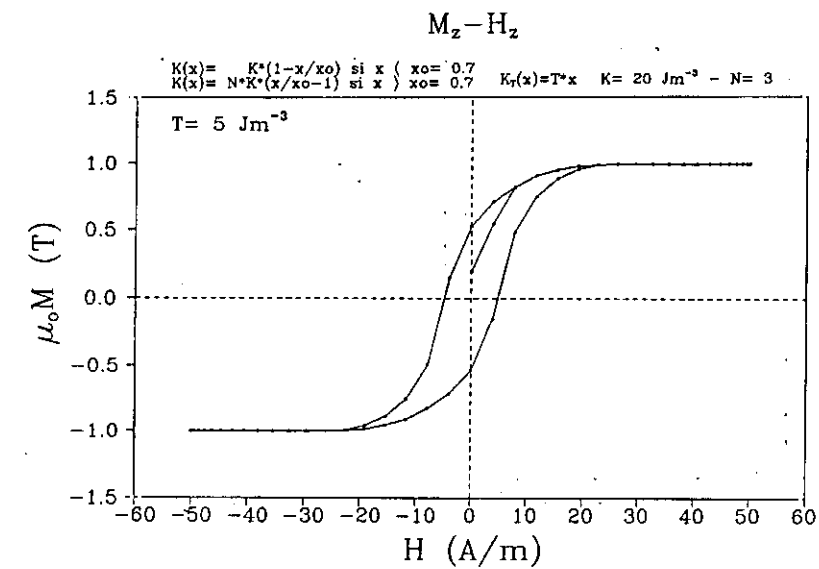
b)



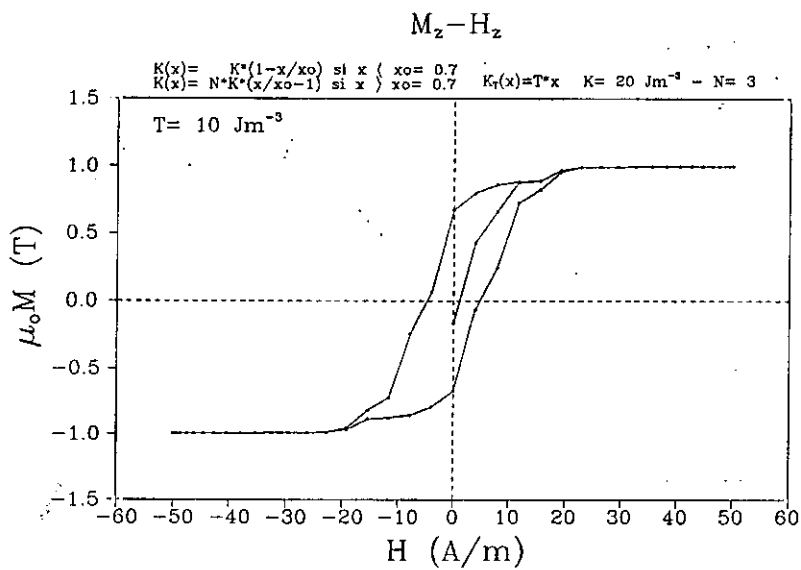
c)

Figura 8 - . Ciclos de histéresis axiales para diferentes magnitudes de la anisotropía de torsión:

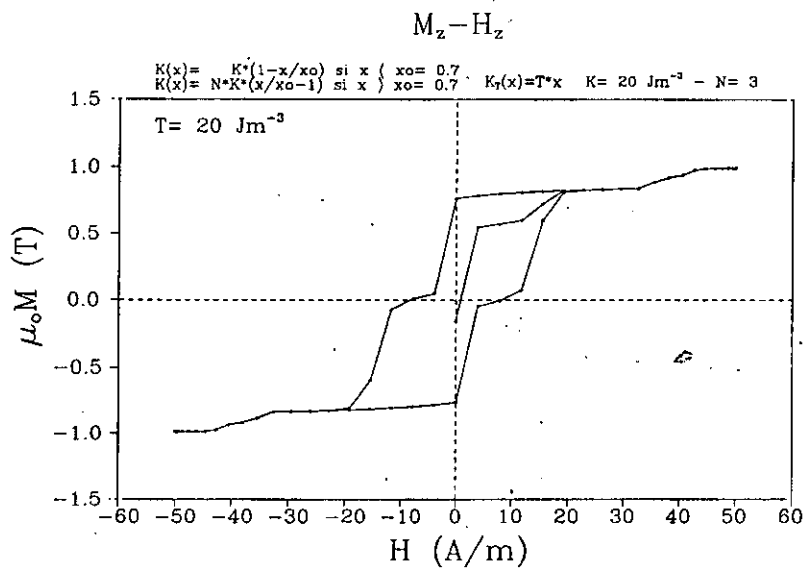
a) $T = 5 \text{ Jm}^{-3}$; b) $T = 10 \text{ Jm}^{-3}$; c) $T = 20 \text{ Jm}^{-3}$.



a)

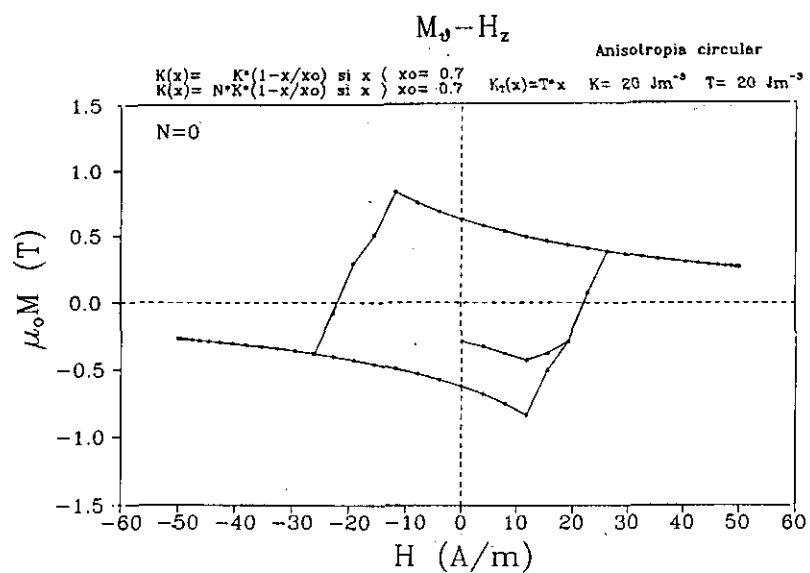


b)

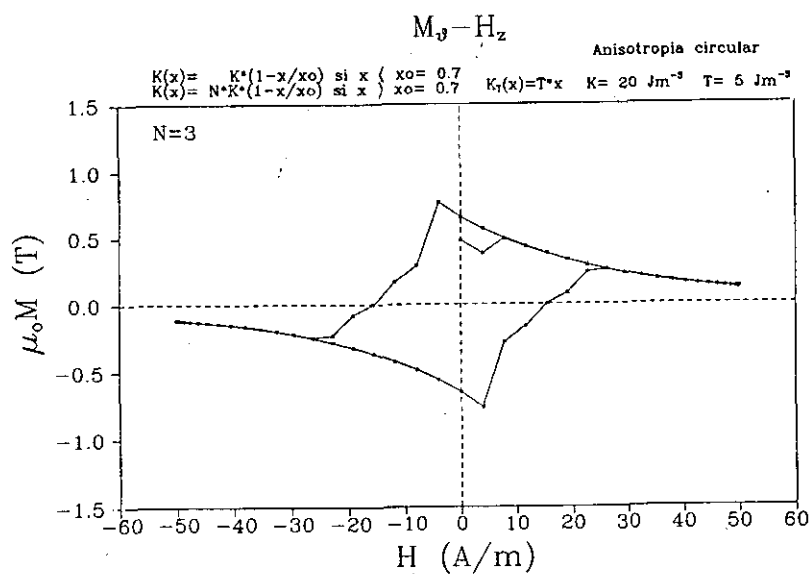


c)

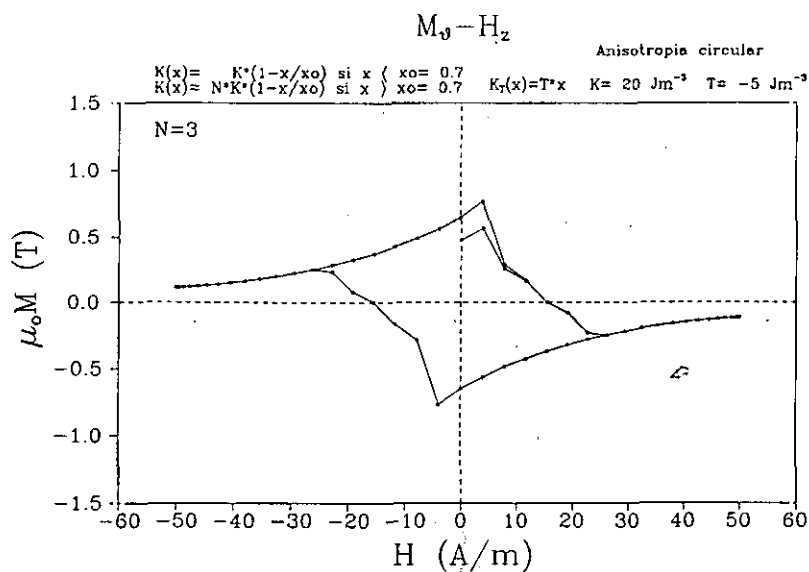
Figura 9 -. Ciclos de histéresis M_y-H_z para diferentes anisotropías. a) $T = 20 \text{ Jm}^{-3}$; $N=0$,
b) $T=5 \text{ Jm}^{-3}$, $N=3$; c) $T= -5 \text{ Jm}^{-3}$; $N=3$.



a)

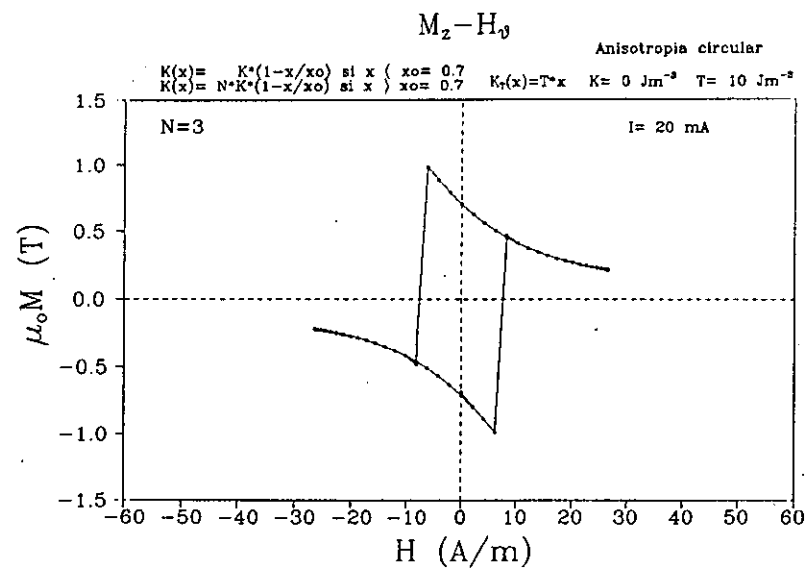


b)

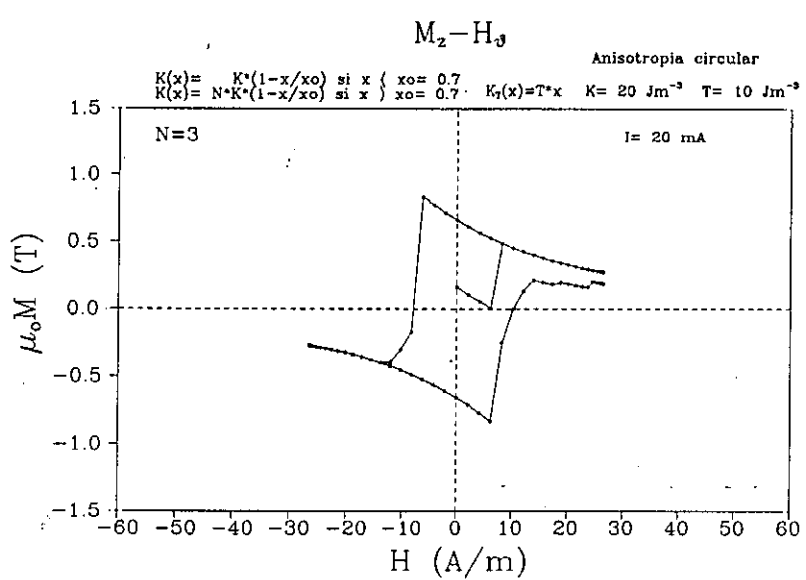


c)

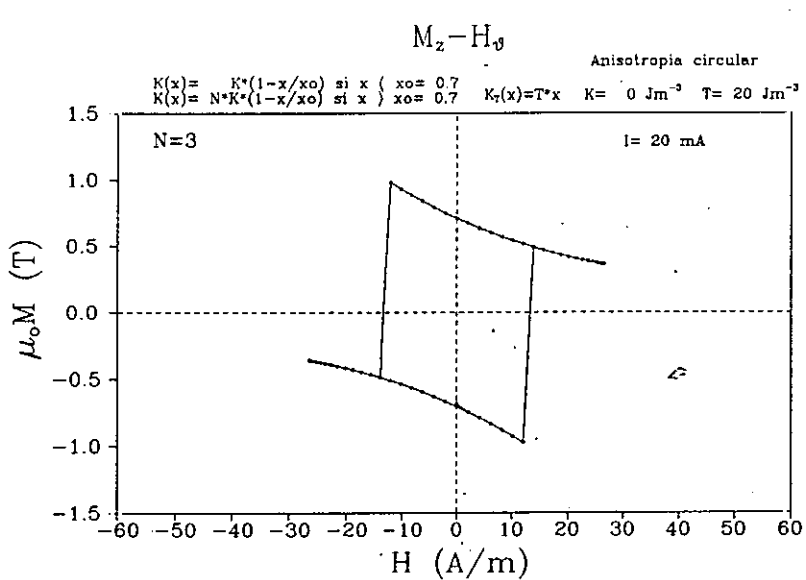
Figura 10 -. Ciclos de histéresis M_z-H_z para diferentes anisotropías: a) $T= 10 \text{ Jm}^{-3}$, $K=0$; b) $T=10 \text{ Jm}^{-3}$, $K=20 \text{ Jm}^{-3}$; c) $T= 20 \text{ Jm}^{-3}$, $K=0$.



a)

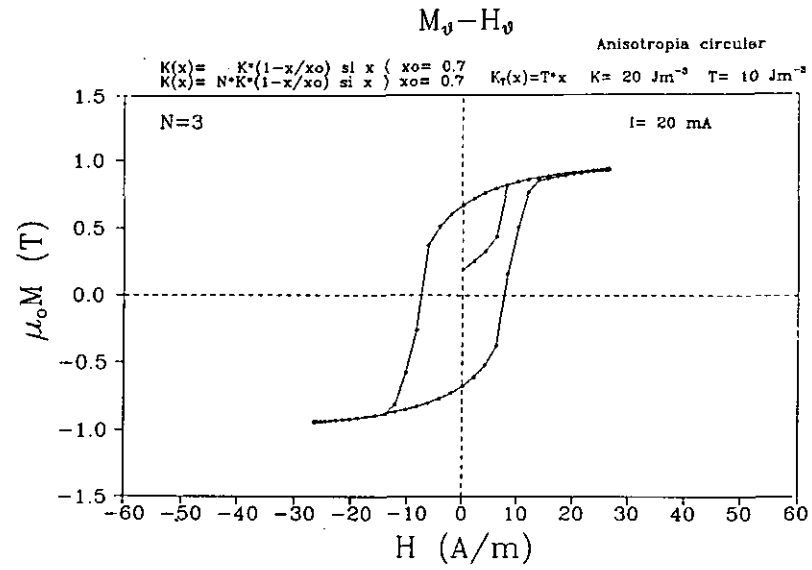


b)

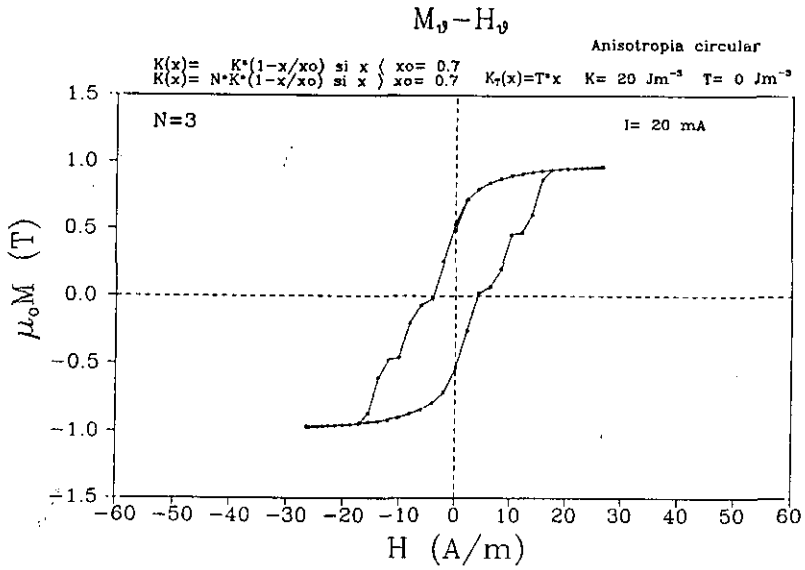


c)

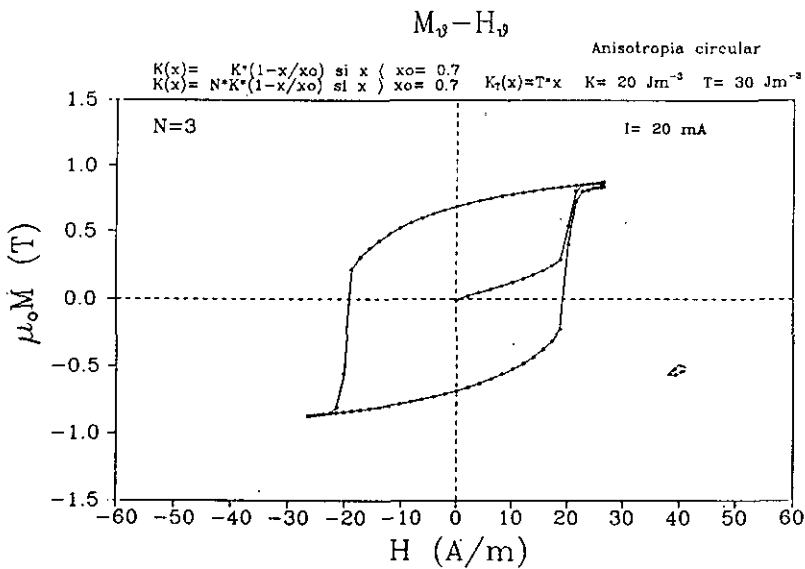
Figura 11 -. Ciclos de histéresis M_y-H_y para diferentes anisotropías: a) $T = 10 \text{ Jm}^{-3}$, $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$; b) $T = 0$, $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$; c) $T = 30 \text{ Jm}^{-3}$, $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$.



a)



b)



c)

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE CICLOS DE HISTERESIS

Una vez analizada la influencia de varias distribuciones de tensiones internas sobre los ciclos de histéresis de hilos amorfos, considerando un modelo basado en cambios de imanación por rotaciones, vamos a mostrar algunos resultados experimentales obtenidos en hilos amorfos tanto en su estado as-cast como después de haber sido sometidos a distintos tratamientos térmicos que alterar su distribución de tensiones intrínsecas presentes en ellos.

Dispositivo experimental

El estudio experimental se ha llevado a cabo haciendo uso del dispositivo diseñado por el *Dr. Ludek Kraus*, en el Instituto de Magnetismo Aplicado y que ha sido modificado en algunos aspectos por el autor de la presente memoria. El montaje permite obtener, para una misma muestra, los cuatro ciclos de histéresis posibles: M_z-H_z (ciclo axial), $M_\phi-H_z$ (Matteucci), M_z-H_ϕ (Wiedemann inverso) y $M_\phi-H_\phi$ (circular). La figura 1 muestra un esquema del dispositivo.

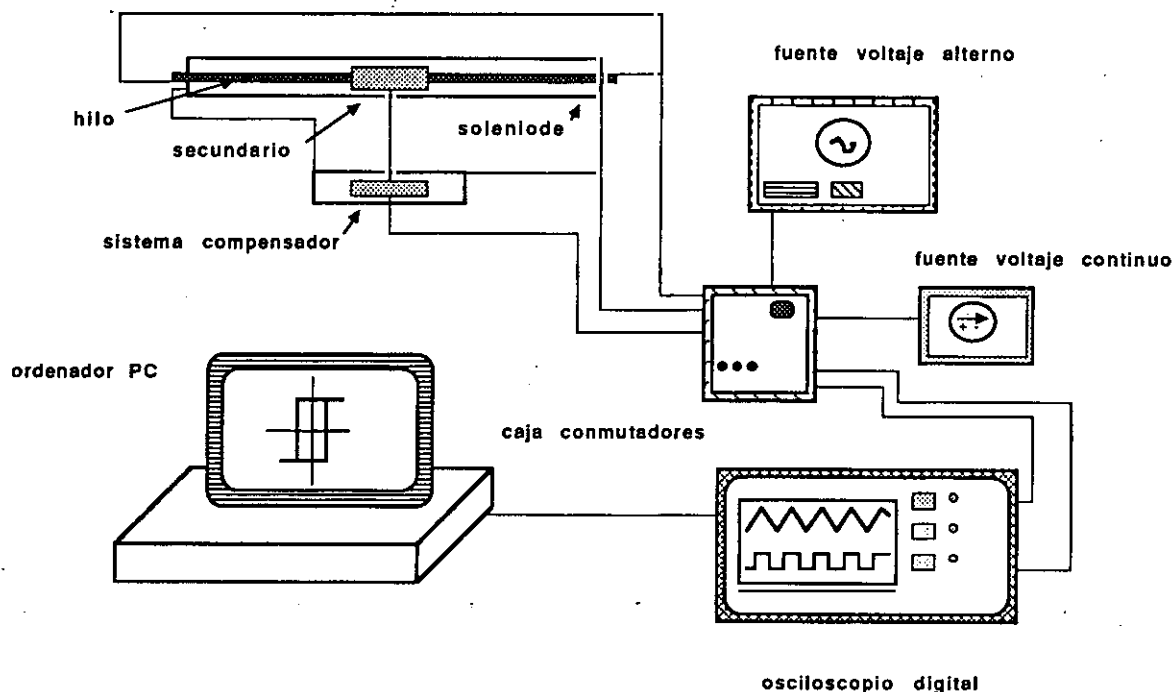


Figura 1 -. Esquema del dispositivo experimental

El dispositivo consta de un solenoide (carrete primario) cuya constante de campo es de $1856 \text{ Am}^{-1}/\text{A}$, de longitud 32 cm. Permite aplicar campos axiales, H_z , a los hilos alojados en su interior. Dentro del solenoide se sitúa una pequeña bobina (carrete secundario) de 4 cm de longitud y que está construida arrollando 340 vueltas de hilo de cobre de 0.1 mm de diámetro sobre un tubo de albúmina de 1.5 mm de diámetro. El hilo amorfo se aloja en el interior del tubo de albúmina. Al lado del solenoide principal se dispone otro de 11 cm de longitud y constante de campo $4500 \text{ Am}^{-1}/\text{A}$, conectado en serie con el primero. En su interior existe un secundario móvil de 10 cm de longitud y 955 vueltas de hilo de cobre, que está conectado en serie oposición con el otro secundario donde va alojado el hilo amorfo. Los extremos de éste y los solenoides y secundarios están conectados, mediante cables bnc's a una *caja de conmutadores* en cuyo interior se encuentran los elementos electrónicos necesarios (resistencias, condensadores y circuitos integrados) para llevar a cabo la integración analógica de las señales analógicas que recibe, provenientes del secundario principal y del propio hilo. Aloja también un *punto de Wheatstone* (Sears, 1981) que permite substraer el voltaje óhmico que aparece en el hilo amorfo cuando se hace circular por él una corriente eléctrica. La caja de conmutadores funciona gracias a una fuente de voltaje continuo de 15 voltios.

Toda la electrónica implicada en la caja de conmutadores ha sido diseñada por *Enrique Fraga*, del Instituto de Magnetismo Aplicado.

De la caja de conmutadores salen dos cable bnc's, conectandose cada uno de ellos a los canales horizontal y vertical de un osciloscopio digital Philips modelo PM 3335 60 MHz 20 MS/s, que permite almacenar las señales temporales provenientes del hilo y del secundario, a través de la caja de conmutadores, y transmitirla a su vez a un ordenador PC que facilita el estudio de los datos.

La caja permite, pulsando los conmutadores necesarios, hacer fluir la corriente proveniente de una fuente de voltaje alterno, hacia los solenoides o hacia el hilo; en el primer caso se creará un campo axial, H_z , y en el segundo uno circular, H_ϕ .

Modo de obtener los diferentes ciclos

Una vez aplicados los campos magnéticos, se pueden obtener la componente axial o circular de la imanación, en virtud de los mecanismos físicos comentados a continuación.

1 -. Componente axial de la imanación, M_z

La componente axial de la imanación (en la dirección del eje z) se obtiene mediante la integración del voltaje, V, inducido en el secundario debido a la variación del flujo magnético, Φ , en virtud de la ley de Faraday:

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt}N\vec{B}\cdot\vec{S} = -SN\mu_0\frac{d}{dt}(H_z + M_z) = -SN\mu_0\frac{d}{dt}H_z - NS\mu_0\frac{d}{dt}M_z \quad (1)$$

donde S es la sección del secundario y N el número de vueltas. La contribución $-dH_z/dt$ al voltaje inducido es eliminada mediante el carrete compensador que genera un voltaje inducido de valor $+dH_z/dt$, moviendo adecuadamente el secundario móvil.

La imanación axial M_z puede generarse tanto por la aplicación de un campo axial H_z como

de uno circular, H_ϕ . Los valores de estos últimos se obtienen a través del valor de la intensidad de corriente que pasa por el solenoide y por el hilo, respectivamente. El valor de la intensidad se mide a partir de la caída de potencial que se produce en una resistencia de un ohmio cuando es atravesada por la corriente.

2 -. Componente circular de la imanación, M_ϕ

La variación temporal de M_ϕ induce, en virtud de la ley de Faraday, un voltaje en los extremos del hilo amorfo. El voltaje aparece como consecuencia de la circulación de un campo eléctrico axial, E_z , que aparece como consecuencia de la variación temporal del potencial vector A , fuente del campo magnético B debido a la presencia de la imanación M (Hernando, 1978). El campo E se relaciona con A a través de la relación:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

El valor de A vendrá dado por M , ya que $B = \nabla \times A \rightarrow \mu_0 M = \nabla \times A$. Tomando el operador rotacional en ambos miembros, se obtiene:

$$\mu_0 \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (3)$$

y dado que el potencial vector verifica la condición $\nabla \cdot A = 0$, se tiene, expresando el operador rotacional y laplaciano en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\phi) \quad (4)$$

Esta ecuación tiene una solución, A_z , que depende de si M_ϕ es constante o varía con r . Se obtiene $A_z = \mu_0 \cdot M_\phi \cdot (R-r)$ si $M_\phi = \text{constante}$ (R es el radio del hilo y η una constante de proporcionalidad) y $A_z = (\mu_0 \cdot \eta / 2) \cdot (R^2 - r^2)$, si $M_\phi = \eta \cdot r$. En cualquier caso, el voltaje en los extremos del hilo se obtiene a partir de la expresión:

$$V = \langle E_z \rangle L = 0.35 R L \mu_0 \frac{\partial \langle M_\phi \rangle}{\partial t} \quad (5)$$

donde $\langle E_z \rangle$ representa el promedio del campo eléctrico en la sección del hilo, L es la longitud y 0.35 es un valor de compromiso entre 1/8 y 3/8, correspondientes al caso de M_ϕ constante y variable, respectivamente.

Obtención de ciclos de histéresis circulares M_ϕ - H_ϕ

Los hilos amorfos ferromagnéticos pueden ser imanados macroscópicamente en la dirección circular, originando la componente M_ϕ de la imanación, mediante un campo circular H_ϕ . Este campo es producido por una corriente que fluye a través del hilo, y es inhomogéneo, aumentando linealmente con la coordenada radial cilíndrica. Esta inhomogeneidad es causa de diferencias en la imanación de capas cilíndricas de diferente radio, produciéndose una interacción entre ellas (Hernando, 1978).

El flujo de corriente origina una caída de potencial ohmica que es mucho más grande que la provocada por la variación temporal de la componente circular de la imanación. Para apreciar ésta, es necesario eliminar aquella. El voltaje ohmico se elimina gracias al concurso de un puente de Wheatstone, siendo el propio hilo amorfo una de las cuatro resistencias que lo integran; otra de ellas es variable y las demás tienen un valor fijo de 10 K. El equilibrado del puente permite obtener el valor de la resistencia ohmica del hilo en función de las otras tres. Des esta forma puede obtenerse un voltaje del mismo valor que el apreciado en los extremos del hilo; se invierte el signo de la dependencia temporal de este voltaje mediante un *inversor* y se suma (mediante un dispositivo electrónico *sumador*) al voltaje en los extremos del hilo; de esta forma, se substraee el voltaje ohmico. La figura 2 muestra un esquema del puente.

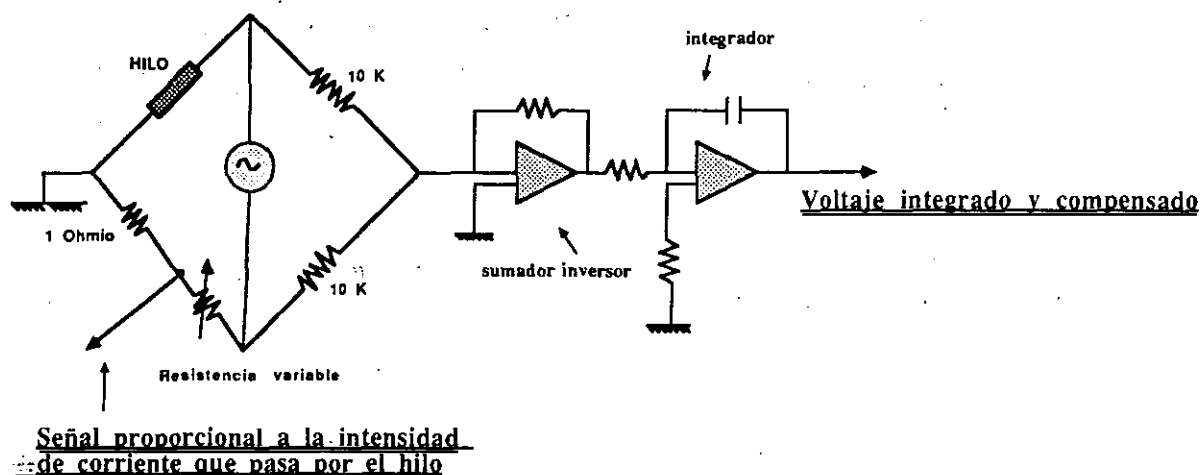


Figura 2 -. Puente de Wheatstone y dispositivo inversor-sumador

RESULTADOS EXPERIMENTALES

Los resultados experimentales que se presentan pueden resumirse en el siguiente esquema:

- 1 -. Ciclos de histéresis axiales para hilos amorfos de diferente composición.
- 2 -. Ciclos de histéresis de hilos ricos en hierro en estado as-cast. Efecto de tensiones y torsiones.
- 3 -. Remanencia y campo coercitivo, para los cuatro ciclos, de hilos amorfos ricos en hierro recocidos en un horno.
- 4 -. Remanencia y campos coercitivos (cuatro ciclos) de hilos ricos en hierro recocidos con corriente continua.
- 5 -. Remanencia y campo coercitivo (cuatro ciclos) para hilos amorfos recocidos en un horno con campo transversal. Comparación con los resultados obtenidos para un hilo de la misma composición sometido a un proceso cold-drawn.
- 6 -. Efecto de la longitud sobre la remanencia axial en hilos ricos en hierro.

- 7 -. Efecto de la tensión y torsión sobre la remanencia axial y el campo coercitivo en hilos ricos en hierro y de magnetostricción casi nula.
- 8 -. Efecto de la flexión sobre remanencia y campo coercitivo en hilos ricos en hierro.
- 9 -. Estudio del efecto magnetoinductivo en hilos amorfos de magnetostricción casi nula.

I -. Ciclos de histéresis axiales para hilos de diferente composición

La figura 3 muestra cinco ciclos de histéresis correspondientes a muestras de distinta composición. En figura 3a se ofrece el ciclo correspondiente al hilo de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$, de magnetostricción alta y positiva ($\lambda=3\cdot 10^{-5}$). Se aprecia claramente su carácter biestable. La imanación en la remanencia es $\mu_0 M_r = J_r = 0.687$ T; dado que estos hilos, la imanación de saturación es del orden de 1.6 T, se puede inferir que la mitad del hilo está imanado en dirección paralela al eje y la otra mitad en una dirección perpendicular a éste. El campo coercitivo tiene un valor de 8.55 A/m. No obstante, *el valor de este campo es dependiente de la frecuencia a la que se esté trabajando* (Zhukov, 1995 (3)). Se han encontrado unas dependencias del siguiente tipo:

$$H_c = H^* + A(H_0 \nu)^n \quad (6)$$

donde ν es la frecuencia, H^* es el campo *switch*, H_0 la amplitud máxima del campo magnético aplicado y A es una constante de proporcionalidad que depende de la masa de la pared magnética que propicia el cambio de imanación y de la acción de las corrientes de Foucault. Se ha encontrado que $n=1/2$ para hilos no biestables, $n=1$ para microhilos y $n=1/3$ para hilos biestables. Por consiguiente, a la hora de establecer comparaciones entre distintas muestras para tratar de obtener información a partir del campo coercitivo, conviene fijar tanto la frecuencia de medida como la amplitud del campo máximo. El ciclo de la figura 3a ha sido realizado a 40 Hz. La longitud de la muestra es de 14.1 cm.

La figura 3b muestra el ciclo correspondiente a un microhilo $\text{Fe}_{65}\text{B}_{15}\text{Si}_{15}\text{C}_5$, cuyo diámetro es de 20 micras (el hilo de la figura 3a tiene era de 125 micras). La frecuencia de medida es de 120 Hz. La longitud de la muestra es de 12.5 cm. Su campo coercitivo es de 71.03 A/m y su imanación de remanencia es de 0.974 T. El ciclo es claramente biestable, como el de la figura 3a, pero su remanencia y campo coercitivo son superiores a los de aquel. A pesar de que la frecuencia de medida es de 120 Hz, ello no implica que el campo coercitivo sea mucho más grande que en el hilo biestable de 125 micras, ya que si se sigue la ley (6) el campo a 40 Hz debería ser de 24 A/m. El incremento hay que atribuirlo a una mayor magnitud de las tensiones internas. La remanencia alta (0.974 T) indica que más de la mitad de la imanación en el hilo es paralela a su eje. Tanto en la muestra de la figura 3a como en la de la 3b, las longitudes son comparables, por lo que la diferencia de remanencia no es achacable a campos desimanadores.

En la figura 3c se representa el ciclo de histéresis de un hilo de magnetostricción casi nula, $\lambda = -0.08\cdot 10^{-6}$, de composición $\text{Co}_{68.1}\text{Fe}_{4.4}\text{Si}_{12.5}\text{B}_{15}$. Su diámetro es de 124 micras y su longitud de 31.8 cm. El ciclo ha sido realizado a 110 Hz. Se aprecia un campo coercitivo de 2.96 A/m y una remanencia axial de 0.352 T, valores más pequeños que en los casos anteriores. El ciclo no es biestable.

Si se elimina la pequeña cantidad de hierro presente en la composición de este último hilo, se

obtiene la composición $\text{Co}_{72.5}\text{Si}_{12.5}\text{B}_{15}$, cuyo ciclo se exhibe en la figura 3d. Su constante de magnetostricción es alta y negativa, $\lambda = -3 \cdot 10^{-6}$. El campo coercitivo es de 9.83 A/m (ha aumentado respecto del caso de la figura 3c) y su remanencia es de 0.184 T, menor que en el hilo de magnetostricción casi nula. El ciclo es casi biestable y ha sido medido a 110 Hz. El diámetro del hilo es de 125 micras y su longitud de 31.5 cm.

Comparando las figuras 3c y 3d se puede constatar que la biestabilidad está relacionada con magnetostricciones altas, esto es, con anisotropías grandes. El hilo rico en cobalto (figura 3d) presentaría una estructura de dominios consistente en un dominio central con imanación axial y un dominio externo con la imanación dispuesta en la dirección circular. La pequeña remanencia axial, 0.184 T, parece indicar que la imanación se dispone mayoritariamente en la dirección perpendicular al eje: el dominio central es más pequeño que el exterior, estando propiciada la existencia de éste por el acople de las tensiones internas y la magnetostricción (a causa de la magnetostricción) y la de aquel, a una competencia entre la anisotropía de forma y la magnetoelástica.

La figura 3e muestra el ciclo correspondiente a un hilo de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ (análoga a la de la figura 3a), de magnetostricción alta y positiva, que ha sido sometido a un proceso de reducción mecánica de su diámetro mediante trefilado (*cold-drawn*). Su diámetro es de 110 μm y su longitud de 25.2 cm. Nótese el incremento espectacular del campo coercitivo, $H_c = 2017$ A/m. La remanencia axial, $J_r = 0.737$ T, aumenta un poco respecto del hilo sin trefilar ($J_r = 0.687$ T). El incremento del campo coercitivo hay que atribuirlo a las tensiones que introduce el proceso de trefilado. El ciclo de histéresis correspondiente a este hilo no ha sido realizado en el montaje experimental descrito anteriormente, ya que los campos que produce el solenoide son de 200 A/m. Se ha utilizado el sistema de medida de ciclos de histéresis en corriente continua, del Instituto de Magnetismo Aplicado, que es capaz de aplicar campos del orden de KA/m.

II -. Ciclos de histéresis de hilos ricos en hierro en estado as-cast. Efecto de tensiones y torsiones.

Se ha utilizado en hilo de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ en estado as-cast, cuyo diámetro es de 131 μm y su longitud de 31.5 cm. Para longitudes tan grandes la influencia del factor desimanador, cuya magnitud es de 10^{-5} (Severino, 1992), es pequeña. Los ciclos se han medido a 110 Hz.

La figura 4a muestra el ciclo axial, claramente biestable. El campo coercitivo es de 18.06 A/m y la remanencia de 0.736 T (mayor que la del hilo de la figura 3a, cuyo diámetro era de 125 μm y su longitud de 14.1 cm, por lo que la diferencia hay que achacarla a efectos desimanadores).

La figura 4b muestra el ciclo $M_\phi - H_z$ (Matteucci). El campo coercitivo es de 17.21 A/m (casi igual al del ciclo axial) y la remanencia circular es de 0.064 T, es decir, muy poca imanación se dispone en la dirección circular.

La figura 4c muestra el ciclo $M_z - H_\phi$ (Wiedemann inverso). Es biestable. El campo coercitivo es de 97.42 A/m y la remanencia axial de 0.752 T, prácticamente igual a la del ciclo axial.

Dado que no se ha apreciado la existencia de ciclo circular, ¿qué conclusiones podemos extraer de estos ciclos?

La presencia de ciclos M_y-H_z y M_z-H_y sugiere la presencia de *anisotropías intrínsecas de torsión*, que fuerzan a la imanación a formar ángulos intermedios entre 0° y 90° . La pequeñez de la remanencia M_y-H_z (0.064 T) frente a la M_z-H_y (0.752 T), coincidente ésta con la remanencia axial, sugieren que estas anisotropías de torsión son pequeñas en comparación con las radiales, axiales y circulares de origen térmico, por lo que la imanación forma, en el dominio interno, ángulos próximos al eje. Esto queda ratificado por el valor del campo coercitivo, $H_c = 97.42$ A/m, valor grande y que debe alcanzar el campo circular H_y para situar la imanación perpendicular al eje del hilo. La ausencia de ciclo circular M_y-H_y *implica una fuerte anisotropía radial* en el dominio externo (el campo H_y sería perpendicular a la imanación en este dominio). La biestabilidad axial, esto es, el cambio brusco del sentido de la imanación axial, es inducido tanto por el campo axial como por el circular.

La **figura 5** muestra el efecto de tensiones y torsiones sobre el ciclo axial de este hilo rico en hierro, de mangetostricción positiva. La **figura 5a** ofrece el resultado de aplicar una tracción axial de 93.7 MPa. La remanencia aumenta a 1.190 T y el campo disminuye a 13.19 A/m (respecto del hilo sin tensionar). Esto indica que aumenta el tamaño del dominio interno (de imanación axial) a expensas del externo (de imanación radial), debido al giro progresivo de la imanación en este último, en la dirección del eje fácil introducido por la tensión externa. La disminución del campo coercitivo hay que atribuirlo a una competencia entre la tensión externa y la aplicada.

La **figura 5b** muestra el efecto de una torsión de la muestra en el sentido de las agujas del reloj. El hilo se retuerce 20° , que equivale a 0.35π rad/m. Se aprecia un aumento pequeño de la remanencia ($J_r = 0.784$ T) y del campo coercitivo ($H_c = 18.89$ A/m), respecto del hilo sin torsionar. Si se torsiona el hilo en la misma medida, *pero en sentido contrario*, esto es, -20° , se aprecia una disminución tanto del campo coercitivo (16.69 A/m) como de la remanencia (0.728 T). La **figura 5c** muestra el ciclo. ¿Por qué esta asimetría? Una torsión exterior introduce un eje fácil en dirección helicoidal, esto es, formando 45° con la dirección axial y con la dirección circular. Una torsión en sentido contrario introducirá un eje fácil perpendicular a éste. El aumento de la remanencia axial en un caso (**figura 5b**) y la disminución en otro (**figura 5c**) sugiere la presencia de una anisotropía en dirección circular que tira de la imanación en su dirección. Esto queda más claro al analizar los ciclos Matteucci (M_y-H_z) bajo torsión. La **figura 6a** muestra este ciclo cuando no se aplica torsión. Si se torsiona $+20^\circ$ (**figura 6b**) se incrementa el campo coercitivo y la remanencia. Torsionando en sentido contrario, -20° , (**figura 6c**) la remanencia y el campo coercitivo disminuyen. Estos resultados pueden interpretarse en función de la presencia de anisotropías circulares, relacionadas con la tensión interna circular de origen térmico que aparece durante el proceso de solidificación del hilo (Velázquez, 1991).

III -. Remanencia y campo coercitivo de hilos amorfos ricos en hierro recocidos en un horno.

Hasta ahora hemos investigado las propiedades magnéticas de los hilos as-cast, cuyas anisotropías son del orden de 10^3 Jm⁻³. Un proceso de recocido reduce la magnitud de estas tensiones y altera su distribución.

Se ha sometido un hilo de composición $Fe_{77.5}Si_{7.5}B_{15}$, de diámetro 131 micras y longitud 10 cm, a un recocido en un horno durante 1 hora a diferentes temperaturas, $T = 100^\circ\text{C}$, 200°C , 300°C , 400°C y 500°C . El hilo es de mangetostricción positiva y los ciclos se han medido a 100 Hz.

Las figuras 7 y 8 muestran los resultados obtenidos. Una característica importante a destacar es la *ausencia de anisotropías circulares*, es decir, el relajamiento de tensiones por calentamiento en un horno no propicia la creación de anisotropías circulares que impelan a la imanación a tomar esa dirección.

La figura 7a muestra la remanencia axial (del ciclo M_z-H_z). Va aumentando progresivamente con la temperatura de recocido desde un valor cercano a 0.7 T para el as-cast, hasta más de 0.8 T para el recocido a 400°C. Disminuye bruscamente a 0.08 T cuando la temperatura de recocido es de 500°C. La remanencia M_z-H_ϕ (figura 7c) muestra una tendencia similar (aunque el ciclo M_z-H_ϕ no existe cuando la temperatura de recocido es de 100°C). La figura 7b ofrece la evolución de la remanencia $M_\phi-H_z$. Se aprecia un incremento de la misma (salvo para la de 300°C) con el aumento de la temperatura de recocido.

La figura 8 muestra la evolución de los campos coercitivos con la temperatura de recocido. La figura 8a ofrece el campo coercitivo M_z-H_z . Se aprecia una tendencia general a disminuir con la temperatura de recocido y un súbito aumento para la temperatura de 500°C. La figura 8b presenta el campo coercitivo para los ciclos $M_\phi-H_z$. Tras una clara disminución para 200°C desde el valor alcanzado a 100°C, se incrementa levemente su valor para 300°C, vuelve a bajar para 400°C y aumenta de nuevo para 500°C. La figura 8c ofrece la evolución térmica del campo coercitivo M_z-H_ϕ . Tras incrementar su valor desde los 200°C a los 300°C, disminuye progresivamente al seguir aumentando la temperatura.

¿Cómo se interpretan estos resultados? En cada tipo de ciclos M_i-H_j , la remanencia informa sobre la forma de distribución de la componente i , M_i , de la imanación cuando el campo H_j es nulo. El campo coercitivo correspondiente a este ciclo es el necesario para lograr que la componente M_i sea nula. El valor de este campo dependerá de las anisotropías implicadas en el hilo y de su orientación relativa con respecto al campo H_j .

Teniendo en cuenta esto, los resultados de la figura 7 pueden interpretarse de la siguiente forma: un aumento de la temperatura relaja la magnitud de la anisotropía radial, con lo que se incrementa el valor de la remanencia axial (figuras 7a y 7c). La disminución de la remanencia cuando la temperatura de recocido es de 500°C debe interpretarse en función del incremento de la anisotropía radial; el origen de este aumento hay que buscarlo en las tensiones radiales que introduce un posible inicio de cristalización. La variación no monótona de la remanencia $M_\phi-H_z$ hay que atribuirla a la competencia entre las anisotropías de torsión intrínsecas en el hilo (debidas a que el gradiente de temperaturas en el proceso de solidificación del hilo no es perfectamente radial) y la anisotropía radial. Este efecto de competencia entre anisotropías queda reflejado en la evolución de los campos coercitivos (figura 8). Por ejemplo, a 500°C es cada vez más difícil mover la imanación axial mediante un campo axial debido al endurecimiento radial propiciado por el inicio de la cristalización (figura 8a). Sin embargo, el campo H_ϕ (figura 8c) lo tiene más sencillo debido al concurso de las anisotropías de torsión.

IV.- Remanencia y campo coercitivo para hilos ricos en hierro recocidos con corriente.

Otra forma de recocer el hilo es mediante el flujo de una corriente continua de determinada intensidad I durante un cierto tiempo t . El calentamiento se produce por efecto Joule.

Se han recocido hilos de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$, de 131 micras de diámetro y 15 cm de longitud mediante una intensidad de corriente continua $I = 440$ mA durante distintos tiempos: 11 segundos, 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, 10 minutos, 25 minutos, 1 hora, 2.5 horas y 6 horas. Dado que la cantidad de calor generado por efecto Joule es proporcional al tiempo de paso de la corriente, se producirán en la muestra diferentes incrementos térmicos. La figura 9 muestra la evolución de la remanencia y el campo coercitivo con el tiempo de recocido en segundos (se presenta éste en una escala logarítmica).

La figura 9a muestra la evolución de la remanencia. Un hecho a destacar es que este tipo de recocido, aún para el tiempo más pequeño (11 segundos) propicia la aparición de ciclos circulares M_z-H_z . La remanencia axial M_z-H_z es mayor que 1 T para todos los tiempos de recocido. El aumento respecto del caso as-cast (0.7 T) se interpreta como consecuencia de la relajación de las tensiones radiales por incremento térmico. Su valor no se mantiene constante con el tiempo de recocido sino que fluctúa en torno a los 1.2 T. La remanencia M_z-H_z es menor que la axial y su evolución con el tiempo de recocido es similar, excepto para 10 minutos en que baja bruscamente, decremento que coincide con el exhibido por el campo coercitivo (figura 9b). Nótese que para este tiempo de recocido disminuye la remanencia M_z-H_z , pero no lo hace la axial M_z-H_z . Ello se debe a que, para ese tiempo de recocido, aparece una anisotropía de torsión cuyo eje fácil se sitúa próximo a la dirección circular (con lo que será pequeña la componente axial de la imanación). Las remanencias alusivas a la componente circular de la imanación, $M_\phi-H_z$ y $M_\phi-H_\phi$ son más pequeñas (del orden de 0.4 T) que las anteriores. Indican la presencia de anisotropías en la dirección circular, cuyo valor varía de forma oscilante al aumentar el tiempo de recocido.

La figura 9b muestra la evolución de los campos coercitivos. Excepto el correspondiente al ciclo M_z-H_ϕ (el más alto), el resto tienen un valor y un comportamiento similares. Todos estos resultados hay que entenderlos a la luz de la presencia de un campo circular en el recocido, que propiciará una anisotropía circular, confrontándose con el efecto de la temperatura.

V -. Remanencia y campo coercitivo para hilos recocidos en horno con campo transversal.

La figura 10 muestra el campo coercitivo y la remanencia para muestras recocidas en un horno a la temperatura de 471°C o 469°C, durante 15 minutos, simultáneamente a la aplicación de un campo transversal de 7.8 KOe. Se han tomado dos tipos de muestras $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ de diámetros $\Phi = 125 \mu\text{m}$ y $\Phi = 122 \mu\text{m}$ (muestras tipo AF) y de $\Phi = 120 \mu\text{m}$ (muestras tipo DF), obtenidas por cold-drawn. Estas muestras han sido suministradas por la Dra. Wun-Fogle, del Naval Surface Warfare Center, en Maryland.

En las gráficas, el eje de abscisas muestra el tipo de muestra, cuya clave se encuentra en el recuadro de la gráfica, junto con las características de cada hilo. Todos los ciclos han sido ejecutados a 100 Hz, siendo triangular la forma de l campo alterno excitador. Los hilos son de longitudes diferentes, pero similares, por lo que la influencia del campo desimanador será prácticamente la misma.

La figura 10a ofrece los campos coercitivos para las muestras consideradas. El mayor campo coercitivo, del orden de 24 A/m, corresponde a los ciclos M_z-H_z y $M_\phi-H_z$ de la muestra DF (cold-drawn) recocida a 469°C sin campo transversal. Estos dos campos coinciden. Casi son idénticos también los campos coercitivos correspondientes a los ciclos M_z-H_ϕ y $M_\phi-H_\phi$.

Nótese que estas muestras, recocidas en un horno a 469°C-470°C durante 15 minutos *si presentan ciclos circulares*, a diferencia de los recocidos durante 1 hora a varias temperaturas (ver figuras 7 y 8). Parece que el parámetro tiempo es más determinante que la temperatura a la hora de inducir anisotropías circulares.

La aplicación del campo transversal de 7.8 KOe no parece modificar las características magnéticas. Para las muestras AF (muestras 2 y 4) se aprecia únicamente un incremento del campo M_z-H_ϕ cuando se aplica el campo transversal siendo prácticamente iguales los campos correspondientes a los otros ciclos. En cambio, para las muestras cold-drawn (DF, 3 y 5) el campo M_z-H_ϕ se mantiene constante al aplicar el campo transversal, disminuyendo el valor de los otros campos coercitivos.

La figura 10b muestra las remanencias de los diferentes ciclos. Para los hilos AF, de diámetro mayor ($\phi = 122-125 \mu\text{m}$), las remanencias M_z-H_ϕ y M_z-H_z apenas cambian por la aplicación del campo transversal. En cambio, para los hilos DF, de diámetro $\Phi = 110 \mu\text{m}$, estas remanencias aumentan al aplicar el campo transversal.

Las remanencias $M_\phi-H_z$ y $M_\phi-H_\phi$ disminuyen con el campo transversal, tanto para los hilos AF como los DF.

Estos resultados pueden interpretarse considerando que el campo transversal puede introducir un eje de anisotropía radial, con lo cual ha de disminuir la componente circular de la imanación. No obstante la magnitud del campo, el efecto del campo no es muy grande a causa de la acción destructiva de la temperatura.

VI -. Efecto de la longitud sobre la remanencia axial en hilos ricos en hierro.

La figura 11a muestra la remanencia axial de un hilo de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ y de diámetro $\Phi = 131 \mu\text{m}$ para diferentes longitudes. Los ciclos se han medido a 100 Hz. Se aprecia una clara disminución de la remanencia para longitudes menores de 10 cm, manteniéndose casi constante para longitudes superiores. Esta disminución hay que atribuirla a la influencia del campo desimanador. Cuanto menor es la longitud mayor es el campo desimanador (que es proporcional a la imanación de saturación multiplicada por un factor de 10^{-5}), que va dirigido en la dirección axial. Este campo tiene sentido opuesto a la imanación axial (en el dominio interno) por lo que tenderá a invertir su sentido para disminuir la energía magnética, disminuyendo, por tanto, el valor de la remanencia axial.

VII -. Efecto de la tensión y torsión sobre la remanencia axial y campo coercitivo en hilos ricos en hierro y en los de magnetostricción casi nula.

Vamos a analizar a continuación el efecto de las tensiones mecánicas sobre las propiedades magnéticas de hilos amorfos. La figura 11b muestra el efecto de una tensión axial sobre la remanencia axial para hilos ricos en hierro de diferentes longitudes. Los ciclos se han medido a 30 Hz. Se aprecia un aumento progresivo de la imanación desde valores próximos a 9.7 T hasta alcanzar los 1.5 T para tensiones del orden de 400 MPa. El hilo de menor longitud, $L = 20 \text{ cm}$, es el que muestra un menor incremento de la remanencia con la tensión. El efecto desimanador es el causante de ello.

La **figura 11c** representa la variación del campo coercitivo con la tensión axial. El hilo es rico en hierro, de 20 cm de longitud. Los ciclos se han medido a 30 Hz. Se aprecia una disminución hasta tensiones cercanas a los 100 MPa. Para tensiones superiores el campo coercitivo aumenta con la tensión.

Este efecto ha sido estudiado exhaustivamente por otros autores (Severino, 1992). En líneas generales, la disminución se interpreta como un efecto de la competencia entre la tensión externa y la tensión radial intrínseca. En hilos biestables suficientemente largos como para no considerar la influencia de los extremos, la inversión de la imanación se atribuye a la nucleación de una pared de 180° en la frontera de separación de los dos dominios (donde la anisotropia magnetoelástica alcanza un valor mínimo); la pared se propaga desde la frontera de los dominios hasta el centro del hilo (Hernando, 1993). La pared será tanto más fácil de nuclear cuanto menor sea la anisotropia magnetoelástica en la frontera de los dominios. Dado que dos anisotropías mutuamente perpendiculares equivalen a otra cuyo valor es la diferencia entre las dos de partida, al aplicar la tensión axial, perpendicular a la intrínseca radial, se reducirá el valor de la anisotropia intrínseca radial. La pared se nucleará más fácilmente. El campo coercitivo debe disminuir. El mínimo se alcanza cuando la magnitud de la tensión externa iguala a la de la radial (en este momento la anisotropia efectiva es nula). Si se sigue incrementando la tensión axial, el valor de la anisotropia efectiva aumentará (en valor absoluto). Ya que la energía necesaria para nuclear la pared depende de la raíz cuadrada de la anisotropia magnetoelástica, el aumento del campo coercitivo con la tensión sigue una ley $T^{1/2}$, siendo T la tensión externa.

La explicación expuesta arriba tiene en cuenta únicamente la presencia de anisotropías axiales y radiales. Pero, como sabemos, el hilo amorfo real presenta, además de éstas, anisotropías circulares y de torsión, por lo que la *anisotropia efectiva* creada en función de la tensión externa puede ser compleja. Ello se refleja en las pequeñas oscilaciones que se pueden apreciar en la rama ascendente de la **figura 11c**.

Este efecto de competencia de tensiones queda más patente en la **figura 12a** que representa la variación del campo coercitivo en función de la torsión. Se aprecian claramente dos mínimos.

La **figura 12b** muestra el incremento de la remanencia axial con la torsión, hasta un valor de saturación del orden de 1 T (la relación M_r/M_s será, por consiguiente, de 0.7, valor de coseno de 45°), lo cual indica que la imanación se dispone formando un ángulo de 45° con el eje del hilo.

La **figura 12c** muestra el aumento de la remanencia con la tensión para torsiones fijas (de 40° y 270°). Cuando la torsión es de 270° , el incremento de la remanencia con la tensión es menor, ya que el eje de torsión tiende a situar la imanación cerca de los 45° con el eje del hilo, y será tanto más difícil separar la imanación de esta posición cuanto mayor sea la torsión.

Las **figuras 13a y 13b** muestran el efecto de la torsión sobre un hilo amorfo de magnetostricción casi nula (y negativa) cuyo diámetro es de 120 micras y su longitud de 31 cm. Los ciclos se han medido a 100 Hz. Se ofrece la remanencia y el campo coercitivo para torsiones en un sentido y en otro. En este hilo de magnetostricción casi nula, el efecto de la torsión en sentido de las agujas del reloj y en sentido contrario, es prácticamente simétrico, ya que las anisotropías magnetoelásticas intrínsecas son pequeñas en comparación con las externas. La remanencia M_z-H_z es la que más varía con la torsión, aumentando desde 0.22 T hasta valores cercanos a 0.8 T, para torsiones del orden de 5π rad/m. Varía también la remanencia M_z-H_ϕ , aunque en menor medida que la anterior. La remanencia M_z-H_z y $M_\phi-H_z$ apenas varían con la torsión. El hecho de que cambien los ciclos M_z-H_ϕ y $M_\phi-H_z$ se debe a que la torsión fuerza a la imanación a moverse en el plano coordenado $z-\phi$, situación que potencia la señal de los ciclos mencionados.

VIII -. Efecto de la flexión sobre la remanencia y el campo coercitivo de hilos ricos en hierro.

Para medir los ciclos de histéresis de hilos sometidos a flexión, se ha construido un solenoide (cuya constante de campo es $3484 \text{ Am}^{-1}/\text{A}$ y su longitud es de 21 cm) y un secundario (de 340 vueltas y 6 cm de longitud) flexibles, de forma que se pueda someter al hilo a la flexión requerida.

La **figura 13c** muestra el campo coercitivo frente a la inversa del radio de curvatura R ; éste constituye una medida del grado de flexión. A mayor $1/R$ más flexionado se encuentra el hilo. La **figura 13c** representa el campo coercitivo frente a $1/R$, para un hilo rico en hierro, de longitud 8 cm. Los ciclos se han medido a 40 Hz. Se aprecia un aumento del campo coercitivo con la flexión, luego una disminución y un nuevo incremento. La aplicación de una flexión conlleva, en primera aproximación, la generación de una tensión axial de tracción en la mitad del hilo y una tensión axial de compresión en el resto del volumen. Ambas tensiones son no homogéneas en la sección del hilo, ya que su valor se incrementa con la coordenada radial. El mínimo apreciado en el campo coercitivo puede atribuirse, según el mecanismo explicado anteriormente, a la compensación de las tensiones radiales por parte de las tensiones de flexión.

La **figura 14a** ofrece la remanencia axial en función de la flexión (hasta $1/R \sim 0.5 \text{ cm}^{-1}$). Tras una disminución se constata un incremento hasta alcanzar valores de saturación superiores a los que presentaba para flexión nula. ¿Qué indica esto? Para flexiones del orden de $1/R \approx 0.1 \text{ cm}^{-1}$, la tracción de compresión fuerza la imanación a tomar una dirección perpendicular al eje del hilo (que es de magnetostricción positiva). Para flexiones superiores, el volumen de la zona en donde actúa la tensión de tracción debe ser mayor que el volumen de acción de la tensión de compresión, por lo que la remanencia crece.

La **figura 14b** muestra la evolución del campo coercitivo con la flexión (hasta $1/R \sim 0.2 \text{ cm}^{-1}$) para los ciclos M_z-H_z y M_z-H_ϕ , para un hilo de 12 cm de longitud. Ambos ciclos ofrecen una variación similar del campo coercitivo.

La **figura 14c** muestra la evolución de la remanencia para los ciclos M_z-H_z y M_z-H_ϕ . La remanencia M_z-H_z es mayor que la $M_\phi-H_z$ para todos los radios de curvatura. Si éste es muy alto, la remanencia $M_\phi-H_z$ es muy pequeña; esto corrobora que la imanación se dispone preferentemente en la dirección radial y axial.

IX -. Efecto magnetointuctivo en hilos amorfos de magnetostricción casi nula.

Los hilos amorfos de composición $\text{Co}_{68.1}\text{Fe}_{4.4}\text{Si}_{12.5}\text{B}_{15}$ tienen una magnetostricción casi nula, de signo negativo, cuyo valor es $\lambda = -0.8 \cdot 10^{-7}$ a temperatura ambiente. Su campo coercitivo es muy pequeño, del orden de 2 A/m y su imanación de saturación es del orden de 0.8 T. No exhiben biestabilidad, como es el caso de los hilos de magnetostricción alta, pero presentan un eje fácil axial en la región cercana al eje del hilo y un eje circular en el resto del hilo.

Estos hilos presentan el llamado *efecto magnetointuctivo*, que consiste en la aparición de un voltaje en los extremos del hilo, consecuencia de la variación temporal del flujo magnético circular. La magnitud del voltaje depende del valor de un campo magnético axial externo (Mohri, 1992). El

cambio de flujo circular aparecerá fácilmente en hilos de magnetostricción casi nula debido a su particular estructura de dominios. Un campo magnético axial exterior modificará esa estructura, aumentando el volumen del dominio interno, axial, a expensas del exterior, de imanación circular. Es de esperar que el voltaje magneoinductivo disminuya al aumentar el valor del campo. Esta disminución del voltaje con el campo exterior puede ser confundido con *magnetorresistencia* cuando en realidad se trata de *magnetoimpedancia* (Vázquez, 1995).

Se llama magnetorresistencia al cambio que sufre la resistencia eléctrica de una muestra cuando es sometida a un campo magnético exterior; su origen se atribuye a la dispersión de los electrones de conducción, cuyos espines forman diferentes ángulos con la imanación local de los centros dispersores. En el tipo de hilos que estamos estudiando se creyó encontrar un cambio de magnetorresistencia alterna (caída de voltaje debida al flujo de una corriente alterna), a 82 Hz, del orden del 12% y fue atribuida a procesos de dispersión de electrones (Mandal, 1993) cuando en realidad se debía al efecto magneoinductivo, es decir, a la dependencia de la susceptibilidad circular con el campo axial externo. Esta dependencia puede dar lugar a una *magnetoimpedancia gigante* (Velázquez, 1994). Se ha encontrado variaciones de magnetoimpedancia del orden del 300% cuando se aplican tracciones externas del orden de centenares de MPa, para frecuencias excitadores del orden de KHz (Knobel, 1995).

Impedancia de hilos amorfos

Cuando una corriente alterna de frecuencia f e intensidad I atraviesa un hilo aparece una impedancia Z dada por:

$$Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \quad (7)$$

donde r es la resistencia ohmica, L la inducción y $\omega = 2\pi \cdot f$. La inducción depende de la susceptibilidad circular χ_ϕ . Sea $H_\phi = I/4\pi R$ el campo circular promedio (R : radio del hilo), l la longitud del hilo y $S_\phi = R \cdot l$ la superficie atravesada por el campo la componente circular de la imanación. Por tanto, si Φ es el flujo magnético circular, se tiene:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{d}{dI} [\mu_o M_\phi S_\phi] = \mu_o R l \frac{dM_\phi}{dH_\phi} \frac{dH_\phi}{dI} = \frac{\mu_o l \chi_\phi}{4\pi} \quad (8)$$

ya que $dM_\phi/dH_\phi = \chi_\phi$ y $dH_\phi/dI = 1/4\pi R$. La impedancia queda:

$$Z = r \sqrt{1 + (\pi R^2 \frac{\mu_o \chi_\phi f}{2\rho})^2} \quad (9)$$

siendo ρ la resistividad eléctrica del hilo.

Por consiguiente, para una intensidad de corriente dada fluyendo a través del hilo, el voltaje en los extremos del mismo será proporcional a la resistencia ohmica, a la frecuencia de la corriente y a la susceptibilidad circular, e inversamente proporcional a la resistencia del hilo. El voltaje que aparece en los extremos del hilo tiene, pues, dos contribuciones: una *ohmica* (proporcional a r), de la misma fase que la corriente, y otra *inductiva*, desfasada en $\pi/2$ con la corriente y aumentando su valor en función de la frecuencia de esta. La parte ohmica es mucho mayor que la inductiva, pero si se elimina aquella mediante el puente de Wheatstone descrito anteriormente, ésta puede dar lugar al fenómeno de magnetoimpedancia gigante. Este efecto puede ser la basa de sensores magnéticos muy

sensibles.

Si llamamos $(MZ)_{\max} = (Z_{\max} - Z_{\min})/Z_{\min}$ (siendo Z_{\max} y Z_{\min} los valores máximos y mínimos de impedancia, respectivamente) al cambio relativo máximo de impedancia, tenemos, según (9):

$$(MZ)_{\max} = \frac{Z_{\max}}{Z_{\min}} - 1 = \sqrt{1 + (\pi R^2 \frac{\mu_0 (\chi_\phi)_{\max} f}{2\rho})^2} - 1 \quad (10)$$

donde $Z_{\min} = r$ (según (9)) y $(\chi_\phi)_{\max}$ es la susceptibilidad circular máxima. Dado que en estos hilos $\rho = 1.2 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$ y $R = 62 \mu m$, se obtienen valores de $(MZ)_{\max} = 40\%$ y 100% para $(\chi_\phi)_{\max} = 1000$ y 1600 , respectivamente. Estimaciones de la susceptibilidad máxima a partir de los ciclos de histéresis circulares $M_\phi - H_\phi$, medidos a 82 Hz, arrojan valores cercanos a 10^5 , por lo que es de esperar cambios muy grandes de la impedancia eléctrica en función del campo magnético aplicado.

A continuación, se presentan algunos resultados experimentales. La figura 15a muestra el voltaje obtenido en los extremos del hilo, de composición $Co_{68.1}Fe_{4.4}Si_{12.5}B_{15}$, de 31.8 cm de longitud y 124 micras de diámetro, cuando se hace circular por él una corriente alterna de 82 Hz, de forma triangular y cuya intensidad eficaz es de 6.54 mA. Se muestra la forma de la señal tal y como aparece en la pantalla del osciloscopio digital. La situación corresponde a una compensación parcial del voltaje ohmico (de forma triangular) mediante el equilibrado del puente de Wheatstone. La figura 15b presenta la situación alcanzada tras compensar totalmente el voltaje ohmico.

La figura 15c muestra el ciclo de histéresis circular $M_\phi - H_\phi$. El campo coercitivo es $H_c = 1.77$ A/m y la remanencia $J_r = 0.284$ T. El ciclo corresponde a la situación en que no se aplica campo axial, $H_z = 0$. La figura 16a ofrece el ciclo circular cuando se aplica un campo axial $H_z = 23$ A/m. El ciclo se inclina y la remanencia y el campo coercitivo disminuyen ($J_r = 0.05$ T y $H_c = 0.58$ A/m). La figura 16b representa el ciclo circular cuando el campo axial es $H_z = 168$ A/m. La inclinación aumenta, la remanencia disminuye ($J_r = 0.043$ T) y el campo coercitivo aumenta ($H_c = 1.94$ A/m).

Estos resultados se interpretan en función de la disminución de la susceptibilidad circular con el campo axial H_z : el dominio externo de imanación circular disminuye su volumen al incrementar el campo magnético su valor debido a la rotación de la imanación para orientarse paralelamente al campo.

La figura 16c presenta el efecto de una torsión de 18π rad/m sobre el ciclo circular. Se aprecia un aumento del campo coercitivo, $H_c = 2.22$ A/m, y una disminución de la remanencia, $J_r = 0.270$ T, respecto del hilo sin torsionar: la torsión crea un eje fácil helicoidal que fuerza a la imanación a salir de la dirección circular en el dominio externo.

Se ha estudiado también el valor del voltaje eficaz, en los extremos del hilo, en función del campo axial H_z , para distintos valores de la intensidad de corriente que atraviesa el hilo, y de tensiones y torsiones a que se somete éste. La figura 17a muestra el voltaje eficaz, V_{rms} , en función del campo axial para una intensidad eficaz de 6.54 mA. La frecuencia de la corriente es de 82 Hz. Cuando no se aplica tensión ni torsión, el voltaje cae desde 24 mV, para $H_z = 0$, hasta los 8 mV, para $H_z = 30$ A/m. La situación cambia si se aplican tensiones externas. Si ésta es de 185 MPa, el valor del voltaje inducido aumenta y no disminuye tan rápidamente con el campo H_z como lo hacía en el caso de no aplicar tensión. Esta disminución es más acusada cuando se aplica una torsión de 18π rad/m.

Los resultados pueden interpretarse si se tiene en cuenta que la aplicación de una tensión

externa producirá un eje fácil perpendicular al eje del hilo (debido a que $\lambda < 0$), por lo que la región de imanación circular aumentará de tamaño, con lo que debe esperarse un aumento de V_{rms} . El efecto de la torsión puede entenderse si se considera que ésta es equivalente a una tensión de tracción y otra de compresión mutuamente perpendiculares y formando un ángulo de 45° con el eje del hilo (Feynman, 1987). El efecto es sacar la imanación de la dirección circular; el campo H_z satura, entonces, la muestra más fácilmente y V_{rms} decae en su valor. La situación con tensión y torsión aplicadas simultáneamente es intermedia al caso de la aplicación de cada una de ellas por separado.

La figura 17b muestra el valor de V_{rms} frente a H_z para un valor de intensidad eficaz diez veces menor, $I_{rms} = 0.65$ mA. Nótese el pequeño valor de V_{rms} cuando hay implicadas torsiones y la ausencia de cambio con el valor del campo axial. Esto se explica si se considera que el campo H_ϕ máximo correspondiente a esta intensidad de corriente es menor que el coercitivo circular, por lo que la susceptibilidad circular estará definida en la zona reversible del ciclo de histéresis, que tiene un pequeño valor de $(M\phi)_{max}$, por lo que V_{rms} será pequeño. El máximo que se aprecia en las curvas correspondientes al caso sin tensión y con tensión debe estar relacionado con la variación del campo coercitivo con el campo magnético externo.

La figura 17c muestra el voltaje V_{rms} en función de la frecuencia de la corriente para dos valores de la intensidad de ésta. La dependencia es lineal, tal y como asegura la expresión (9). Una intensidad de corriente alta implica un campo circular más alto, que favorece la imanación en la dirección circular, por lo que es de esperar que el voltaje inducido sea mayor.

El efecto magnetoinductivo puede ser utilizado como sensor de campo magnético, teniendo la posibilidad de alterar su sensibilidad mediante tensiones y/o torsiones.

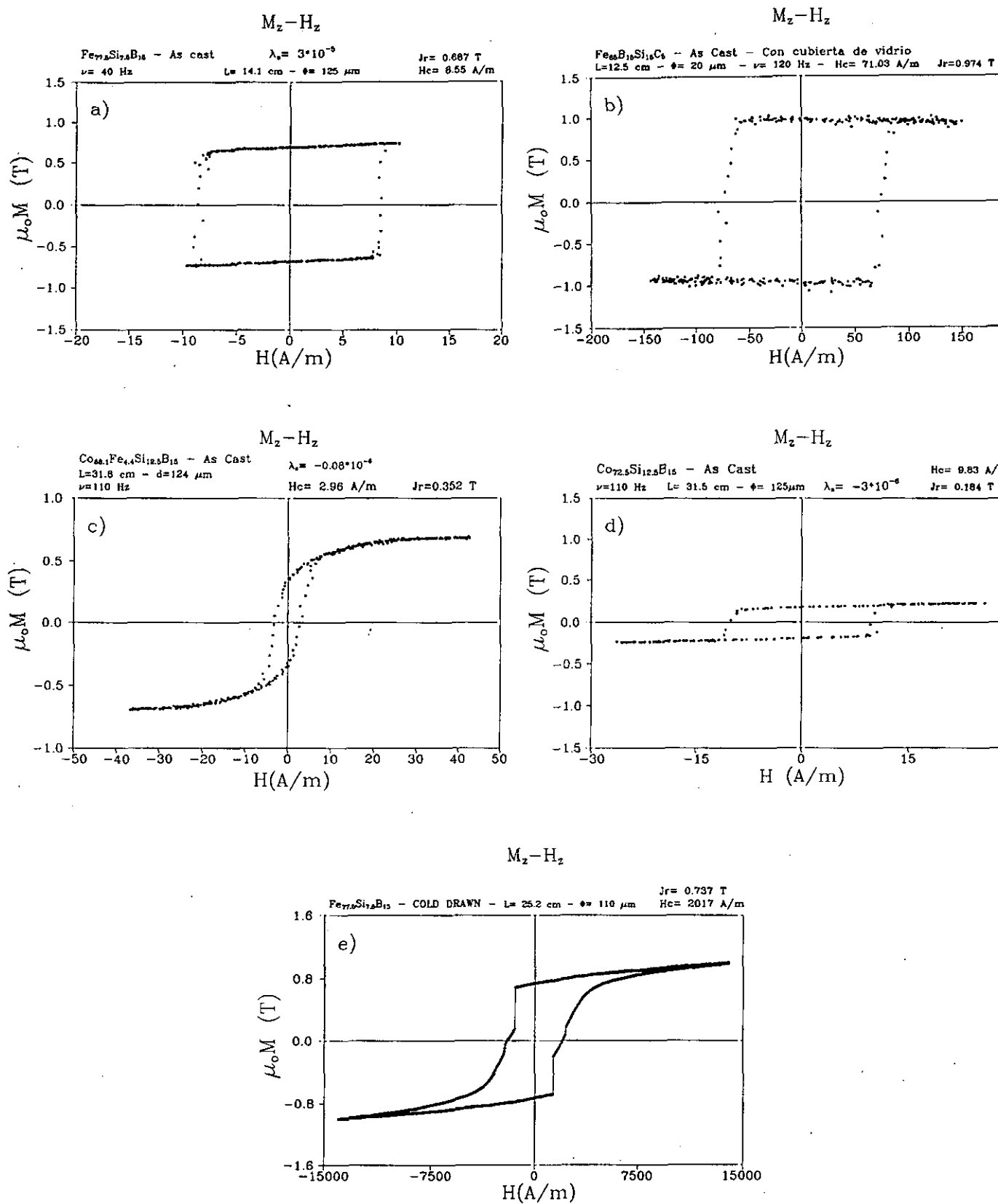


Figura 3 - Ciclos de histéresis axiales para diferentes tipos de hilos: a) rico en hierro, b) microhilo rico en hierro, c) cobalto, de magnetostricción nula, d) cobalto, de magnetostricción alta, e) rico en hierro, cold-drawn.

Figura 4 -. Ciclos de histéresis de hilo rico en hierro: a) M_z-H_z ; b) $M_\phi-H_z$; c) M_z-H_ϕ

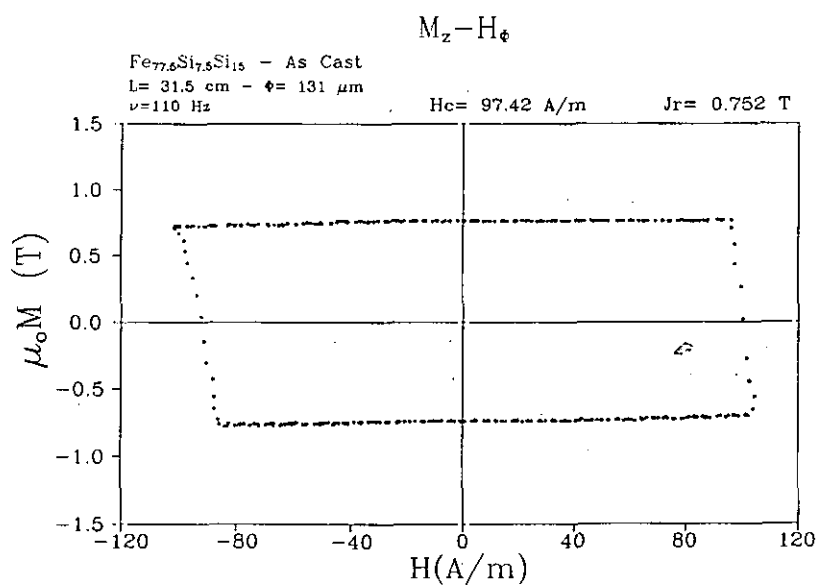
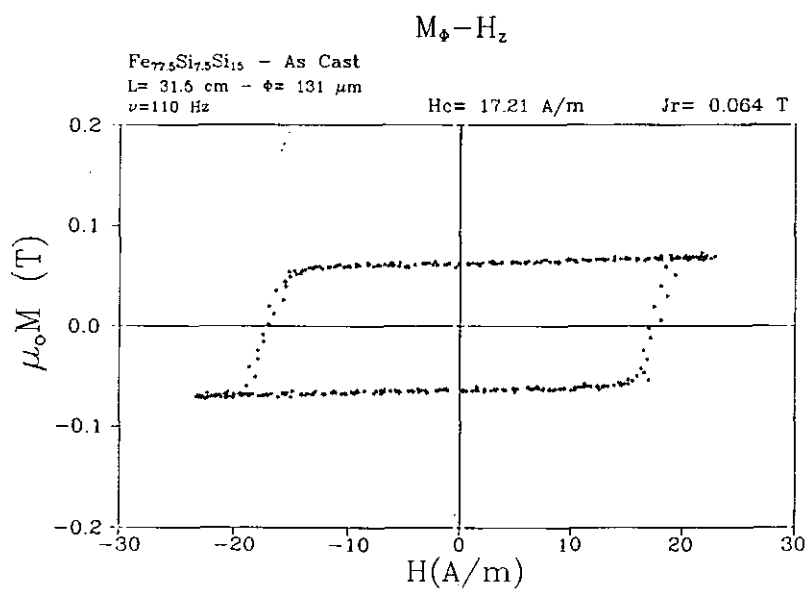
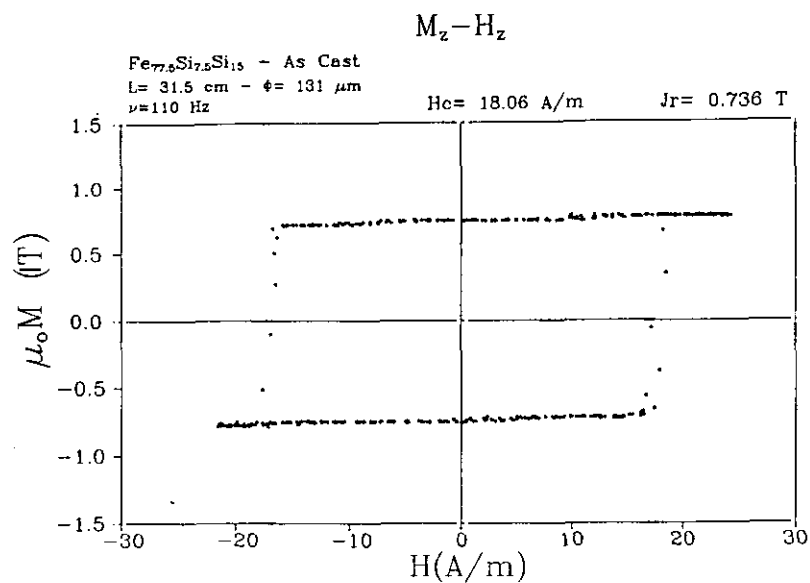
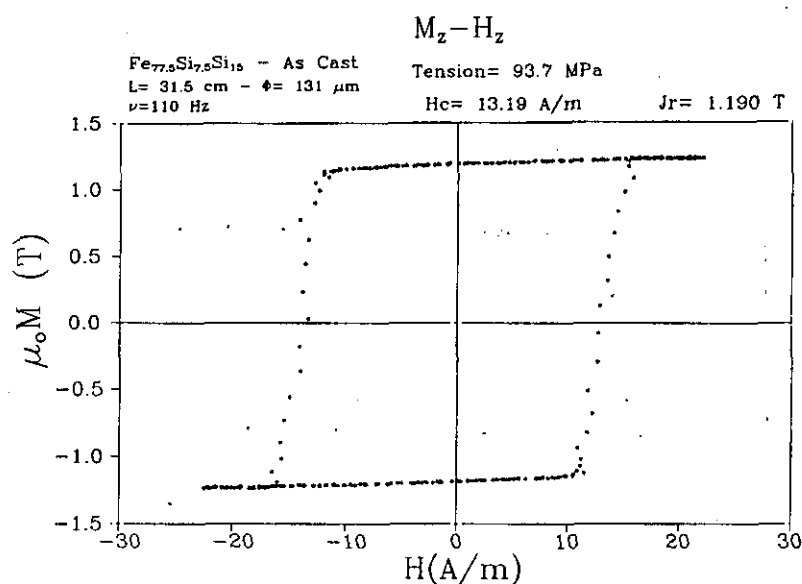
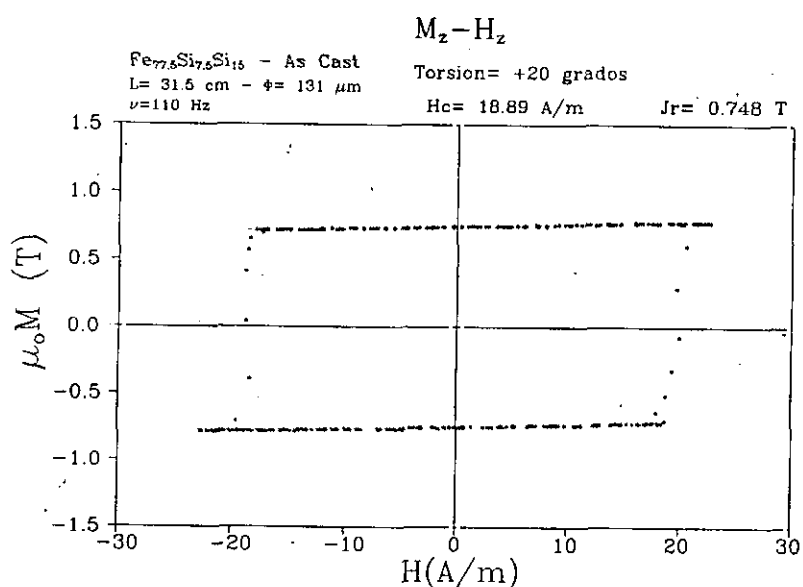


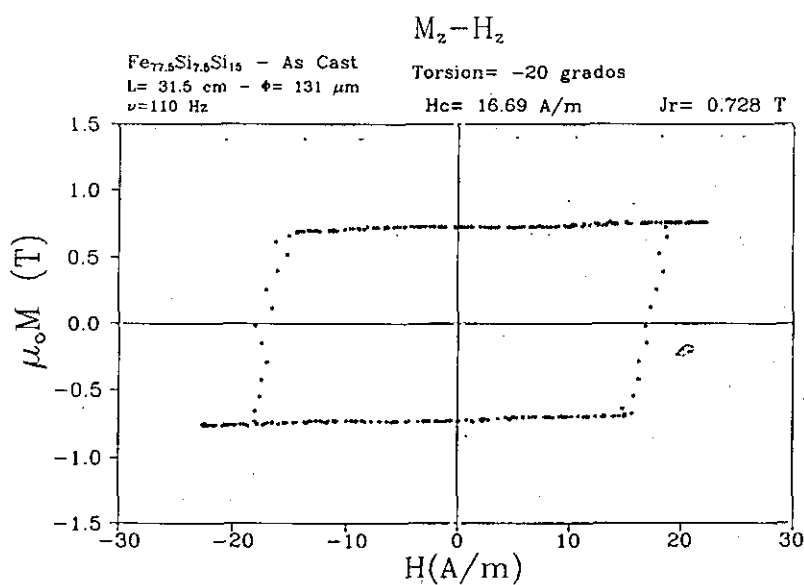
Figura 5-.- Efecto de tensiones sobre ciclos de histéresis axial de hilo rico en hierro: a) tracción axial de 93.7 MPa; b) torsión de + 20 grados; c) torsión de -20 grados.



a)

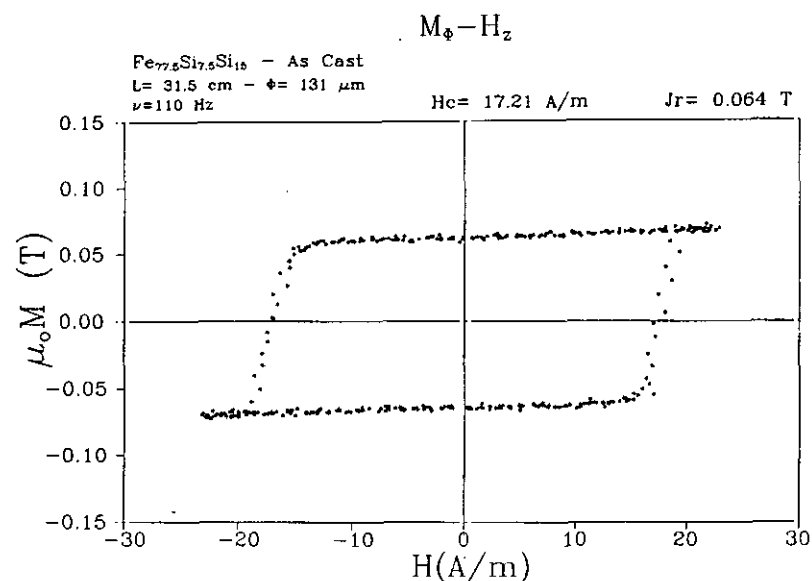


b)

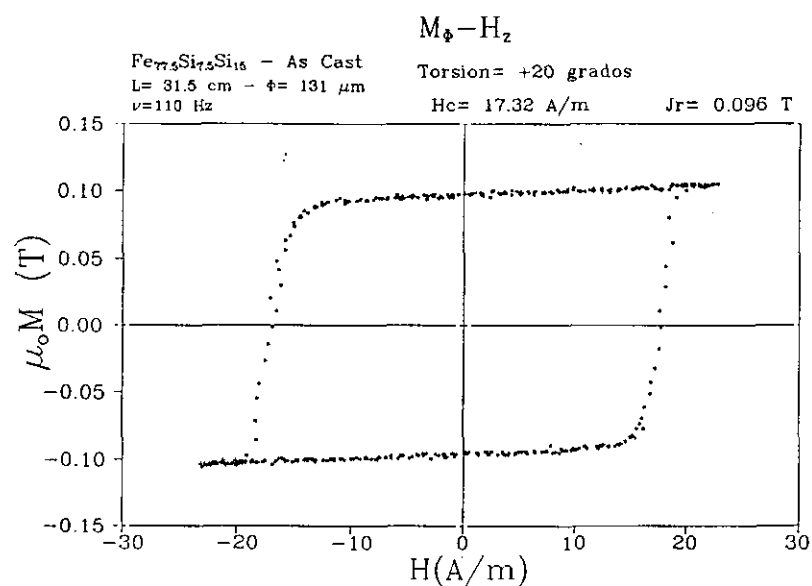


c)

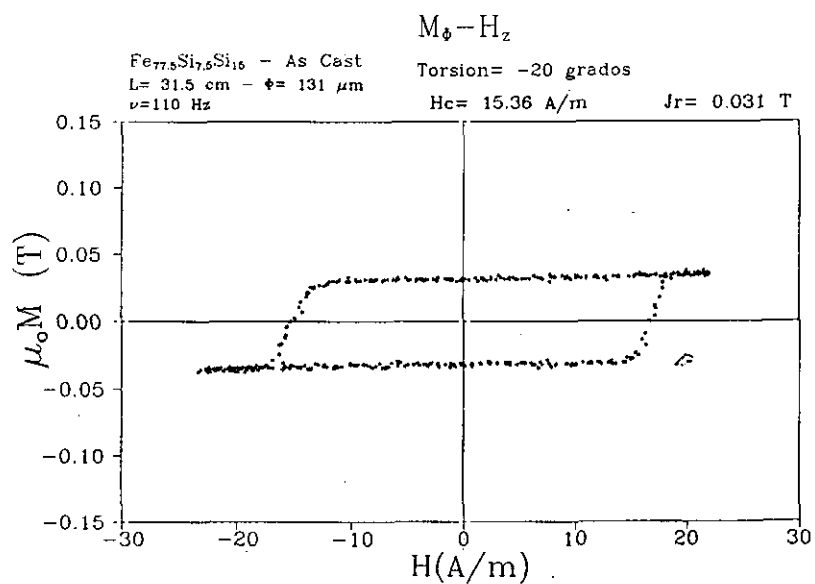
Figura 6 -. Efecto de la torsión sobre ciclos de histéresis $M_\phi-H_z$ de hilo rico en hierro: a) sin torsión; b) torsión de + 20 grados; c) torsión de -20 grados.



a)

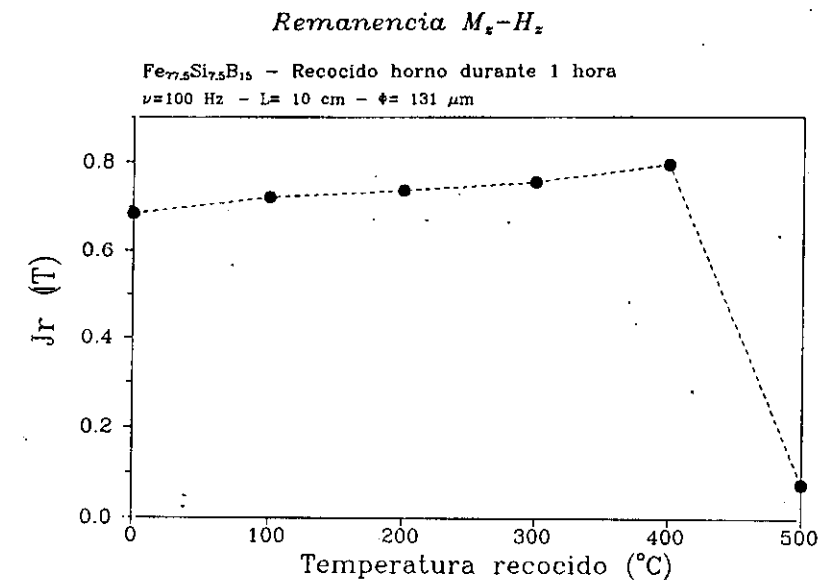


b)

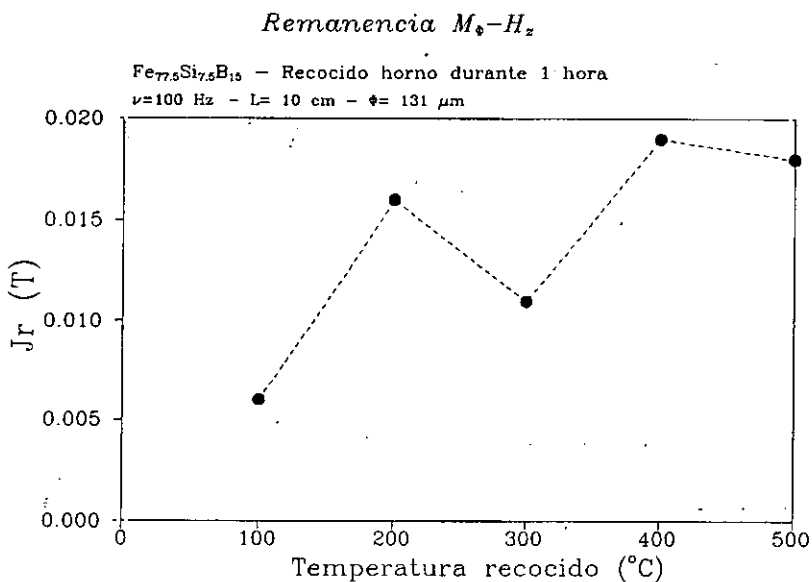


c)

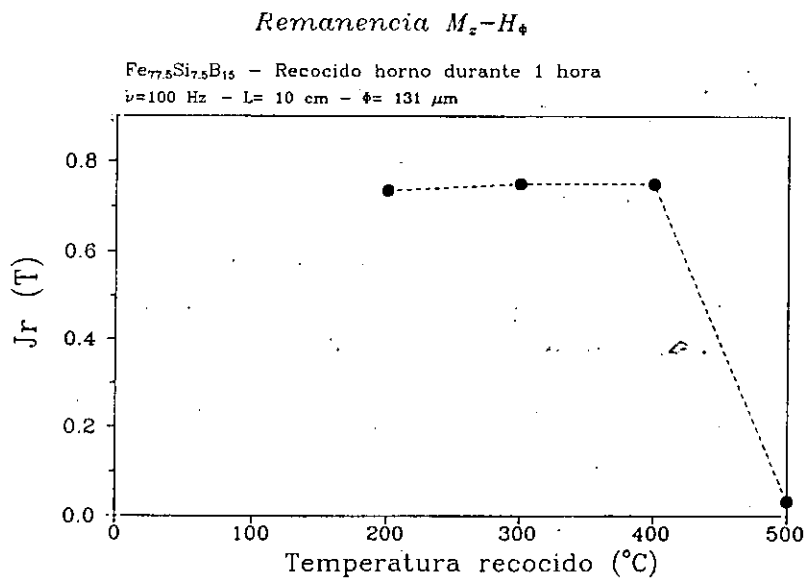
Figura 7 - Evolución de la remanencia de cada ciclo, de hilo rico en hierro, en función de la temperatura de recocido en horno: a) M_z-H_z ; b) $M_\phi-H_z$; c) M_z-H_ϕ



a)

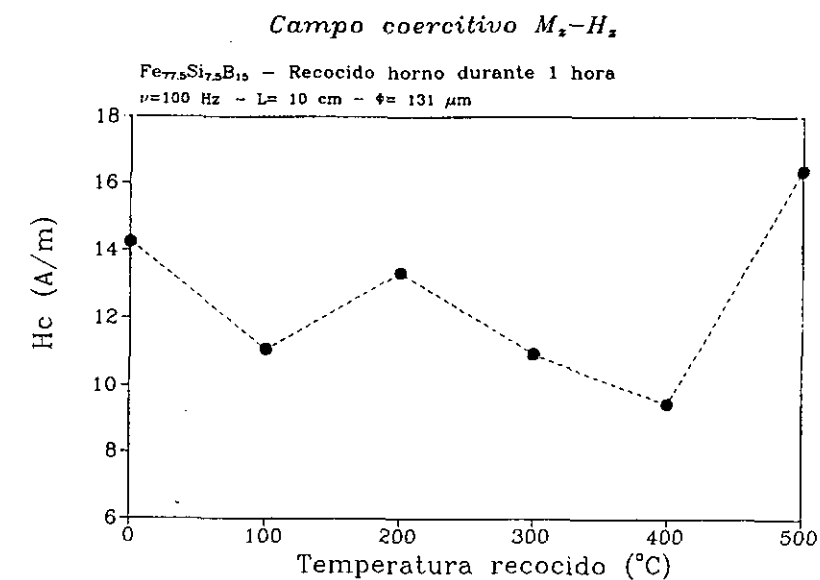


b)

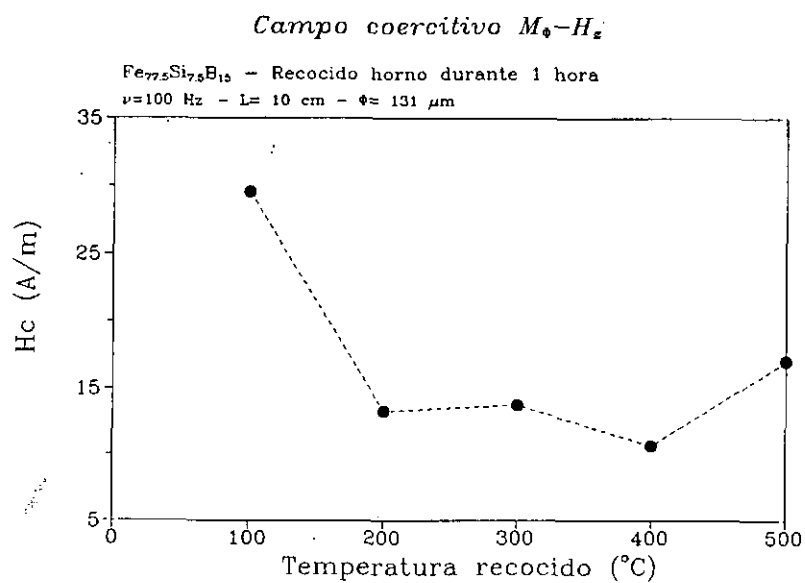


c)

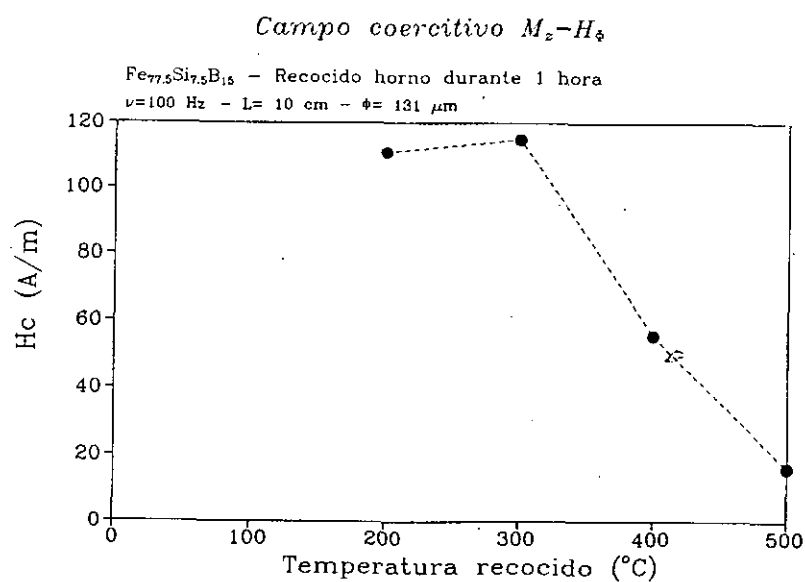
Figura 8 -. Evolución del campo coercitivo de cada ciclo, de hilo rico en hierro, en función de la temperatura de recocido en horno: a) M_z-H_z ; b) $M_\phi-H_z$; c) M_z-H_ϕ



a)



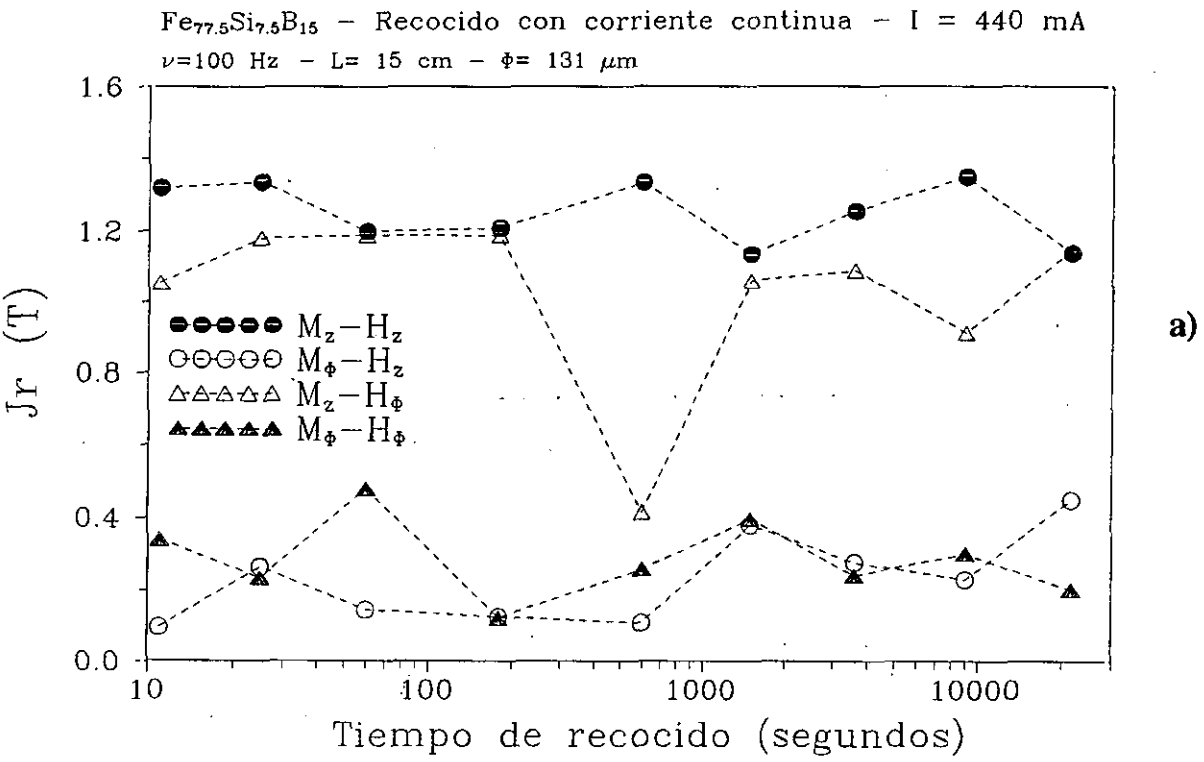
b)



c)

Figura 9 -. Evolución de las características magnéticas de cada ciclo, de hilo rico en hierro, en función del tiempo de paso de la corriente de recocido: a) remanencia; b) campo coercitivo.

Remanencia



Campo Coercitivo

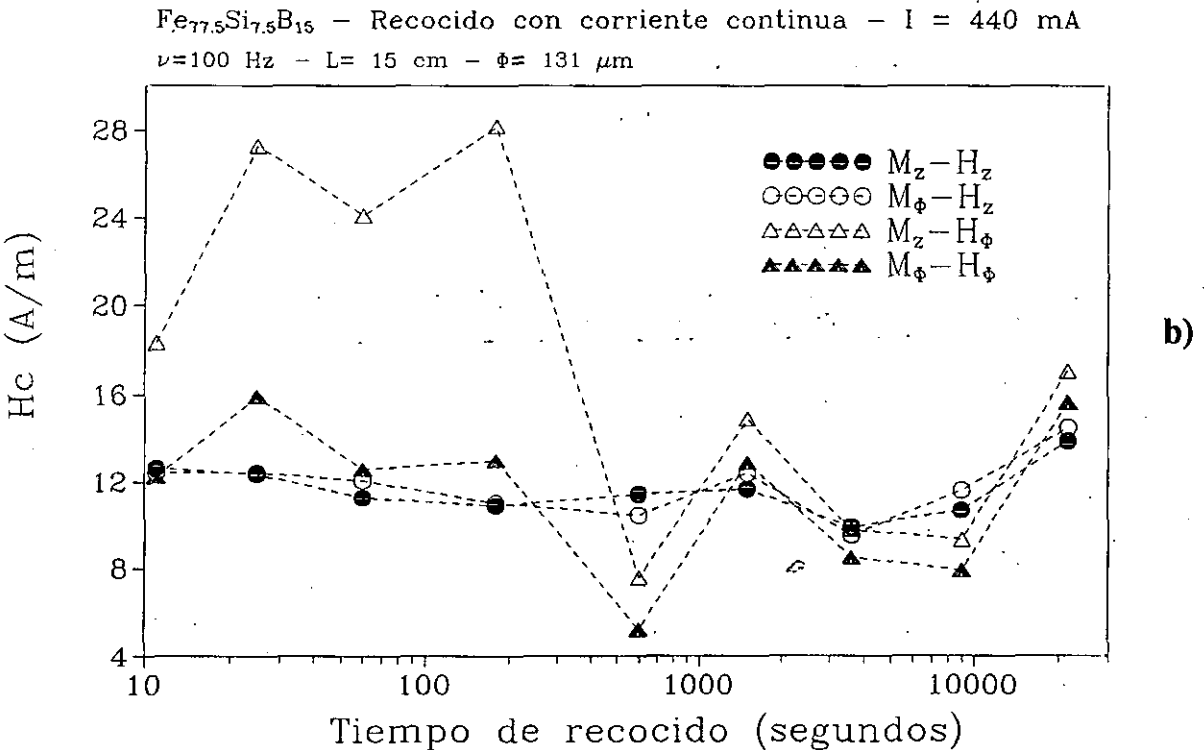
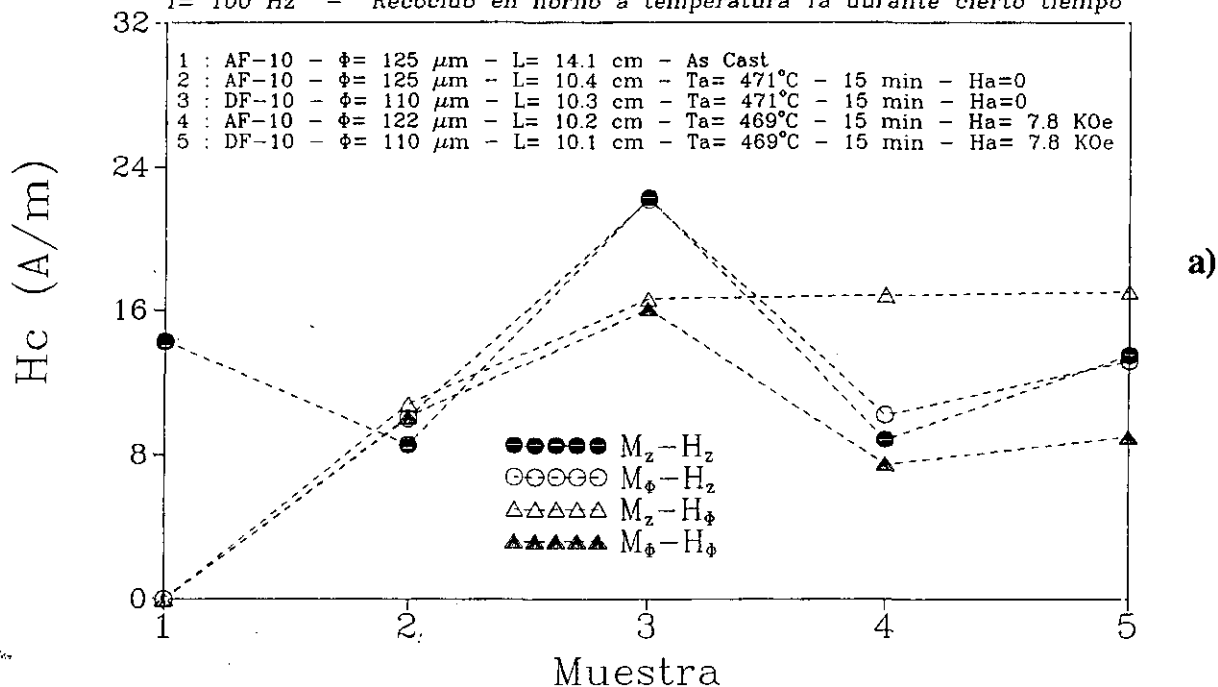


Figura 10 -. Evolución de las características magnéticas de cada ciclo, de hilo rico en hierro, en función del campo aplicado durante el recocido en horno: a) campo coercitivo; b) remanencia.

Campo Coercitivo

H_a : campo magnetico transversal durante el recocido

$f = 100$ Hz - Recocido en horno a temperatura T_a durante cierto tiempo



Remanencia

H_a : campo magnetico transversal durante el recocido

$f = 100$ Hz - Recocido en horno a temperatura T_a durante cierto tiempo

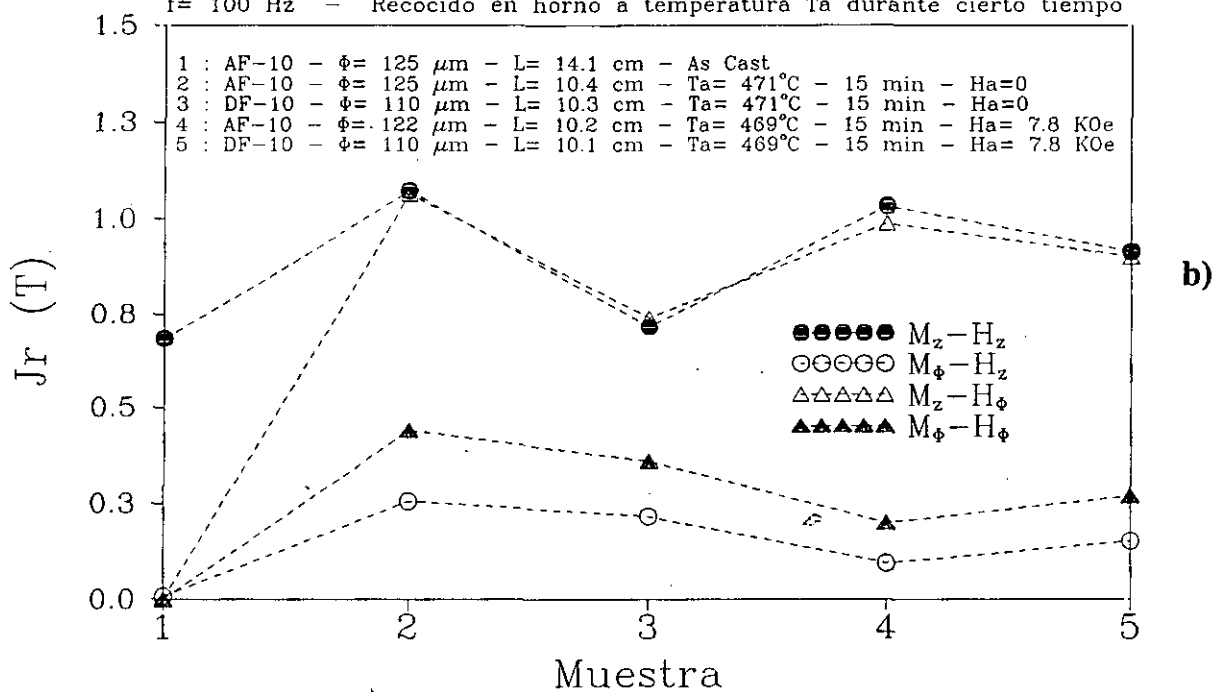


Figura 11 -. Hilos ricos en hierro: a) efecto de la longitud sobre la remanencia axial; b) efecto de tracción axial sobre remanencia axial para varias longitudes; c) efecto de tracción axial sobre campo coercitivo axial.

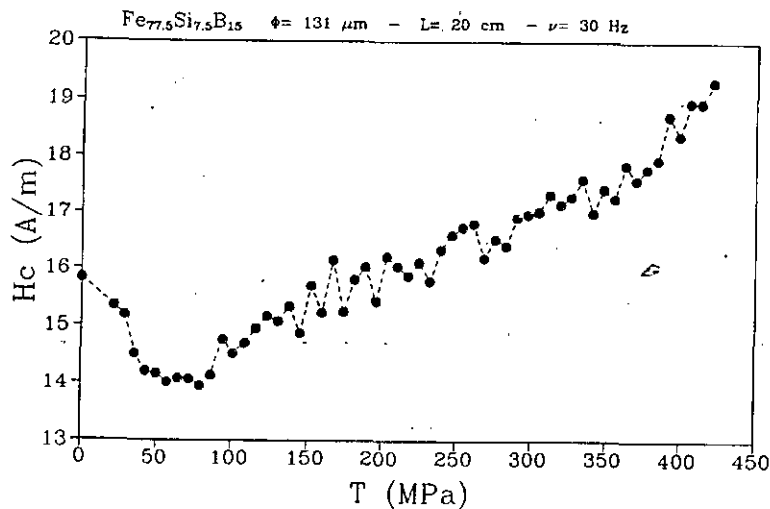
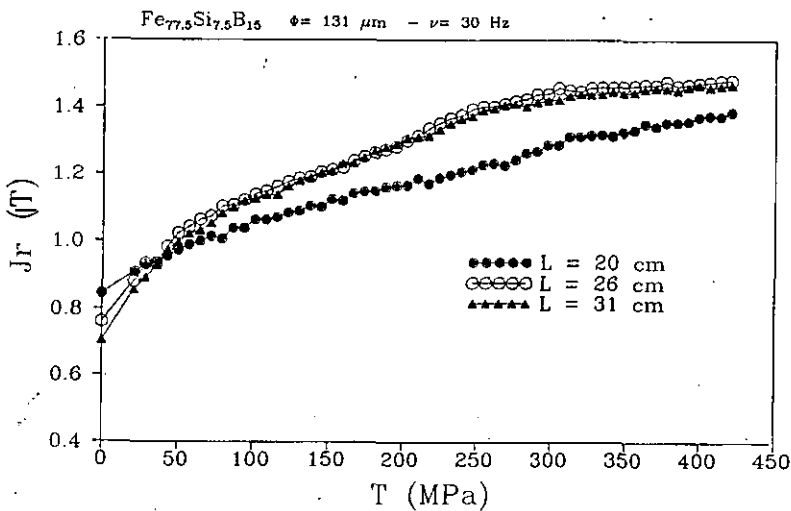
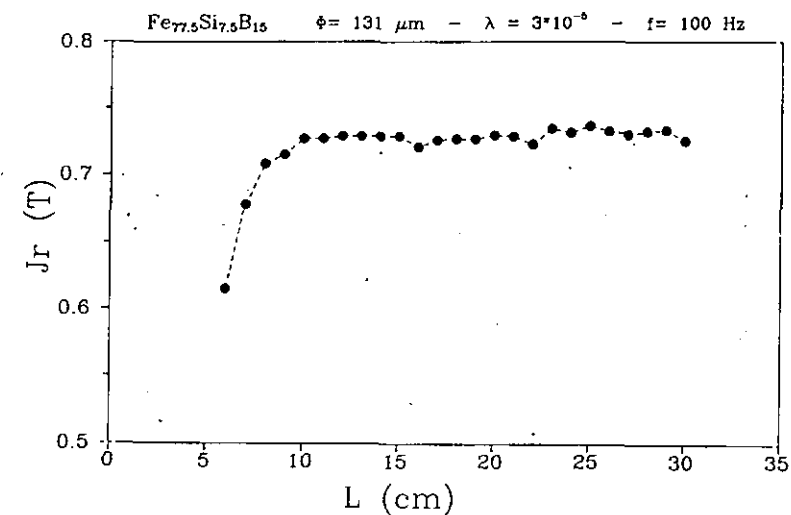
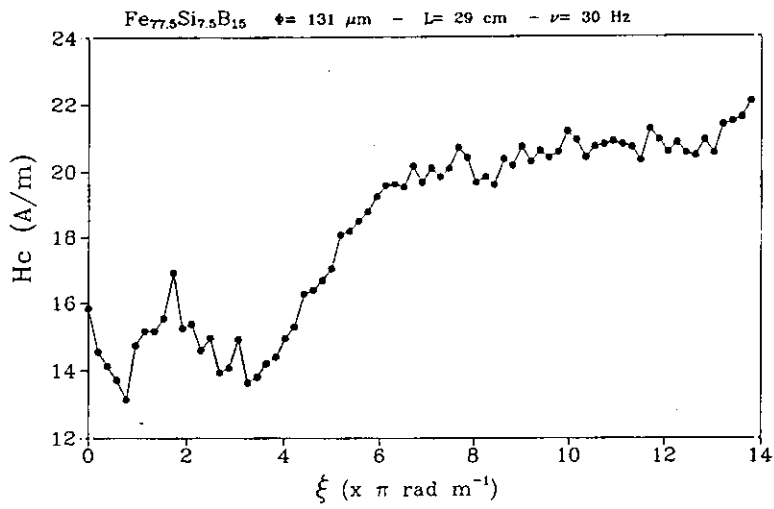
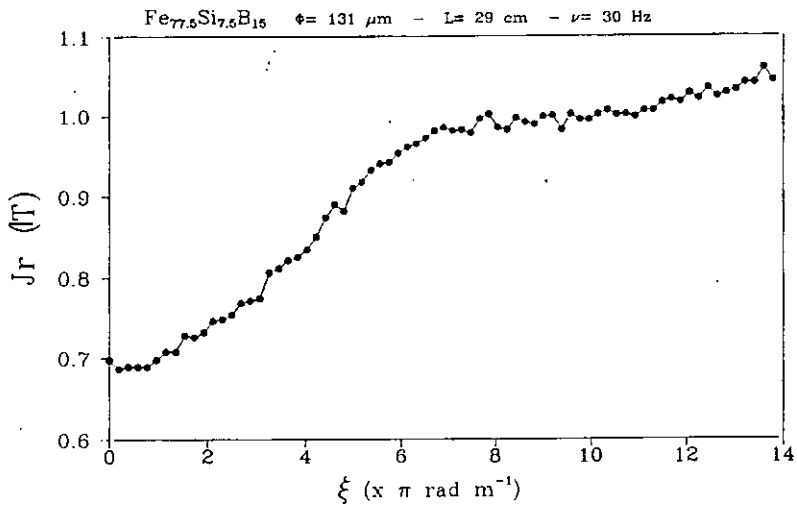


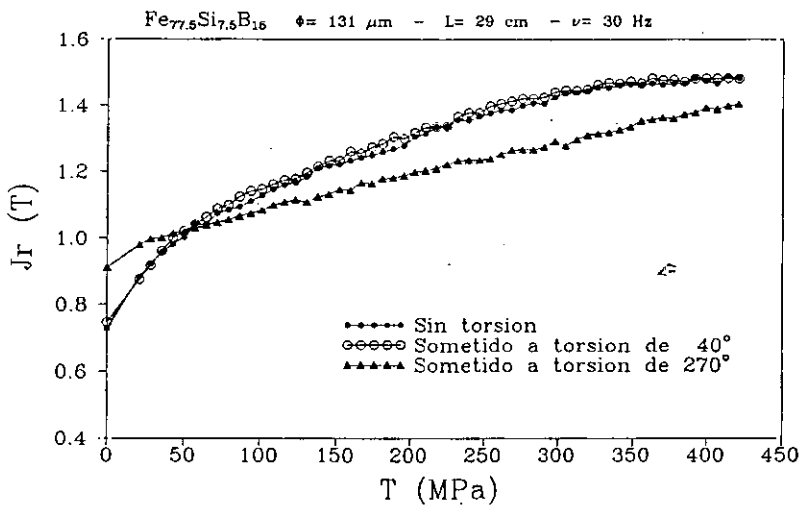
Figura 12 - Hilos ricos en hierro: a) efecto de la torsión sobre el campo coercitivo axial; b) efecto de torsión sobre remanencia axial; c) efecto de tracción axial sobre la remanencia axial para varias torsiones.



a)

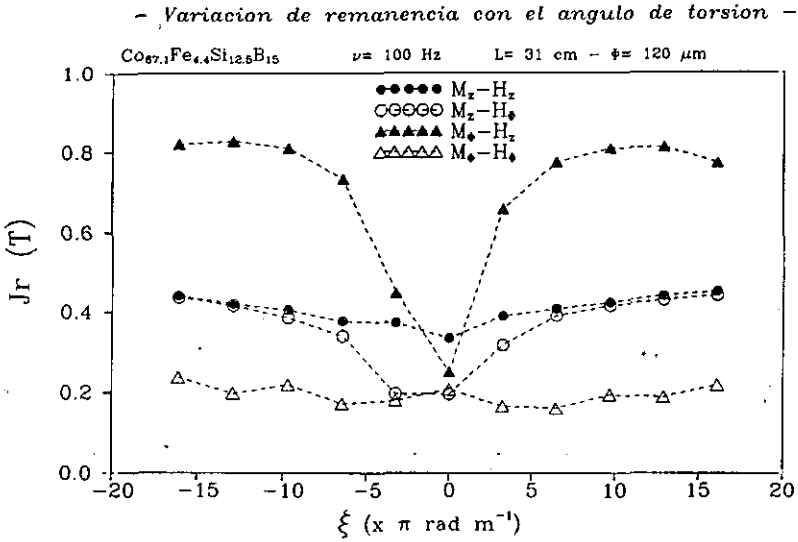


b)

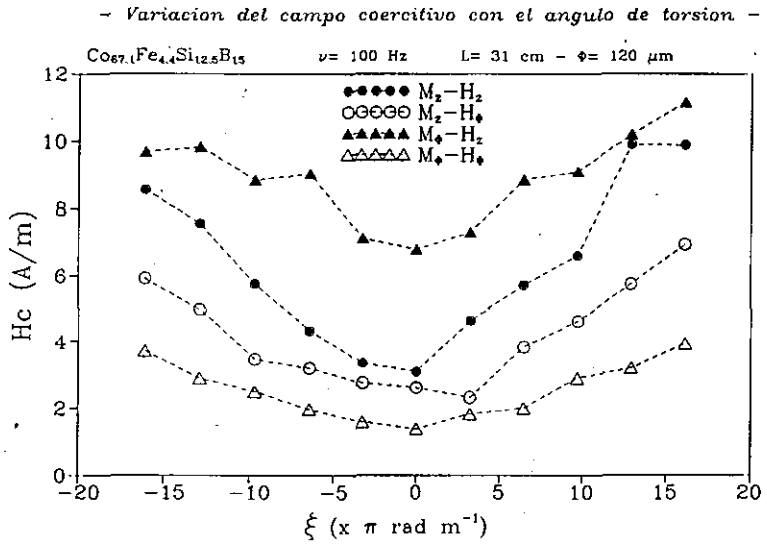


c)

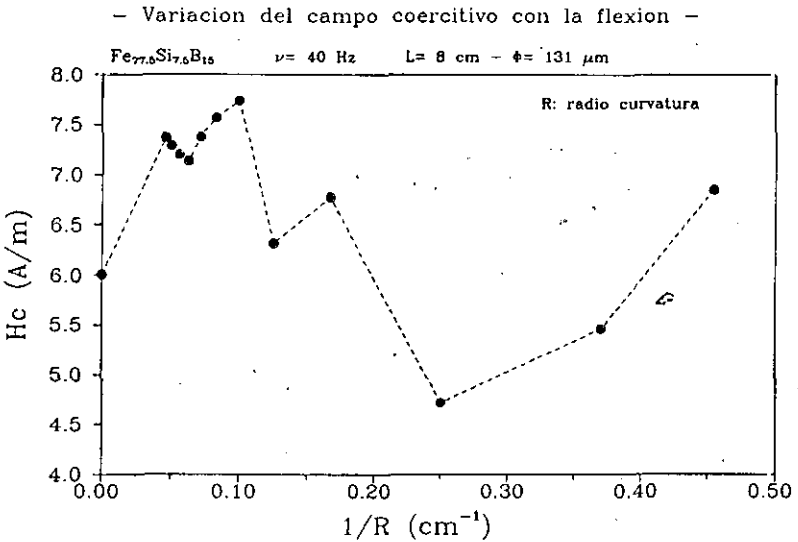
Figura 13 -. a) efecto de la torsión sobre la remanencia de los diferentes ciclos para hilos de cobalto de magnetostricción casi nula; b) efecto de la torsión sobre los campos coercitivos para el mismo hilo; c) efecto de la flexión sobre el campo coercitivo de un hilo rico en hierro.



a)

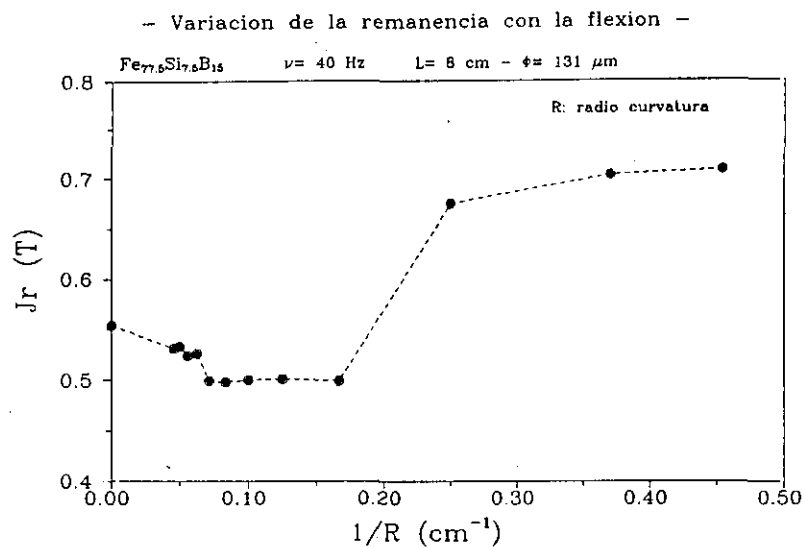


b)

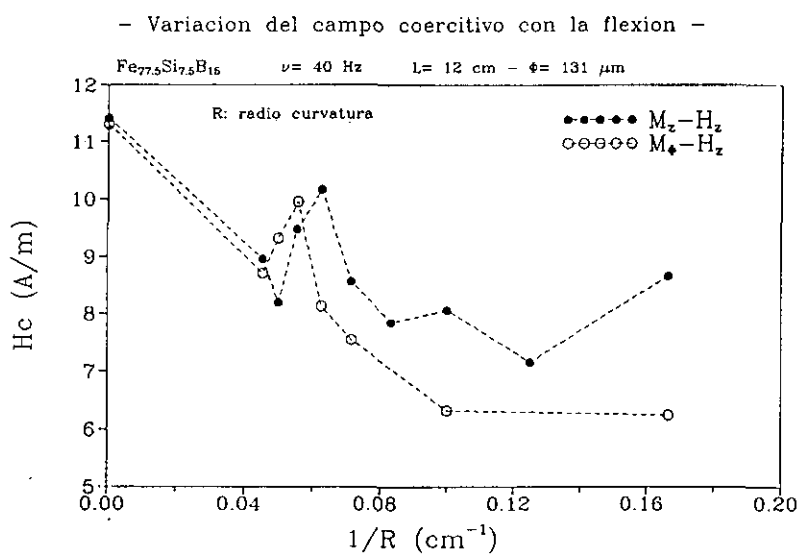


c)

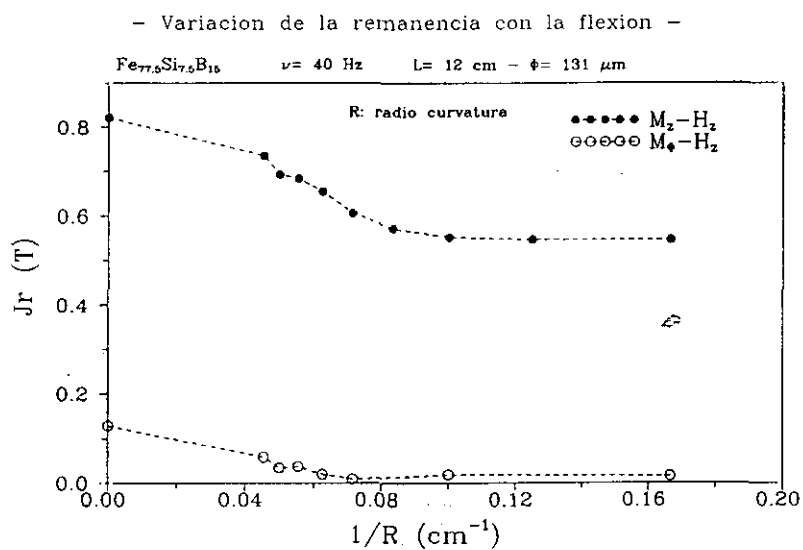
Figura 14 -. Efecto de la flexión sobre hilos ricos en hierro: a) remanencia axial; b) campo coercitivo axial; c) remanencia de los ciclos M_z-H_z y $M_\phi-H_z$.



a)

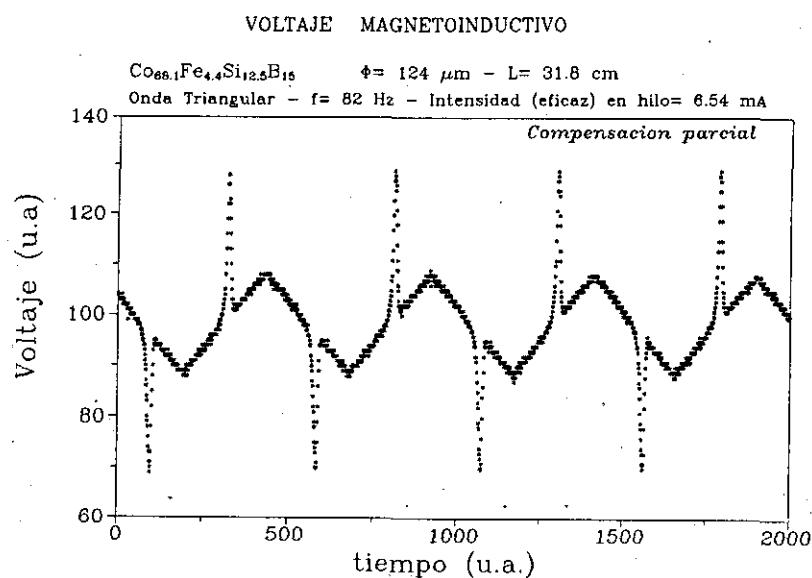


b)

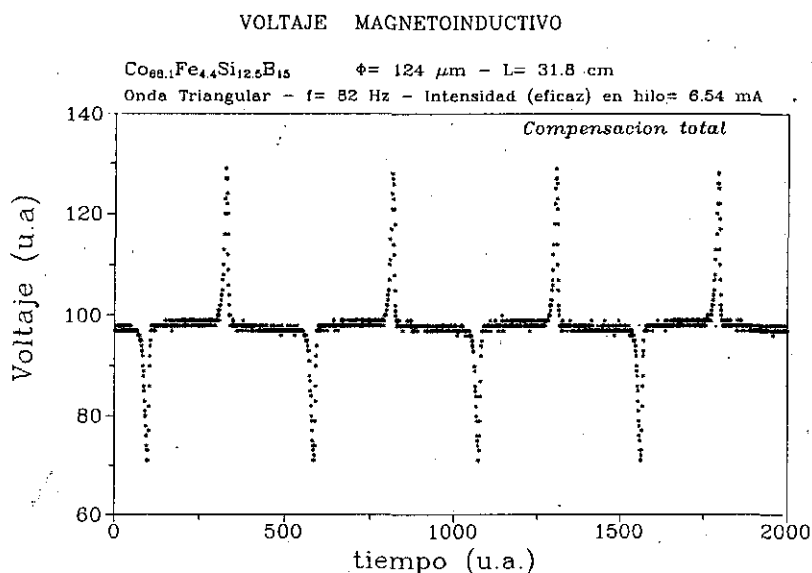


c)

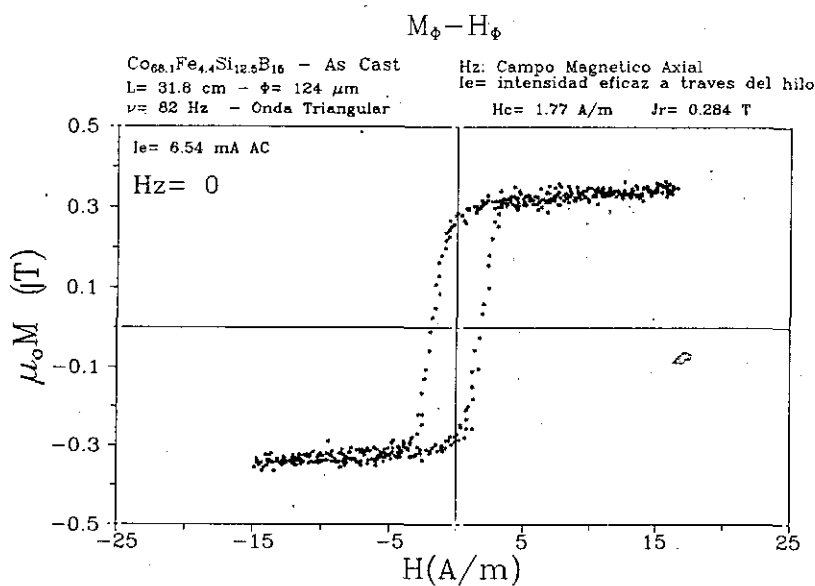
Figura 15 -. Hilos de cobalto de magnetostricción casi nula: a) compensación parcial de voltaje ohmico; b) compensación total ; c) ciclo circular M_ϕ - H_ϕ para campo axial $H_z=0$.



a)

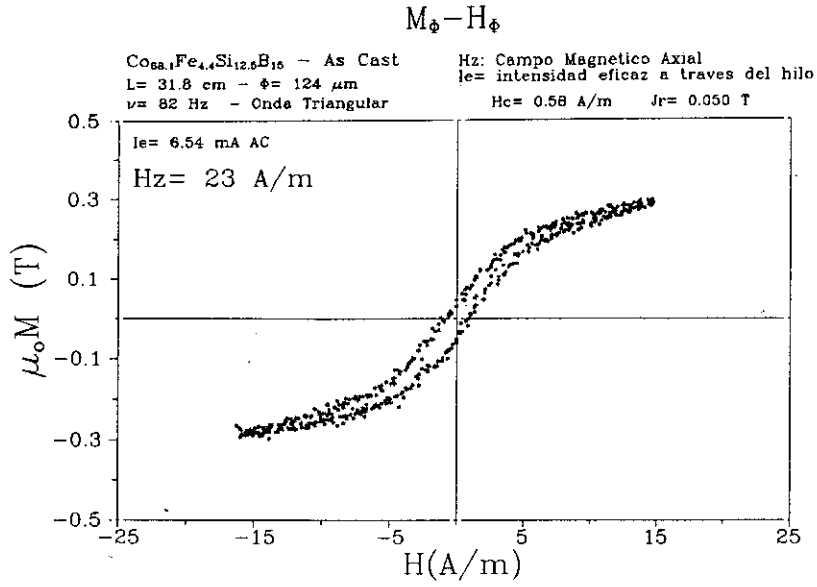


b)

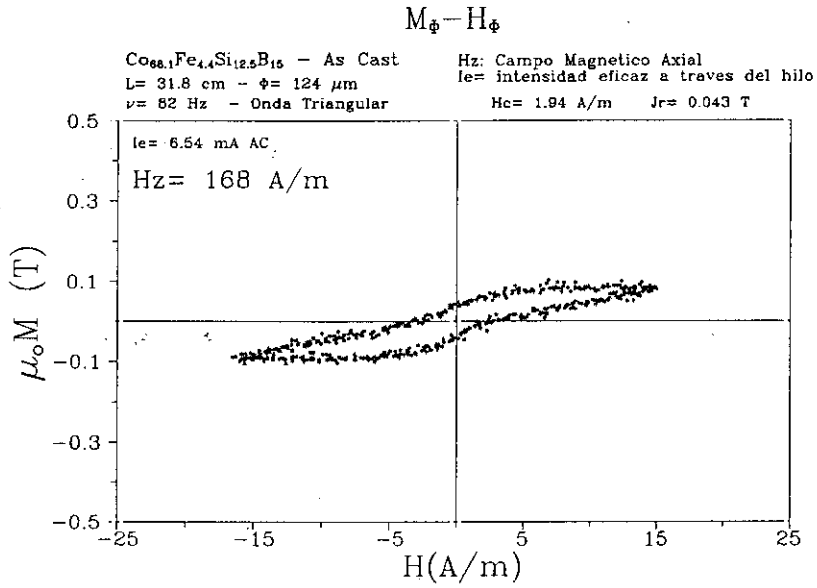


c)

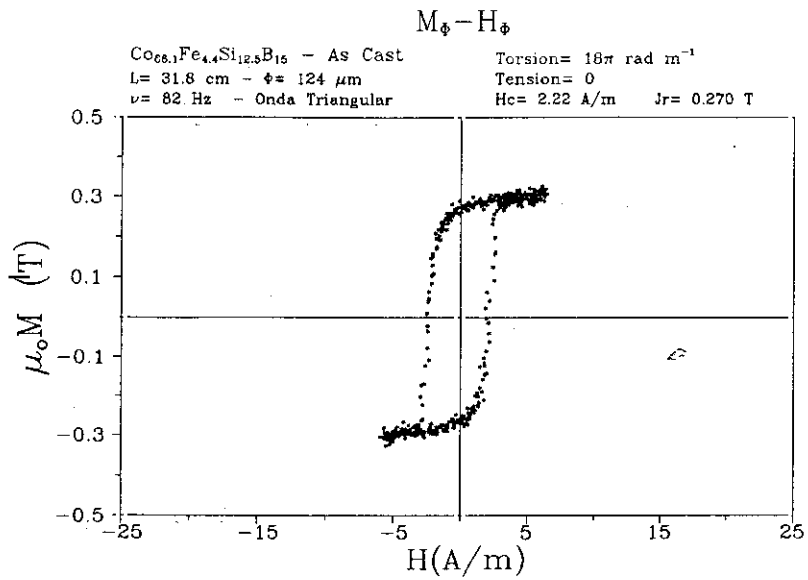
Figura 16.- Hilos de cobalto de magnetización casi nula: a) ciclo circular $M_\phi-H_\phi$ para campo axial $H_z = 23$ A/m; b) ciclo circular para $H_z = 168$ A/m; c) efecto de una torsión de 18π rad/m sobre ciclo circular.



a)

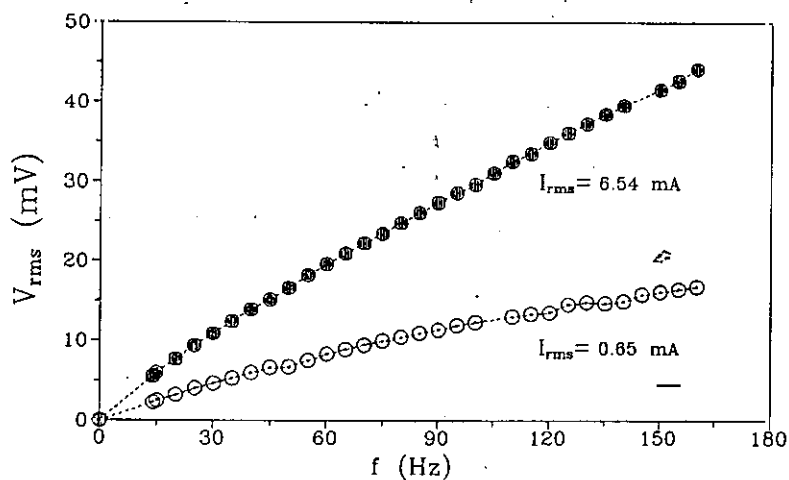
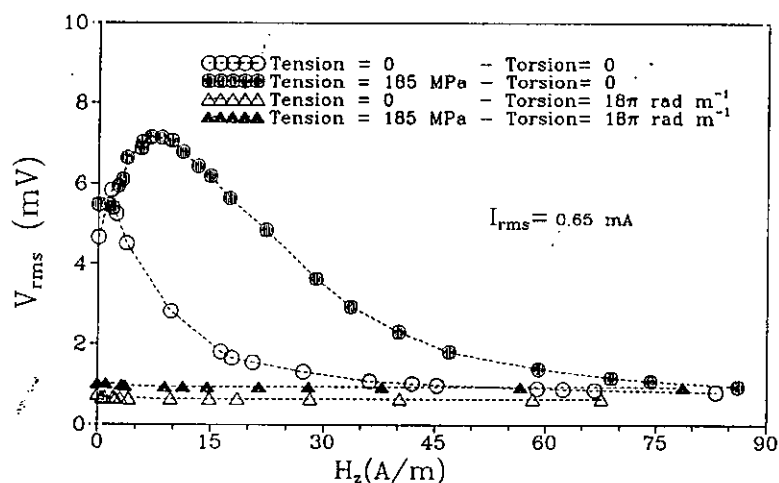
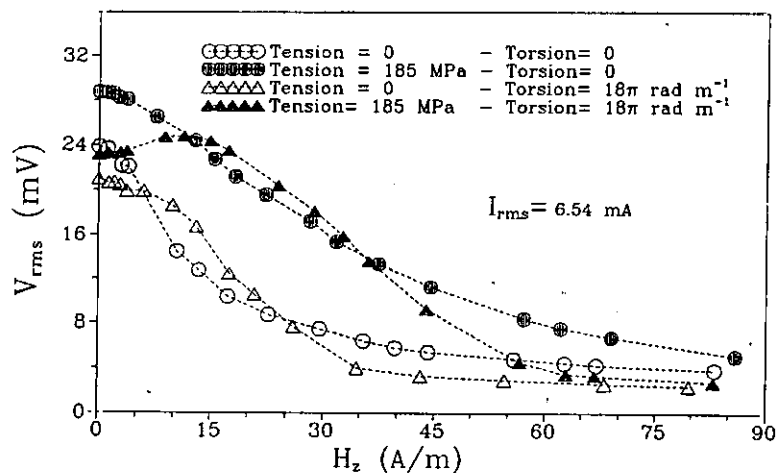


b)



c)

Figura 17 -. Hilos de cobalto de magnetostricción casi nula: a) voltaje eficaz magnetoinductivo frente a campo axial para $I_{rms} = 6.54$ mA; b) voltaje eficaz magnetoinductivo frente a campo axial para $I_{rms} = 0.65$ mA ; c) voltaje eficaz frente a frecuencia de corriente para dos valores de intensidad.



IV ~ MAGNETOELASTICIDAD DINAMICA Y CAOS

EFFECTO WIEDEMANN EN HILOS AMORFOS

Introducción

El efecto *Wiedemann* consiste en la aparición de una torsión en una barra axialmente imanada cuando una corriente eléctrica fluye a través suyo (Malyugin, 1991).

Gracias al efecto *Wiedemann*, un hilo magnetostrictivo se retuerce por sí mismo cuando se le aplica un campo magnético en dirección *helicoidal* (Chikazumi, 1964). Si el hilo es sometido simultáneamente a un campo axial H_z , creado por unos carretes Helmholtz, y a un campo H_θ producido por el flujo de una corriente eléctrica a través del hilo, la imanación aumentará su componente helicoidal, produciendo una *deformación torsional* (Hernando, 1980 y Savage, 1978).

Este principio fue usado por Nuñez de Villacencio y colaboradores para medir la constante de magnetostricción en cintas amorfas mediante la deformación torsional máxima inducida en la cinta por la aplicación de una corriente continua (Nuñez de Villacencio, 1986). La aparición de la deformación magnetostrictiva en cintas amorfas ha sido estudiada exhaustivamente por Liniers y colaboradores (Liniers, 1985).

La corriente eléctrica, en virtud de las leyes de Maxwell (Feynman, 1987), crea un campo magnético circular, que se suma al campo magnético axial para dar un campo magnético resultante dirigido en la *dirección helicoidal* (el campo total será perpendicular a la dirección radial y formará cierto ángulo con la dirección axial y circular). Para reducir la energía magnética, la imanación tenderá a seguir la dirección del campo. Si existe un *acople magnetoelástico*, es decir, una relación entre el comportamiento elástico y el magnético (Hernando, 1987), el movimiento de la imanación conllevará la acumulación de cierta cantidad de energía elástica, cuya liberación producirá la deformación torsional del cilindro.

Es evidente que el movimiento de la imanación, y el del péndulo, dependerá del valor y distribución de las anisotropías magnetoelásticas presentes en la muestra.

En los hilos amorfos, existen anisotropías magnetoelásticas debidas a la presencia de *tensiones internas* generadas durante el proceso de fabricación (Madurga, 1990). El efecto *Wiedemann* en hilos amorfos dependerá de la distribución y magnitud de esas tensiones.

Vamos a estudiar el efecto *Wiedemann* en hilos amorfos magnetostrictivos de composición nominal $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$, producidos mediante enfriamiento ultrarrápido (*in rotating water-quenching technique*) por Unitika, Inc.

Se ha seguido el siguiente programa:

- 1 -. Estudio experimental del efecto Wiedemann mediante un péndulo de torsión.
- 2 -. Análisis del efecto Wiedemann usando un modelo teórico basado en la ecuación de movimiento de un péndulo de torsión forzado. El movimiento se analiza en función diferentes distribuciones de tensiones internas en el hilo.
- 3 -. Análisis de los resultados desde el punto de vista de la *Teoría del Caos*, precedido de un revisión de sus fundamentos.
- 4 -. Análisis del movimiento de la imanación mediante un sencillo modelo magnético.
- 5 -. Análisis del caos en el movimiento mecánico del péndulo de torsión.

ESTUDIO EXPERIENTAL DEL EFECTO WIEDEMANN

La inducción de una torsión en un hilo amorfo gracias a la aplicación de campos magnéticos, puede generar *movimiento mecánico* si al menos uno de los extremos de la muestra está libre.

Esta propiedad se aprovecha para construir un *péndulo de torsión*, constituido por un hilo del que pende un pequeño disco. Fijando el extremo superior del hilo y girando el disco un determinado ángulo, puede inducirse un *movimiento oscilatorio* (Landau, 1979).

En el *Instituto de Magnetismo Aplicado* se ha construido un péndulo de este tipo (Velázquez, 1995), usando hilos amorfos recocidos con corriente continua, ya que el paso de ésta a través de aquellos produce un incremento de temperatura que relaja las anisotropías (González, 1988) intrínsecas del hilo.

El hecho de haber usado hilos amorfos *recocidos* se debe a varios motivos:

i) Los hilos amorfos as-cast presentan una tensiones internas del orden de 200 MPa (Atalay, 1993), lo cual implica densidades de energía del orden de 9000 Jm^{-3} (la densidad de energía K y la tensión T se relacionan a través de la expresión $K=(3/2)\cdot\lambda\cdot T$, donde λ es la constante de magnetostricción, $\lambda=3\cdot 10^{-5}$). No obstante, la densidad de energía magnetoelástica medida a partir del área comprendida entre el ciclo M-H y el eje de imanación, arroja valores comprendidos entre 2000 y 4000 Jm^{-3} (Atkinson, 1993). Se necesitarían campos magnéticos elevados, del orden de 7 KAm^{-1} (para la densidad de 9000 Jm^{-3}), para poder mover la imanación. Haciendo circular una intensidad de corriente de 20 mA, en un hilo de $131 \mu\text{m}$ de diámetro, se genera un campo circular máximo cuya densidad de energía es del orden de 100 Jm^{-3} . Si se elevase la intensidad demasiado, para lograr campos más altos, la muestra se calentaría, modificándose sus propiedades magnéticas. Recociendo las muestras, se relajan las tensiones internas y se consiguen anisotropías del orden de 100 Jm^{-3} (Velázquez, 1995).

ii) El disco usado en el péndulo tiene un peso muy pequeño (0.1 gramos) para que no introduzca tensiones adicionales en el hilo; el peso del disco no modificaría la *curvatura intrínseca que presentan los hilos as-cast*. Interesa que el hilo esté lo más recto posible. Al *recocer bajo tensión* se consigue eliminar la curvatura.

A -. Características de las muestras. Proceso de recocido.

Se han usado, de partida, hilos amorfos as-cast de $131 \mu\text{m}$ de diámetro y 12 cm de longitud. Su constante de magnetostricción es alta y positiva: $\lambda_s=3\cdot 10^{-5}$.

El proceso de recocido ha consistido en hacer circular una corriente continua durante un cierto tiempo. La muestra, por efecto Joule, sufre un calentamiento que relaja las tensiones. Simultáneamente se ha aplicado una *tensión axial externa*, para facilitar que el hilo quede recto. Los parámetros precisos han sido los siguientes:

a) Intensidad de corriente continua: 590 mA

- b) Tensión axial externa: 14.5 MPa
- c) Tiempos de recocido: 5 segundos, 1, 5, 10, 15 y 25 minutos.

B -. Características del péndulo.

El hilo amorfo recocido se sitúa verticalmente, fijando su extremo superior. Se coloca un pequeño disco no magnético (aluminio) en su extremo inferior. Las características del disco son las siguientes: 7 mm de diámetro, 1 mm de ancho y 0.1 gramos de peso. Se suelda con pintura de plata, en el extremo inferior del péndulo, un hilo de cobre, de 0.05 mm de diámetro, para permitir la circulación de una intensidad de corriente a través del hilo. El campo magnético continuo, paralelo al hilo, se aplicó mediante unos carretes Helmholtz, cuya constante de campo es de $343 \text{ Am}^{-1}/\text{A}$ y su diámetro es de 60 cm.

Se sitúa una pequeña bobina, de 200 vueltas, en la parte media del hilo. La **figura 1** muestra un esquema del péndulo.

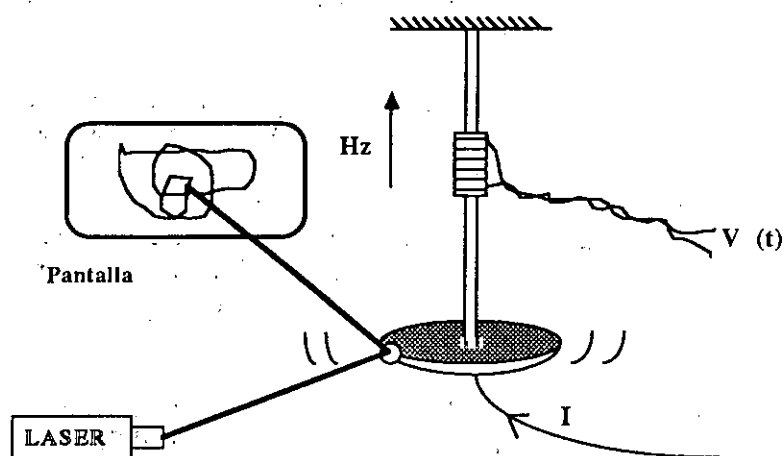


Figura 1 -. Péndulo de torsión

C -. Tipos de medidas

a) Medidas magnéticas -. La variación temporal de la componente axial de la imanación puede recogerse gracias a la fuerza electromotriz inducida en la bobina, en virtud de ley de Faraday (Feynman, 1987). Esta señal temporal se analiza y almacena en un osciloscopio digital Phillips PM3335 (60 MHz 20 MS/s).

b) Medidas mecánicas -. El disco de aluminio lleva pegado un pequeño espejo, que refleja la luz procedente de un láser de helio-neón (de longitud de onda comprendida entre 650 y 670 nm y de 1mW de potencia). El punto de luz reflejada, se hace incidir sobre una pantalla circular, situada a 30 cm del eje del hilo. Una escala graduada permite medir el desplazamiento del spot del láser, y, por tanto, del movimiento del péndulo.

D -. Funcionamiento del péndulo

El movimiento del péndulo se ha estudiado bajo las siguientes condiciones:

1 -. Bajo la aplicación de campos magnéticos axiales continuos de magnitud variable (los máximos son del orden de 200 Am^{-1}).

2 -. Haciendo circular por el hilo corrientes alternas o continuas de intensidad del orden de decenas de miliamperios.

Según la magnitud del campo axial, de la intensidad de corriente y de la frecuencia de ésta, pueden observarse gran variedad de movimientos mecánicos: la luz láser reflejada puede dibujar en la pantalla *líneas rectas, figuras semejantes a las de Lissajous y otras más complicadas*.

El movimiento de la luz reflejada sólo puede seguirse visualmente. Para analizar cuantitativamente el comportamiento del péndulo se analiza el voltaje inducido en la bobina.

E -. Comportamiento del péndulo

Las características básicas del péndulo de torsión han sido estudiadas para hilos recocidos bajo diferentes condiciones y para muestras recocidas durante varios tiempos (Velázquez, 1995). A continuación se resumen algunos de los resultados:

1-. *Análisis de la frecuencia de resonancia* -. Se realizaron dos tipos de medidas:

a) Medida de las oscilaciones libres -. Se aplica al hilo una corriente alterna *cuadrada* de 500 mHz de frecuencia y 71 mA (r.m.s). Las medidas se efectúan midiendo el voltaje inducido en la bobina. Dado que la frecuencia es baja, el péndulo gira lentamente de un lado a otro. Cuando la intensidad de corriente cambia de sentido, el péndulo comienza a moverse en sentido opuesto al que llevaba. Durante el tiempo en que la intensidad cambia de sentido, *el péndulo se mueve libremente*. Pueden medirse las oscilaciones libres.

Analizando la transformada de Fourier (mediante el programa informático

Hyperplit), se pone de manifiesto la presencia de dos frecuencias de resonancia, situadas entre los 10 y los 20 Hz. Se comprueba que cuando se incrementa el valor del campo magnético axial H_z , desde 13.7 Am^{-1} hasta 205.7 Am^{-1} existe una evolución en la posición de los picos y en la relación que existe entre la magnitud de cada uno de ellos. Para el valor de 13.7 Am^{-1} , los picos se sitúan aproximadamente en 10 y 15 Hz, siendo aproximadamente iguales en magnitud (en la altura del pico). Cuando el campo es de 24 Am^{-1} , el pico situado en 15 Hz se hace más pequeño. Vuelven a ser iguales cuando el campo alcanza los 44.6 Am^{-1} . Cuando el campo toma el valor de 205.7 Am^{-1} , sólo se aprecia un único pico situado en 20 Hz.

Las figuras 2 y 3 muestran el espectro de Fourier obtenido para $H_z = 13.7 \text{ Am}^{-1}$ y $H_z = 205.7 \text{ Am}^{-1}$ (para la muestra recocida 1 minuto).

Los resultados anteriores pueden entenderse desde la siguiente perspectiva: según el modelo simple de la estructura de dominios de hilos amorfos as-cast, éstos están constituidos por un *núcleo central* donde la imanación está dirigida axialmente, y una *capa externa* en la que la imanación tiene una dirección radial (Humphrey, 1987). El proceso de recocido reduce la magnitud de las anisotropías responsables de esta estructura. Si suponemos que la estructura se sigue manteniendo, las dos frecuencias de resonancia observadas podrían hacerse corresponder con el núcleo y con la capa externa, es decir, cada una de esas zonas oscilaría con una frecuencia de resonancia. El problema sería equivalente a *tener dos osciladores acoplados entre sí*, es decir, un cilindro en el interior de otro moviéndose cada uno con una frecuencia de resonancia. Cada oscilador tendría una frecuencia de resonancia, f_r , característica del tipo (Landau, 1969):

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi G_i R_i^4}{2LI_n} \right)^{1/2} \quad (1)$$

donde G_i y R_i es el módulo de cizalladura y el radio de cada oscilador, respectivamente, siendo L su longitud e I_n el momento de inercia del disco. El valor de G_i dependerá de los campos aplicados (Hernando, 1987): H_z (axial), y H_ϕ (circular) debido al paso de la corriente de intensidad I ; su valor es:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (2)$$

donde r es la distancia de un punto al eje del hilo.

Cuando el campo axial es muy grande, crece el tamaño del núcleo a expensas de la capa externa, llegando a desaparecer ésta si el campo es suficientemente alto, por lo que sólo aparecería una frecuencia de resonancia.

b) Medida de las oscilaciones forzadas -. En este caso se aplica al hilo una corriente *sinusoidal* de intensidad 71 mA (r.m.s) y cuya frecuencia se hace variar entre 2 y 25 Hz. Cuando la frecuencia de la corriente coincide con la de resonancia del péndulo se observa que la amplitud del movimiento mecánico del péndulo aumenta (la línea descrita por la luz láser reflejada en la pantalla aumenta su longitud). De esta forma pueden identificarse las frecuencias de resonancia. Se encuentran resultados coincidentes a los obtenidos para el caso de las oscilaciones libres, lo cual parece indicar la conexión entre el comportamiento mecánico y magnético. La figura 4 muestra la deflexión máxima del péndulo para $H_z = 13.7 \text{ Am}^{-1}$ y diferentes frecuencias de la corriente (para la muestra recocida 1 minuto).

2 -. Medida de la variación del módulo de cizalladura con los campos magnéticos

Como se puede apreciar en la formula anterior, la frecuencia de resonancia f_r , depende del valor del módulo de cizalladura G . Para intensidades de corriente fijas, y variando el campo axial, se han encontrado la frecuencias de resonancia para cada valor de H_z . De esta forma se ha apreciado variaciones en módulo de cizalladura, efecto ΔG , del orden del 60%.

La figura 5 muestra la dependencia de la frecuencia de resonancia en función del campo axial H_z para el hilo recocido 1 minuto, bajo la aplicación de tres intensidades de corriente distintas. En la figura aparecen los campos máximos H_p , obtenidos en la superficie del hilo.

3 -. Deflexión torsional inducida por corriente continua.

Se hace circular por el hilo una corriente continua cuya intensidad hacemos variar entre 0 y 120 mA, mientras el campo axial se mantiene fijo. Se mide la deflexión torsional gracias desplazamiento, en la pantalla, de la luz láser reflejada.

Se obtienen los siguientes resultados: la deformación torsional aumenta al incrementar el valor de la intensidad de corriente, hasta que sobrepasada cierta intensidad, la deformación comienza a disminuir. Para una intensidad fija, la deformación es tanto mayor cuanto menor es el campo axial H_z .

La figura 6 muestra los resultados obtenidos para la muestra recocida 1 minuto.

Se constata también que la deformación torsional depende del *sentido de la corriente*. La figura 7 ofrece el resultado para la muestra recocida 1 minuto, para intensidades continuas circulando en diferente sentido. En esta figura, los símbolos (z-) y z(+), indican diferentes sentidos de circulación de corriente.

Todas las propiedades observadas dependen de la muestra: se obtienen distintos resultados para diferentes tiempos de recocido, lo cuál es lógico ya que el proceso de recocido está alterando la estructura de dominios. Las deformaciones torsionales y la dependencia de la frecuencia de resonancia respecto del campo H_z , dependen del tiempo de recocido a que se somete la muestra (Velázquez, 1995).

F -. Otras medidas experimentales

Para realizar las medidas que se describen a continuación, se ha usado la muestra recocida durante 25 minutos y de 12 cm de longitud.

Se han medido el *ciclo axial* (M_z-H_z), el *efecto Matteucci* (M_z-H_p), el *Wiedemann inverso* (M_p-H_z) y el *magnetoinductivo o circular* (M_p-M_p), para intentar caracterizar la estructura magnética. Los ciclos se han efectuado a 100 Hz. Las figuras 8a, 8b y 8c muestran los resultados obtenidos.

El ciclo axial y el efecto Matteucci ofrecen un valor de la imanación de remanencia (0.981 T y 0.971 T, respectivamente) más alto que en los as-cast (0.7 T). Este resultado se interpreta como un tamaño del *núcleo* (zona de imanación dirigida en dirección axial) mayor en los hilos recocidos que en el as-cast. El efecto Wiedemann inverso presenta una remanencia de 0.254 T. No aparece efecto magnetoinductivo. Todos estos resultados parecen indicar que la imanación aparece distribuida en la muestra formando angulos cercanos al eje del hilo (la componente M_z es grande) y tiene una componente circular. La presencia de señal en los ciclos M_z-H_ϕ y $M_\phi-H_z$ indica la presencia de anisotropias que marcan en eje fácil en dirección helicoidal (anisotropía de torsión), ya que si un campo en una dirección dada, induce variaciones de la imanación en direcciones perpendiculares, ello quiere decir que la imanación forma ángulos intermedios entre esas dos direcciones, gracias a la presencia de esas anisotropias de torsión. La ausencia de efecto magnetoinductivo puede atribuirse a la presencia de *tensiones radiales*. El hilo se ha recocido durante mucho tiempo (25 minutos) y se ha incrementado mucho su temperatura (la cantidad de calor generado será proporcional al tiempo de recocido). Si suponemos que este incremento de temperatura propicia un *inicio de cristalización* (Atkinson, 1993), el endurecimiento consiguiente provocaría la aparición de unas tensiones radiales que llevarían a la imanación a disponerse en la dirección perpendicular al eje del hilo, lo cual sería la causa de la desaparición del ciclo $M_\phi-M_\phi$. Para tiempos de recocido menores, sí que aparece efecto magnetoinductivo (Velázquez, 1995).

Los ciclos de histéresis parecen confirmar la existencia de una estructura de dominios conformada por dos zonas: una parte central (*núcleo*) en donde la imanación forma ángulos cercanos al eje del hilo, y una capa externa (*corteza*) en donde está dirigida radialmente. El tamaño del núcleo es mayor que el de la corteza. La imanación posee una componente helicoidal en virtud de la presencia de anisotropias de torsión generadas en el proceso de recocido.

Las medidas realizadas en el péndulo de torsión se han realizado de la siguiente forma:

i) Se hace circular por el hilo una corriente eléctrica sinusoidal de intensidad 48.7 mA (r.m.s.); el campo máximo, valor que se alcanza en la superficie del hilo, es $(H_\phi)_{\max} = 118.3 \text{ Am}^{-1}$ (r.m.s.). La frecuencia es de 80.2 Hz.

ii) Simultáneamente, se aplica un campo magnético axial, H_z , cuya magnitud se hace variar entre 0 y 280 Am^{-1} .

La figura 9 representa la amplitud de movimiento mecánico, mediante la luz reflejada por el láser, frente al valor del campo magnético axial.

Cuando no se aplica ningún campo axial la amplitud de movimiento es de 3 mm. Esta amplitud se anula (el péndulo se queda quieto), para campos comprendidos entre 4.32 Am^{-1} y 51 Am^{-1} . Para valores comprendidos entre 51.5 Am^{-1} y 156 Am^{-1} , la amplitud de movimiento aumenta, manteniéndose constante para campos superiores.

Se mide el voltaje inducido en la bobina de 200 vueltas situada en la parte media del hilo. Se mantiene constante la intensidad y se hace variar el campo magnético axial H_z . Si se integra el voltaje y se representase la imanación frente al campo H_ϕ creado por la intensidad de corriente, se obtendría una suerte de *efecto Wiedemann inverso dinámico*. La secuencia de figuras 10a-10l muestra los resultados obtenidos.

La figura 10a muestra el voltaje frente al tiempo para campo nulo. Pueden apreciarse la frecuencia principal de 80.2 Hz acompañadas de otras mayores.

Si se aumenta el campo axial (figuras 10b y 10c), estas frecuencias más altas van haciéndose menos importantes. Cuando $H_z = 22,73 \text{ Am}^{-1}$ (figura 10d) ya son muy pequeñas; los picos principales son los correspondientes a la frecuencia de la corriente excitadora (80.2 Hz), como es de esperar en sistemas en los que aparecen torsiones (Hernando, 1982). Este tipo de señal, salvo por las pequeñas oscilaciones que aparecen entre los picos principales, es la que se obtendría al medir el efecto Wiedemann inverso en un hilo fijo por sus extremos. Nótese que para este campo, $H_z = 22.73 \text{ Am}^{-1}$, el péndulo no se mueve.

Si se sigue incrementando el campo (figura 10e) va estimulándose progresivamente la aparición de más frecuencias. En las figuras 10e y 10f se puede apreciar la clara emergencia de una señal de *frecuencia doble* de la de la señal excitadora.

Si se aumenta el campo, la señal temporal se va complicando debido a la concurrencia de muchas frecuencias. Para $H_z = 156.15 \text{ Am}^{-1}$ (figura 10j), el voltaje obtenido (se representa el voltaje pico a pico) ha disminuido. Para campos más altos (figuras 10k y 10l), la señal temporal ofrece un aspecto complicado (nótese que el péndulo sigue moviéndose: la amplitud de movimiento del láser es de 5 mm).

Discusión

¿Cómo puede entenderse el comportamiento observado? El movimiento mecánico (ver figura 9) puede explicarse de la siguiente forma: el decrecimiento inicial en la amplitud de movimiento del péndulo puede interpretarse si se supone que al ir incrementando el campo H_z , la imanación en el núcleo va situándose en las cercanías del eje del hilo (el movimiento torsional debe ser máximo cuando la imanación se dispone a 45 grados, ya que en esta caso la torsión inducida por los campos es máxima (Velázquez, 1995)). Si se sigue incrementando el campo, el movimiento cesa. Pero la imanación sigue moviéndose, como lo demuestra el voltaje inducido en la bobina; el campo circular H_ϕ sigue moviendo la imanación.

Los ciclos de histéresis informan que la imanación se dispone en las cercanías de eje del hilo (en valor medio, ya que al medir la imanación en una muestra se está considerando un promedio), y que ésta tiene componente circular. Esto es posible gracias a la presencia de *anisotropías magnetoelásticas de torsión* (es decir, que crean una dirección helicoidal de fácil imanación) formando ángulos pequeños con el eje del hilo. El voltaje es debido a la transición entre los dos sentidos de fácil imanación (ver figura 11).

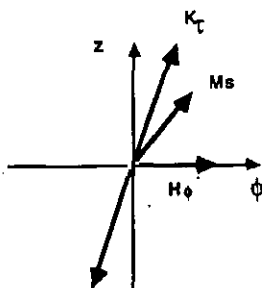


Figura 11 -. Anisotropía de torsión

Si seguimos aumentando el campo, la parte de la corteza en el hilo, en donde la imanación está dirigida en la dirección radial (y en donde las anisotropias magnetoelásticas son mayores), empieza a contribuir al movimiento, ya que la imanación en esta parte comienza a moverse y a formar ángulos cada vez más pequeños con el eje del hilo según se va aumentando el valor del campo axial. En la parte de la corteza también pueden existir anisotropias de torsión; el aumento de H_z sacará la imanación de la dirección radial, y ésta se dirigirá hacia la dirección helicoidal, gracias a la acción de H_ϕ y de la anisotropia de torsión. Al ser las anisotropias radiales más grandes, se necesita más campo para mover la imanación: el movimiento mecánico permanece constante en amplitud, dada la imposibilidad de saturar totalmente la muestra para campos de 200 Am^{-1} .

No obstante, el campo H_z "fija" cada vez más la posición de la imanación, de forma que el campo H_ϕ tiene cada vez más dificultades para invertir el sentido de la componente axial de la imanación; ello explica que el voltaje inducido en la bobina sea cada vez menor.

Para explicar otros resultados obtenidos en el péndulo, conviene plantear un modelo teórico basado en la ecuación diferencial que describe el *movimiento de un péndulo de torsión forzado*.

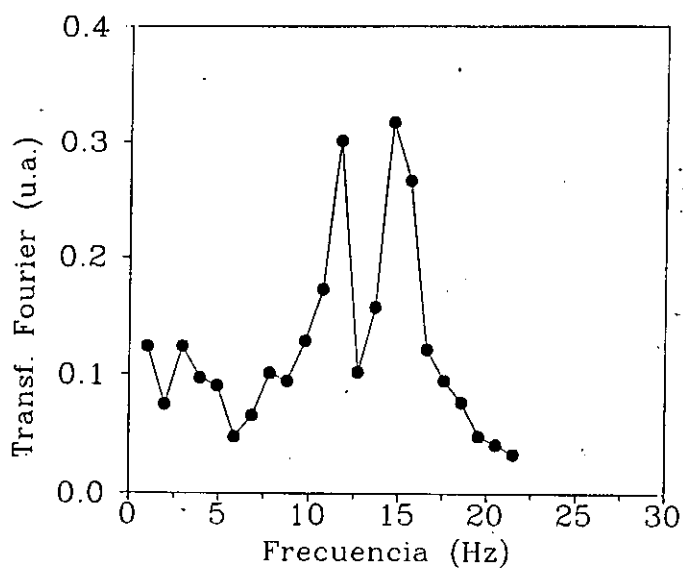


Figura 2 -. Espectro de Fourier para $H_z = 13.7$ A/m.

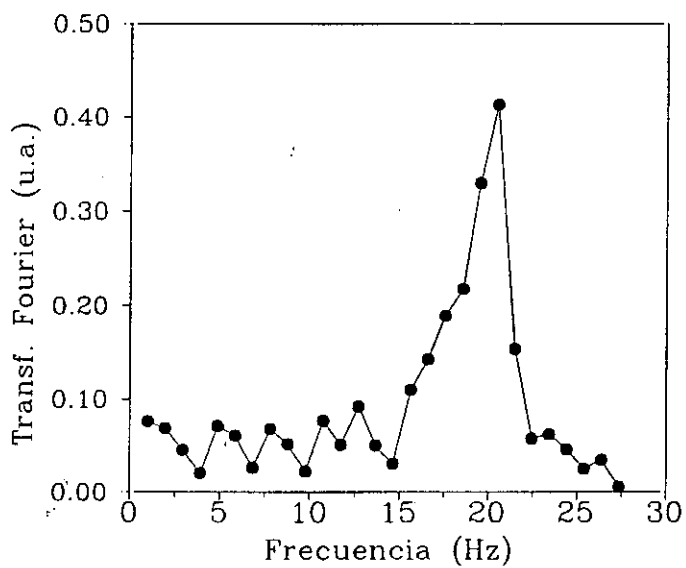


Figura 3 -. Espectro de Fourier para $H_z = 205.7$ A/m.

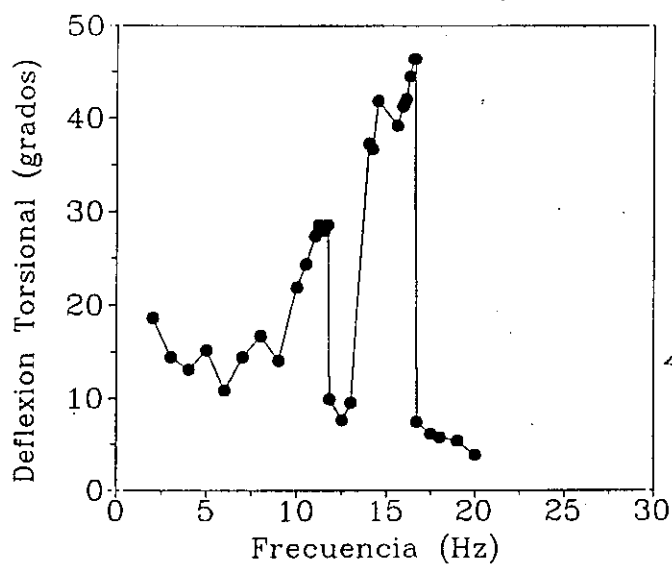
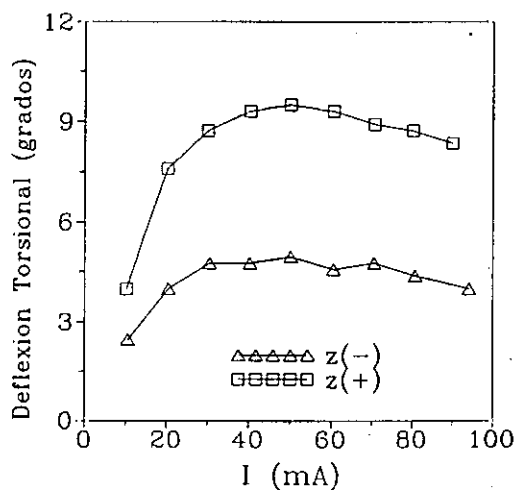
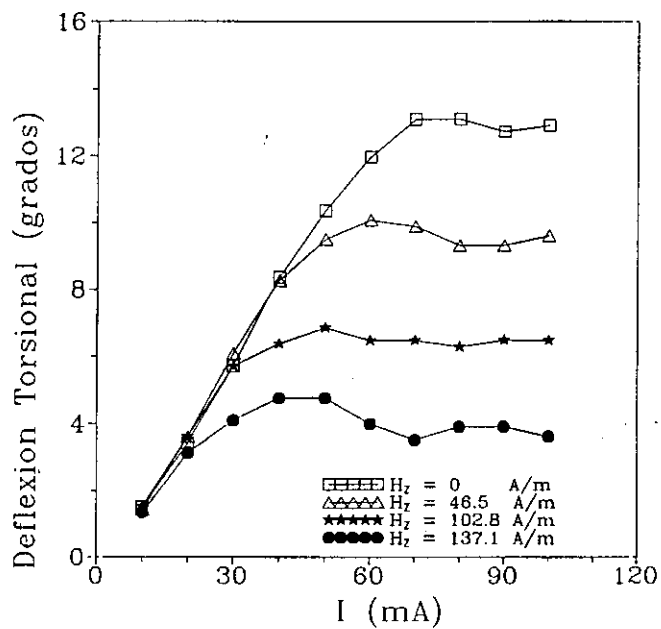
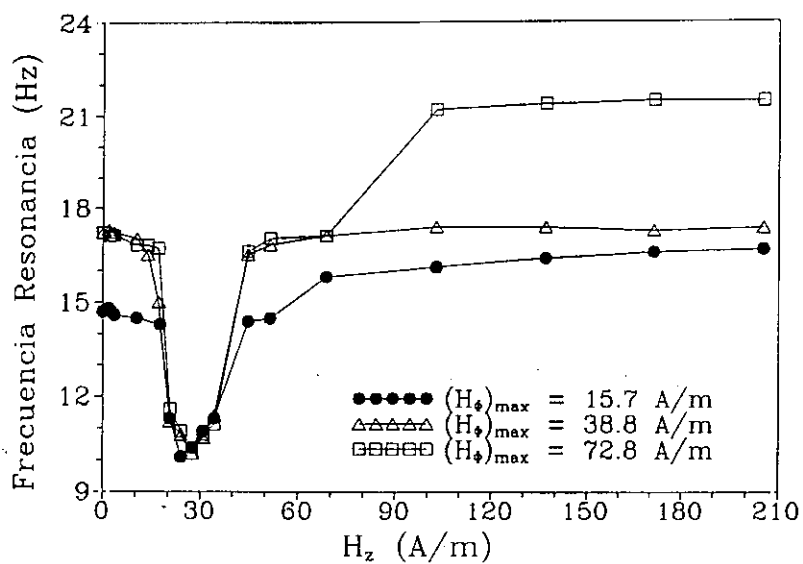


Figura 4 -. Deflexion torsional maxima para $H_z = 13.7$ A/m.



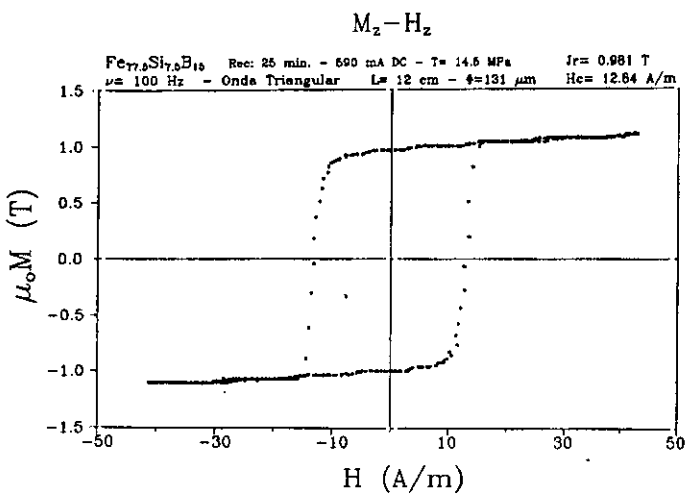


Figura 8a -. Ciclo axial para hilo recocido 25 minutos

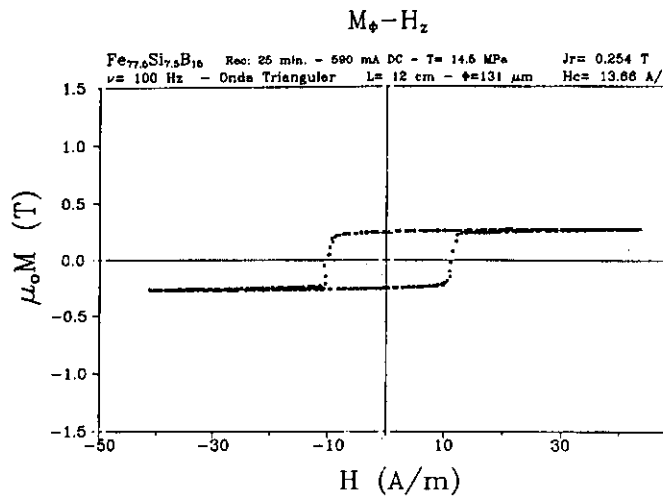


Figura 8b -. Ciclo Matteucci para hilo recocido 25 minutos

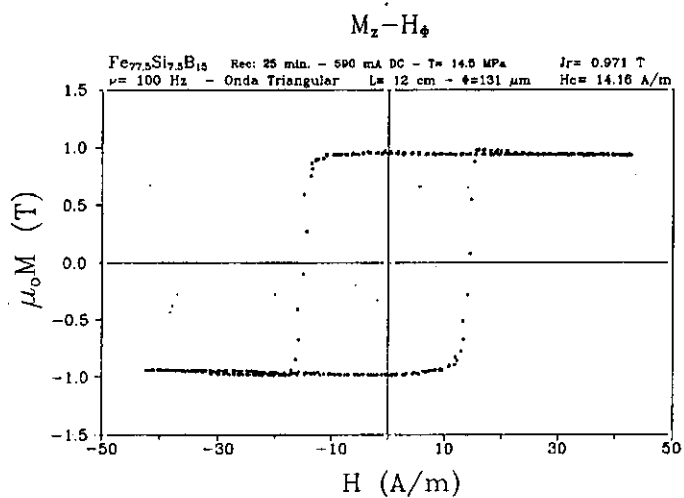


Figura 8c -. Ciclo Wiedemann inverso para hilo recocido 25 minutos.

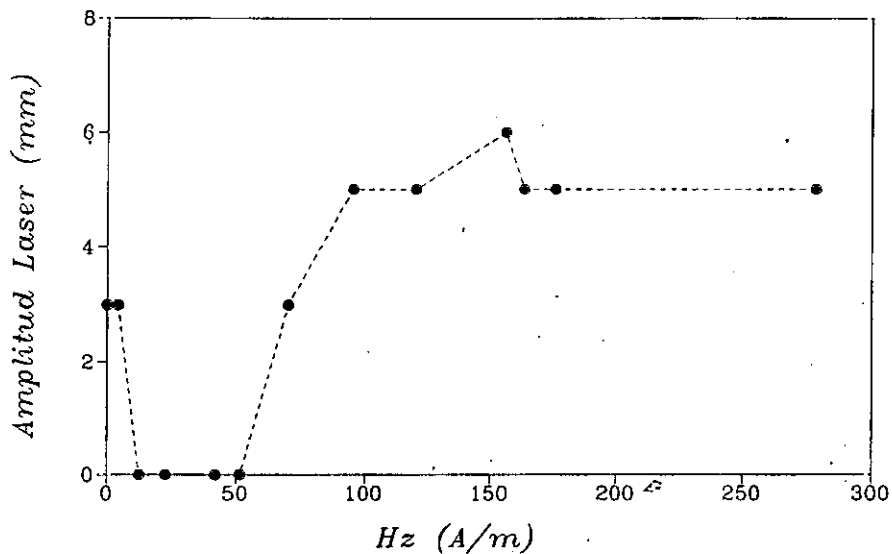


Figura 9 -. Amplitud de movimiento mecanico frente a campo Hz

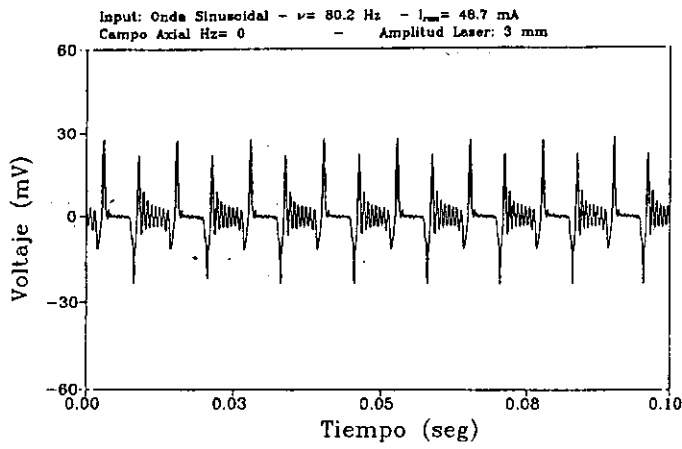


Figura 10a -. Dependencia temporal del voltaje para Hz= 0.

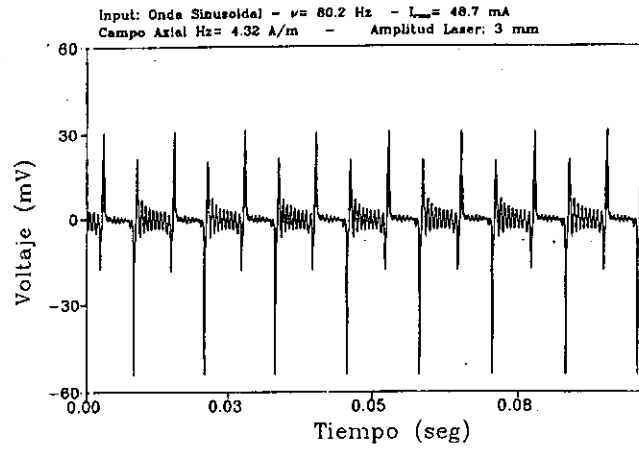


Figura 10b -. Dependencia temporal del voltaje para Hz= 4.32

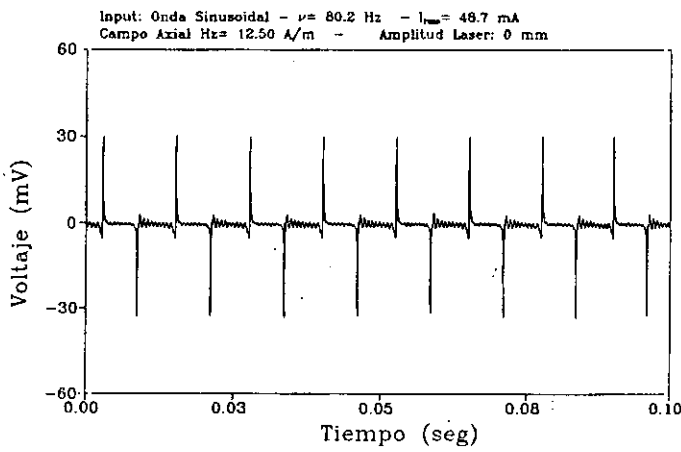


Figura 10c -. Dependencia temporal del voltaje para Hz= 12.50 A/m

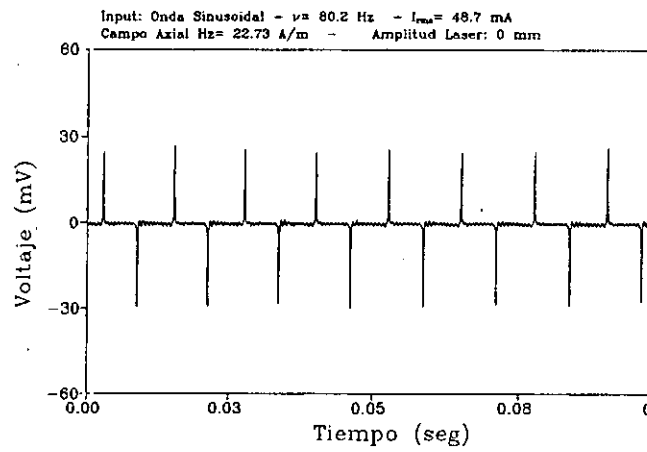


Figura 10d -. Dependencia temporal del voltaje para Hz= 22.79

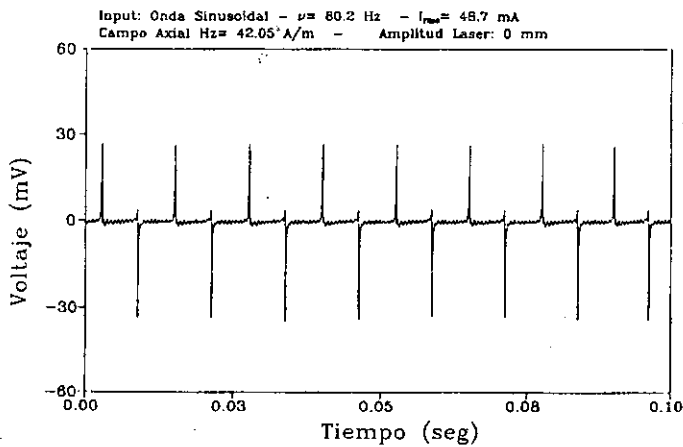


Figura 10e -. Dependencia temporal del voltaje para Hz= 42.05 A/m

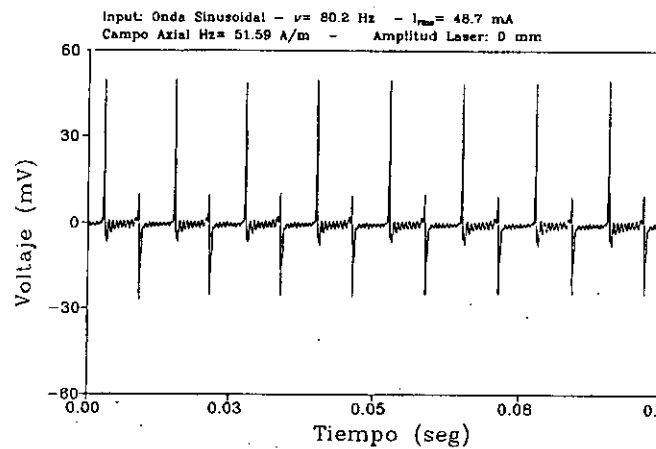


Figura 10f -. Dependencia temporal del voltaje para Hz= 51.59

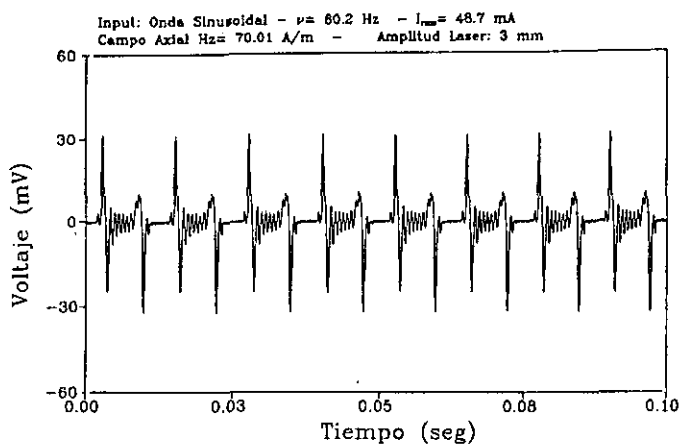


Figura 10g -. Dependencia temporal del voltaje para Hz = 70.01 A/m

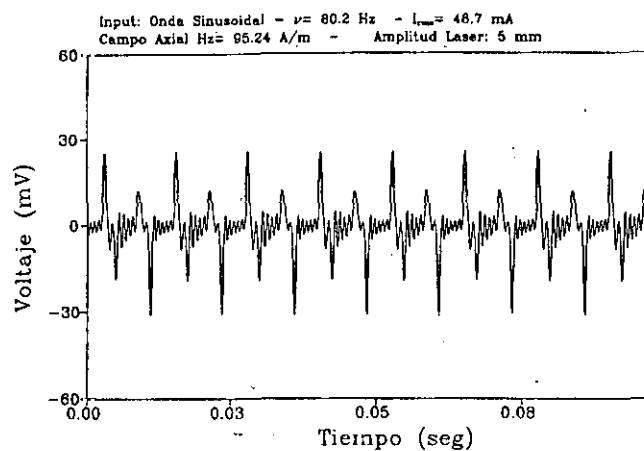


Figura 10h -. Dependencia temporal del voltaje para Hz = 95.24 A/m

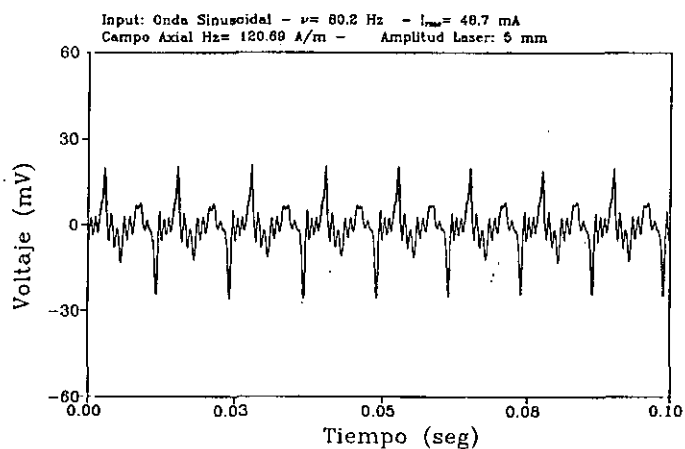


Figura 10i -. Dependencia temporal del voltaje para Hz = 120.69 A/m

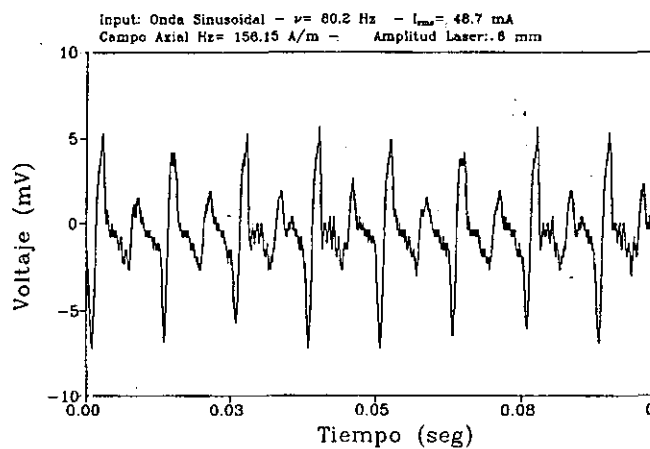


Figura 10j -. Dependencia temporal del voltaje para Hz = 156.15 A/m

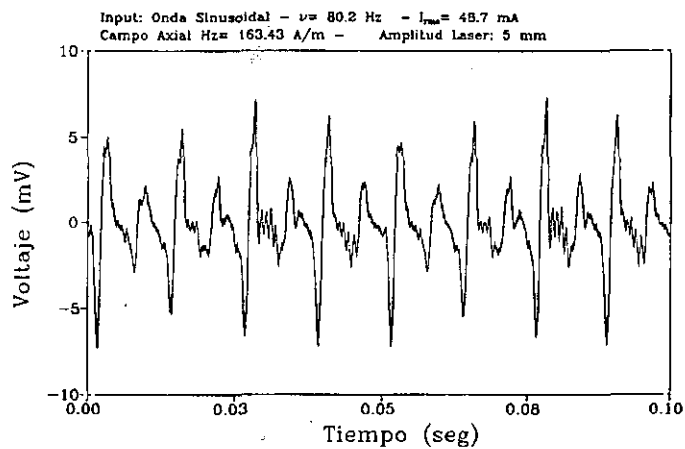


Figura 10k -. Dependencia temporal del voltaje para Hz = 163.43 A/m

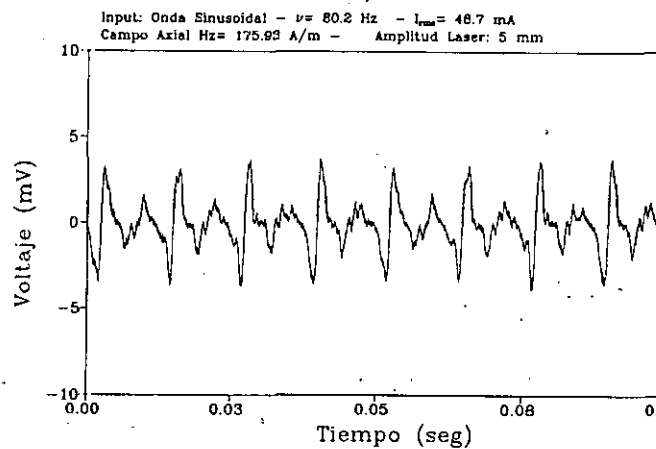


Figura 10l -. Dependencia temporal del voltaje para Hz = 175.93 A/m

PENDULO DE TORSION FORZADO Y TENSIONES INTERNAS

Como se ha visto anteriormente, un péndulo de torsión es un sistema físico constituido por un hilo, con ciertas características elásticas, y un disco sujeto a su extremo inferior.

Si el disco se gira un determinado ángulo, el hilo acumulará cierta cantidad de energía elástica; cuando el disco se deja libre, ésta energía se libera, dotando al péndulo de un movimiento oscilatorio. Es el régimen *oscilatorio libre*.

El péndulo dejará de moverse al cabo de un cierto tiempo, ya que la energía se disipa debido al rozamiento, convirtiéndose en calor. Si esta energía perdida se aportase desde el exterior, el movimiento del péndulo no decaería, entrando éste en un régimen de *oscilaciones forzadas*. En el caso del péndulo de torsión que estamos estudiando, la energía de movimiento han de aportarla los campos magnéticos H_x y H_z .

En el caso de las oscilaciones libres, el péndulo oscila con su *frecuencia propia*, determinada por las dimensiones y características elásticas del péndulo. En el régimen forzado, el péndulo oscila, tras un período transitorio, con la frecuencia del campo excitador.

Se pretende encontrar una *ecuación diferencial* que de cuenta del movimiento del péndulo.

Ecuación de movimiento

El teorema de conservación del momento angular, L , asegura que éste se conserva si el sistema está aislado (Landau, 1988). Si existen fuerzas exteriores, la variación temporal de L debe ser igual al momento M de las fuerzas exteriores, es decir:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \quad (1)$$

El momento angular L , se relaciona con la velocidad angular de oscilación ω , a través del *momento de inercia* I_n :

$$\bar{L} = I_n \bar{\omega} \quad (2)$$

Esta relación, en general, es tensorial (Goldstein, 1992). En el caso que nos ocupa, la velocidad angular de oscilación tiene una dirección paralela al eje de simetría del péndulo; el momento L también apunta en esa dirección, por lo que la relación es escalar.

Poniendo la relación (2) en (1), se obtiene:

$$I_n \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{M} \quad (3)$$

Esta ecuación puede considerarse escalar si se tiene en cuenta que ambos vectores tienen únicamente componente axial (dirección z). Sea α el *ángulo de giro del disco*, con lo que $\omega = d\alpha/dt$. Luego, la relación (3) queda:

$$I_n \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_z \quad (4)$$

A esta ecuación, hay que añadir un término que de cuenta del rozamiento a que está sometido el péndulo. El rozamiento disipa la energía en forma de calor; en este caso, el movimiento ya no es un proceso puramente mecánico. No se puede asegurar que la aceleración del péndulo sea función únicamente de sus coordenadas y velocidad en un instante dado; no hay ecuaciones de movimiento en el sentido mecánico, ya que hay que tener en cuenta el estado térmico del sistema.

Existen algunos casos en que el movimiento puede describirse con ecuaciones mecánicas, *introduciendo en ellas términos adicionales* (Landau, 1988). En estos casos, se incluye el de las oscilaciones de frecuencias pequeñas comparadas con las frecuencias de los procesos disipativos del medio. Cuando se cumple esta condición, se puede considerar al cuerpo como sometido a una *fuerza de rozamiento que depende únicamente de la velocidad*.

La ecuación (4) se completa de la siguiente forma:

$$I_n \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta \frac{d\alpha}{dt} = M_z(t) \quad (5)$$

donde β es el *coeficiente de rozamiento*.

Al momento de inercia I_n contribuirá fundamentalmente el disco metálico, ya que el hilo pesa muy poco (0,01 gramos) en comparación con el disco (0,1 gramos) y su radio es mucho menor. La expresión del momento de inercia es (González, 1984):

$$I_n = \frac{1}{2} M_D R_D^2 \quad (6)$$

donde M_D y R_D son la masa y el radio del disco, respectivamente.

Momento torsor

En el segundo miembro de la ecuación (5) aparece $M_z(t)$, que es el momento torsor a que se ve sometido el hilo. Este momento torsor presenta dos contribuciones:

i) Momento torsor elástico -. Aparece como consecuencia de la liberación de energía acumulada al girar el péndulo.

ii) Momento torsor exterior -. Es el producido por los campos magnéticos aplicados y es el responsable del mantenimiento de las oscilaciones forzadas.

A -. Momento torsor elástico

Se pretende encontrar una expresión del momento torsor para el caso de *deformaciones angulares grandes*. Se calculan las deformaciones, a partir de éstas se encuentra el *tensor deformación* y de éste se obtiene el *tensor de tensiones*; conocidas las tensiones, puede obtenerse el *momento torsor*.

Sean x_i y x_i' ($i=1,2,3$) las coordenadas de un punto de un sólido elástico antes y después de la deformación, respectivamente. El vector desplazamiento u , tendrá por componentes:

$$u_i = x_i' - x_i \quad (7)$$

La distancia infinitesimal entre dos puntos *antes* y *después* de la deformación, dl y dl' , respectivamente, vendrá dado (a partir de (7)) por:

$$dl'^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i'^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 + \sum_{i=1}^3 (du_i)^2 + \sum_{i=1}^3 2du_i dx_i \quad (8)$$

dado que:

$$du_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \quad (9)$$

$$(du_i)^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_k dx_m \quad (10)$$

$$2du_i dx_i = 2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i \quad (11)$$

Entonces:

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_{i,k,m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_k dx_m + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i \quad (12)$$

Intercambiando los índices m, i en el segundo término del segundo miembro y los índices i, k en el tercer miembro, se obtiene:

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_{i,k} u_{ik} dx_k dx_i \quad (13)$$

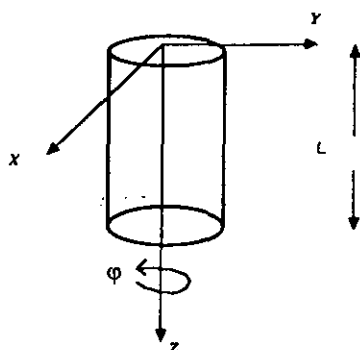
donde:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right] \quad (14)$$

La expresión (13) relaciona la distancia entre dos puntos infinitesimalmente próximos antes y después de la deformación. La deformación dependerá del *tensor de deformación*, que viene dado en la expresión (14).

Normalmente, se desprecia el *término no lineal* en (14) dado que deformaciones pequeñas provocan, en general, desplazamientos pequeños. Pero en el caso de la torsión, pueden aparecer *desplazamientos grandes* (Landau, 1969), por lo que *conviene retener el término no lineal*.

Considérese, el hilo sujeto por un extremo en el siguiente sistema de referencia:



Si se gira la barra un pequeño ángulo $\delta\varphi$, se provoca un desplazamiento \mathbf{u} de los puntos situados en la posición dada por \mathbf{r} ; su valor es (Landau, 1968):

$$\bar{\mathbf{u}} = \delta\varphi \times \bar{\mathbf{r}} \quad (15)$$

Empleando la expresión (15), se encuentra que el desplazamiento \mathbf{u} de los puntos situados a una distancia z del extremo fijo del hilo, tiene por componentes:

$$u_x = -\varphi zy, \quad u_y = \varphi zx, \quad u_z = \varphi \psi(x, y) \quad (16)$$

donde φ es el ángulo girado por unidad de longitud y $\psi(x, y)$ la llamada *función de torsión*.

Como resultado de la deformación representada por las expresiones (16), cada sección transversal del hilo gira alrededor del eje z , y al mismo tiempo se encorva dejando de ser plana.

A partir de las expresiones (16), y haciendo uso de (14) (donde $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), pueden obtenerse las componentes del tensor deformación $u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}$, que en la notación clásica de la teoría de elasticidad se denotan por $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}/2, \gamma_{xz}/2, \gamma_{yz}/2$, respectivamente.

De las deformaciones y mediante las ecuaciones de Lamé (Ortiz, 1985), puede obtenerse el tensor de tensiones:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G e_x \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (17)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G e_y \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (18)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G e_z \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (19)$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son las *tensiones normales* y $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ las *tensiones tangenciales*. El valor de $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$, siendo λ y G las llamadas *constantes de Lamé*, que vienen dadas por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (20)$$

siendo E y ν los *módulos de Young y Poisson*, respectivamente. La constante G es el llamado módulo de cizalladura.

El valor de las tensiones dependerá de la llamada *función de torsión* $\psi(x,y)$. Las tensiones dependerán del valor de esta función. Se considera la aproximación de *secciones constantes*: en la torsión las diferentes secciones transversales del hilo permanecen perpendiculares al eje del hilo. Se toma $\psi(x,y) = \text{constante}$. Las tensiones obtenidas son las siguientes:

$$\sigma_x = \lambda e + G \varphi^2 z^2 \quad \tau_{xy} = 0 \quad (21)$$

$$\sigma_y = \lambda e + G \varphi^2 z^2 \quad \tau_{xz} = -y G \varphi + z x G \varphi^2 \quad (22)$$

$$\sigma_z = \lambda e + G \varphi^2 (x^2 + y^2) \quad \tau_{yz} = x G \varphi + z y G \varphi^2 \quad (23)$$

$$e = \frac{\varphi^2}{2} [2z^2 + x^2 + y^2] \quad (24)$$

Las tensiones τ_{xz} y τ_{yz} actúan sobre la sección transversal del hilo. La tensión τ_{xz} actúa sobre planos perpendiculares al eje z y está dirigida en la dirección x , mientras que la tensión τ_{yz} actúa sobre planos perpendiculares a la dirección z y está dirigida según el eje y . Dado que actúan sobre el mismo plano, ambas tensiones pueden sumarse. El valor de la suma es:

$$\tau^2 = \sqrt{(\tau_{xz})^2 + (\tau_{yz})^2} \quad (25)$$

que en coordenadas cilíndricas toma el valor:

$$\tau = G \varphi r \sqrt{1 + z^2 \varphi^2} \quad (26)$$

Esta es la tensión más importante; el resto (expresiones (21), (22) y (23)) tienen únicamente una dependencia de 2º orden en φ . Efectos de segundo orden en la torsión ya fueron estudiados por Madurga y colaboradores (Madurga, 1984) en cintas amorfas, encontrando expresiones similares a la dada en (26).

A partir de la tensión de torsión puede calcularse el *momento torsor*, teniendo en cuenta la energía elástica involucrada (Ortiz, 1985):

$$E_{el} = \frac{1}{2G} \tau^2 \quad (27)$$

El momento torsor por unidad de volumen viene dado por:

$$M_v = \frac{1}{L} \frac{\partial E_{el}}{\partial \varphi} \quad (28)$$

donde L es la longitud del hilo.

El momento total se obtiene integrando en el volumen total del cilindro:

$$M = \iiint M_v dV = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r M_v \quad (29)$$

Calculando la integral, se obtiene el resultado:

$$M = \frac{\pi GR^4}{2} \varphi + \frac{\pi GR^4}{3} \varphi^3 L^2 \quad (30)$$

Interesa saber el ángulo α girado por el disco del péndulo, que se encuentra situado a una distancia L del extremo fijo del hilo. Dado que φ es el *ángulo por unidad de longitud*, se tiene que $\alpha = \varphi \cdot L$. Luego:

$$M = \frac{\pi GR^4}{2L} \alpha + \frac{\pi GR^4}{3L} \alpha^3 \quad (31)$$

que se puede escribir en la forma:

$$M = -c\alpha - \frac{2}{3}c\alpha^3 \quad (32)$$

en donde

$$c = \frac{\pi GR^4}{2L} \quad (33)$$

El signo menos proviene de que el momento se opone al aumento de α .

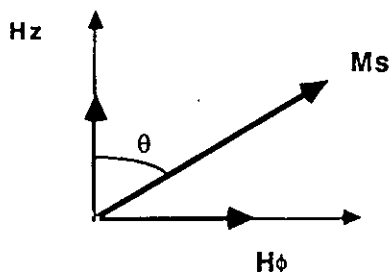
B -. Momento torsor exterior

En los sólidos magnéticos pueden considerarse dos tipos de energías: elástica y magnética. Una depende del estado de deformación y otra del valor de la imanación. Si el sólido es además *magnetoelástico*, existe un *acople* entre las propiedades elásticas y magnéticas, de forma que el estado de imanación influirá sobre el estado elástico. La magnitud de esta interacción puede cuantificarse (Hernando, 1980) mediante la densidad de energía magnetoelástica W_{me} :

$$W_{me} = -\frac{3}{2}\lambda_{100}[\sigma_x\alpha_1^2 + \sigma_y\alpha_2^2 + \sigma_z\alpha_3^2] - 3\lambda_{111}[\tau_{xy}\alpha_1\alpha_2 + \tau_{yz}\alpha_2\alpha_3 + \tau_{zx}\alpha_3\alpha_1] \quad (34)$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ son las componentes del tensor de tensiones y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ los cosenos directores de la imanación. Las constantes λ_{100} y λ_{111} son las constantes de magnetostricción en las direcciones cristalográficas $\langle 100 \rangle$ y $\langle 111 \rangle$, respectivamente. Esta expresión es válida para cristales cúbicos. También lo es para sólidos isótropos si se toma $\lambda_{100} = \lambda_{111} = \lambda$.

En el caso que nos ocupa, los campos H_z y H_ϕ promueven el movimiento de la imanación M_s en el plano $z-\phi$. El ángulo θ vendrá determinado por la magnitud de los campos.



El colocar la imanación M_s en el plano $z-\phi$ conlleva el almacenaje de cierta cantidad de energía magnetoelástica, dada por:

$$D_{me} = -3\lambda\tau_{\phi z}\alpha_z\alpha_\phi \quad (35)$$

con $\alpha_z = \cos\theta$ y $\alpha_\phi = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$. Entonces:

$$D_{me} = -3\lambda\tau_{\phi z}\cos\theta\sin\theta = -\frac{3\lambda}{2}\tau_{\phi z}\sin 2\theta \quad (36)$$

Para una $\tau_{\phi z}$ dada, esta densidad de energía se minimiza si $\theta=45^\circ$ (al torsionar aparece un eje fácil a 45°). Recíprocamente, se si lleva la imanación al plano $z-\phi$ formando un ángulo θ dado (debido a los campos), *aparecerá una tensión $\tau_{\phi z}$* . La aparición de esta tensión llevará aparejada un *aumento de las densidades de energía elástica y magnetoelástica*:

$$D = -\frac{3\lambda}{2} \tau_{\phi z} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2G} \tau_{\phi z}^2 \quad (37)$$

siendo G el módulo de cizalladura del hilo. Para θ fijo, esta tensión debe minimizar D , por lo que debe anularse la derivada:

$$\frac{\partial D}{\partial \tau_{\phi z}} = -\frac{3\lambda}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{G} \tau_{\phi z} = 0 \quad (38)$$

Entonces, la tensión es:

$$\tau_{\phi z} = \frac{3\lambda}{2} G \operatorname{sen} 2\theta \quad (39)$$

Esta tensión es la que aparecerá en el sólido magnetoelástico de constante de magnetostricción λ y módulo de cizalladura G cuando la imanación forma un ángulo θ con el eje del hilo. Es máxima si $\theta=45^\circ$ y se anula si $\theta=0^\circ$ o $\theta=90^\circ$. Para que tenga un valor apreciable, la imanación debe moverse en el plano $z-\phi$.

En el caso en que las anisotropías magnetoelásticas sean pequeñas (o nulas) en comparación con los campos H_ϕ y H_z , el valor de θ vendrá determinado por:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H_\phi}{H_z} \quad (40)$$

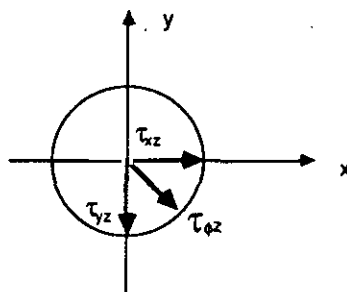
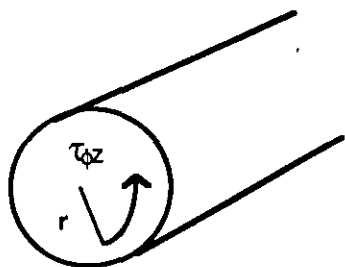
Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 + (\operatorname{tg} \theta)^2} \quad (41)$$

se encuentra que:

$$\tau_{\phi z} = 3\lambda G \frac{H_\phi H_z}{H_z^2 + H_\phi^2} \quad (42)$$

La tensión $\tau_{\phi z}$ es una tensión de cizalladura que actúa sobre planos perpendiculares a la dirección z y en la dirección circular ϕ .



Hay que calcular el *momento que crea esta tensión*. La magnitud $\tau_{\phi z} \times r$ representa el momento por unidad de superficie. Integrando el módulo de esta magnitud vectorial en toda la sección del hilo, se obtiene el momento (en módulo) total M debido a $\tau_{\phi z}$:

$$M = \iint_S |\overline{\tau_{\phi z}} \times \overline{r}| dS = \int_0^R dr \, 2\pi r \, \tau_{\phi z} \, r \quad (43)$$

Para el caso en que $\tau_{\phi z}$ tome el valor dado en la expresión (42) se obtiene, tras realizar la integración, el valor:

$$M = 3\pi \lambda G H_z \frac{1}{I^{*3}} [(I^* R)^2 - H_z^2 \ln \frac{H_z^2 + (I^* R)^2}{H_z^2}] \quad (44)$$

en donde $I^* = I/2\pi R^2$, siendo I la intensidad de corriente que pasa por el hilo y R el radio de éste.

Ecuación diferencial del movimiento del péndulo de torsión

Una vez conocida la expresión de los momentos torsores, se puede escribir la ecuación diferencial de movimiento que gobierna el movimiento del péndulo de torsión. De (5), (32) y (43) puede escribirse:

$$I_n \alpha'' + \beta \alpha' + c\alpha + \frac{2}{3} c \alpha^3 = M(t) \quad (45)$$

donde

$$M(t) = 3\pi \lambda G \int_0^R dr r^2 \sin 2\theta(r) \quad (46)$$

siendo I_n el momento de inercia del disco, β el coeficiente de rozamiento y $c = \pi G R^4 / 2L$, en donde G el módulo de cizalladura del hilo, R su radio y L su longitud.

Cuando están involucradas anisotropías magnetoelásticas, el momento, dado por la expresión (39) hay que calcularlo numéricamente.

• • •

Una vez obtenida la ecuación diferencial del movimiento, vamos a estudiar sus soluciones para diferentes valores del campo axial H_z , de la intensidad de corriente I , de la frecuencia de ésta, ν , y de la influencia de las anisotropías magnetoelásticas.

Análisis de la ecuación diferencial de movimiento

Las soluciones de la ecuación diferencial dependerán fundamentalmente de la magnitud y distribución de las anisotropías magnetoelásticas. Vamos a suponer que esas anisotropías pueden representarse mediante una función $K(r)$, que representa el valor de la anisotropía en un punto situado a una distancia r del eje del hilo.

Sea $\theta(r)$ el ángulo que forma la imanación con el eje del hilo en el punto r . Cuando se aplica los campos H_ϕ y H_z , la densidad de energía involucrada es:

$$D = -\mu_o M_s H_z \cos \theta(r) - \mu_o M_s H_\phi \sin \theta(r) + K(r) \sin^2(\theta(r) - \gamma) \quad (47)$$

donde H_ϕ , es el campo circular creado por la intensidad de corriente, I , que pasa a través del hilo, y cuyo valor es $H_\phi(r) = Ir/2\pi R^2$. El valor del campo aumenta linealmente con la coordenada r . El ángulo $\gamma = 0$ si la anisotropía $K(r)$, que se supone *uniaxial*, está dirigida según el eje del hilo, y $\gamma = \pi/2$ si $K(r)$ tiene una dirección perpendicular al citado eje. Derivando esta densidad de energía respecto del ángulo θ e igualando la derivada a cero (condición de extremo), se obtiene el valor $\theta(r)$ buscado, para cada valor de r . Este valor del ángulo se introduce en (46) para hallar el momento total en el hilo.

Para poner de manifiesto algunas de las características del péndulo, *basta con analizar el caso en que las anisotropías son nulas*, $K(r) = 0$, o que son muy pequeñas en comparación con la energía aportada por los campos magnéticos. En este caso, los extremos de la densidad de energía (47) vienen dados por la ecuación (40). El momento, en este caso, puede calcularse analíticamente; el resultado viene dado por la expresión (44). La ecuación diferencial se resuelve mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Burden, 1985).

Se han usado los siguientes valores numéricos para realizar los cálculos:

Disco

- Peso del disco, $M_D = 0.36$ gramos
- Radio del disco, $R_D = 3.4$ mm

Hilo

- Constante magnetostricción, $\lambda_s = 3 \cdot 10^{-5}$
- Módulo de cizalladura, $G = 6 \cdot 10^{10}$ Pa
- Longitud, $L = 12.2$ cm

Estos valores numéricos no son exactamente los mismos que los reales del péndulo, pero tienen el mismo orden de magnitud. Con ellos, el momento de inercia resulta ser $I_n = 2.1 \cdot 10^{-9}$ Kgr·m² y la constante c , expresión (33), del momento torsor elástico toma el valor $c = 1.4 \cdot 10^{-5}$ N·m. A partir de estos datos puede calcularse la *frecuencia de resonancia* aproximada. Si en la ecuación (45) despreciamos el amortiguamiento y el término no lineal, y tomamos en consideración las oscilaciones libres, $M(t)=0$, se obtiene:

$$I_n \alpha'' = -c\alpha \quad (48)$$

que representa un movimiento armónico simple de frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{I_n}} \quad (49)$$

Con los valores arriba indicados, se obtiene una frecuencia de 12.9 Hz. El valor de $c\alpha$ determina el orden de magnitud del momento torsor elástico, que (dado que $\alpha \sim 10^{-1}$ radianes) resulta ser de 10^{-6} N·m. Este es también el orden de magnitud del momento torsor exterior, expresión (44), para intensidades del orden de decenas de miliamperios y campos axiales de 10^2 Am⁻¹.

El factor de amortiguamiento, β , (ecuación (45)), dividido por el valor del momento de inercia, se denota por:

$$A = \frac{\beta}{I_n} \quad (50)$$

Dado que las unidades de β son N·m·s = Kgr·m²·s⁻¹ y las de I_n son Kgr·m², entonces las de A son s⁻¹. Se toman valores de A del orden de unidades. Se encuentra un comportamiento adecuado para $A = 2$ s⁻¹.

La expresión (42) representa la tensión de cizalladura responsable del movimiento del péndulo. Su valor es proporcional al módulo de cizalladura G y a la constante de magnetostricción λ . Su valor, en cada punto, depende del valor relativo de los campos H_z y H_ϕ en cada punto. La **figura 1a** representa el valor de la tensión en función de la relación $a = H_\phi/H_z$. Se ha tomado $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$, y $G = 6 \cdot 10^{10}$ Pa (Wun-Fogle, 1991). La tensión es máxima cuando los campos son iguales. Cuando el valor de alguno de los campos es muy distinto al del otro, el valor de la tensión es pequeño. El valor máximo obtenido para la tensión $\tau_{\phi z}$ es de 2.7 MPa. Hay que hacer notar que, dado que el campo H_ϕ creado por la intensidad de corriente no es homogéneo, habrá puntos del hilo en los que se consigue la tensión máxima, y en otros no.

Ahora vamos a estudiar el péndulo bajo la aplicación de intensidades de corriente continuas y alternas.

Intensidad de corriente continua

La figura 2 representa el ángulo de giro del péndulo frente al valor de la intensidad de corriente continua, para dos valores diferentes del campo axial H_z . En ambos casos, se encuentra que el ángulo aumenta con la intensidad, hasta cierto valor de ésta en que aquel disminuye. El comportamiento es cualitativamente similar al encontrado experimentalmente (ver figura 6 del apartado anterior). Mientras la intensidad, I , es pequeña, el ángulo de torsión es menor para el campo axial mayor, $H_z = 180$ A/m, que para $H_z = 132$ A/m. Ello es reflejo de las características de la tensión de torsión. La figura 1b ofrece el resultado.

Para $I = 50$ mA, el campo H_z máximo, obtenido en la superficie del hilo, toma el valor de 132 A/m. Nótese en la figura 1b que el ángulo es máximo para $H_z = 132$ A/m e $I = 0.05$ mA.

El comportamiento del ángulo frente a la intensidad de corriente dependerá de las anisotropías presentes. Para analizar la forma en que éstas influyen, vamos a estudiar las soluciones de la ecuación diferencial (45) para algunas distribuciones de anisotropías simples.

La figura 2 muestra los resultados obtenidos para tres anisotropías uniaxiales y homogéneas dirigidas según el eje del hilo. Para $K(x) = 80 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 2a), se obtiene un comportamiento similar al de la figura 1b, pero la disminución del ángulo de torsión a intensidades altas es menos acusada. Lo es menos aún para $K(x) = 120 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 2b). Para $K(x) = 300 \text{ Jm}^{-3}$, el ángulo girado para $H_z = 132$ A/m es siempre mayor que para $H_z = 180$ A/m.

Cuanto mayor es el valor de la anisotropía, el campo H_z creado por la intensidad encuentra más dificultades para lograr que la imanación forme ángulos grandes con el eje del hilo, por lo que la tensión de torsión no será pequeña (según expresión (39)). Si el ángulo de torsión no disminuye al aumentar la intensidad, el ángulo de la imanación con el eje del hilo será menor de 45 grados. Cuanto mayor sea el valor de la anisotropía homogénea, más cercana al eje se encontrará la imanación y menor será, por consiguiente, la tensión de torsión (es máxima si el ángulo es 45 grados).

La figura 3a muestra el ángulo de torsión para $H_z = 132$ A/m y diferentes valores de las anisotropías homogéneas. Se aprecia un desplazamiento del máximo ángulo de torsión al ir aumentando el valor de la anisotropía.

Es evidente que el resultado será distinto según la *distribución de anisotropía particular*. Sea $x = r/R$, la coordenada radial normalizada, donde R es el radio del hilo y r la coordenada radial, de forma que $x=0$ representa la posición del eje del hilo y $x=1$, la superficie de éste. Considérese la siguiente distribución de anisotropías: si $x < 0.7$, la anisotropía es coaxial al eje del hilo, y si $x > 0.7$ forma un ángulo de 90 grados con éste (esta anisotropía reproduciría la estructura típica de los hilos as-cast). En ambos casos, la magnitud de la anisotropía es de 80 Jm^{-3} . La figura 3b ofrece el resultado obtenido. Si se compara con la figura 2a en la que se muestra el resultado para una anisotropía homogénea del mismo valor, puede apreciarse que el ángulo de torsión máximo es menor en el caso de la anisotropía inhomogénea.

Intensidad de corriente alterna

La presencia de anisotropías magnetoelásticas en el hilo, determinará la forma en que oscilará el péndulo de torsión. Para entrever la citada dependencia se considera el *ángulo de giro estático*. Éste se obtiene a partir de la expresión:

$$\alpha = \frac{M(t)}{c} \quad (51)$$

donde $M(t)$ es el momento torsor externo, dado en (46), y c es la constante elástica dada en (33). Físicamente representaría en ángulo que habría que girar el péndulo para evitar que éste se moviese por la aplicación de los campos magnéticos.

La figura 4a representa el ángulo de giro estático para dos anisotropías uniaxiales homogéneas paralelas al eje del hilo. Se somete al péndulo a un campo axial $H_z = 132$ A/m y a una intensidad de corriente de 50 mA (pico a pico) y de frecuencia 1 Hz. El ángulo de giro más pequeño se consigue para el valor no nulo de la anisotropía, $K = 70$ Jm⁻³, (en la figura la anisotropía viene dada en pascas, Pa; las unidades son equivalentes, ya que $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ J/m}^3$). La anisotropía no nula fija la imanación en posiciones cercanas al eje (menores de 45 grados) por lo que la tensión de torsión será menor y, por consiguiente, el ángulo de giro estático también.

La figura 4b muestra el ángulo estático para la anisotropía inhomogénea usada para obtener la figura 3b. Nótese que aumenta el intervalo temporal en que el ángulo de giro estático se mantiene casi constante.

Módulo de cizalladura variable

Hasta ahora se ha considerado que el módulo de cizalladura del hilo permanece constante. Sin embargo, es sabido que éste, al igual que el módulo de Young, varía con los campos magnéticos aplicados (Atkinson, 1993). Pueden obtenerse expresiones de la dependencia del módulo de cizalladura con los campos magnéticos, considerando un modelo rotacional (Velázquez, 1995). Cuando a un cuerpo se le aplica una tensión de torsión τ , se induce en él una deformación de torsión γ ; el módulo de cizalladura se obtiene mediante la expresión (Timoshenko, 1968) siguiente:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{1}{G} \quad (52)$$

Si el cuerpo es magnetostrictivo, la deformación γ tiene una contribución que depende de la posición de la imanación respecto del eje del hilo (dada por el ángulo θ) y respecto de la dirección circular (dada por el ángulo β). Resolviendo las ecuaciones energéticas, esto es, encontrando los ángulos θ y β que minimizan la energía total, puede obtenerse una expresión para G del tipo:

$$G = \frac{G_0}{1 + 9 \frac{\lambda^2}{2} G_0 f(\alpha, \beta)} \quad (53)$$

donde $G_0 = 6 \cdot 10^{10}$ Pa y $f(\theta, \beta)$ es una función que depende de los campos H_z , H_ϕ y de la distribución espacial de la anisotropía $K(x)$. Los detalles de la obtención de (53) han sido mostrados en un capítulo posterior.

En la ecuación diferencial del péndulo de torsión, ecuación (45), aparece el módulo de cizalladura a través de la constante elástica c , (relación (33)). Se resuelve la ecuación diferencial, considerando la variación del módulo de cizalladura, mediante el método de Runge-Kutta de cuarto

orden. El intervalo temporal va de cero a seis segundos, y se divide en 2500 partes. Las condiciones iniciales son $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$. El campo axial es $H_z=120$ A/m, la intensidad es de 50 mA, de frecuencia 1 Hz y forma sinusoidal. El amortiguamiento se ha tomado $A=2$ s⁻¹.

Se considera la siguiente distribución de anisotropía:

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ -K & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

siendo $x_0=0.7$. La anisotropía se considera uniaxial dirigida según el eje del hilo. Cuando tiene un valor negativo, la imanación se dispone perpendicular a ella (si la constante de magnetostricción es positiva) para minimizar la densidad de energía magnetoelástica.

Las figuras 5a, 5b y 5c muestran el resultado para $K=0$, $K=20$ Jm⁻³ y $K=150$ Jm⁻³, respectivamente.

La figura 5a, para anisotropía nula, muestra dos tipos de oscilaciones: la impuesta de 1 Hz y la propia, de aproximadamente 13 Hz. Al cabo de unos cuatro segundos, el *régimen transitorio* se extingue y queda únicamente la oscilación forzada.

Para $K=20$ Jm⁻³ (figura 5b), los "picos" de las oscilaciones propias no se extinguen. Para $K=150$ Jm⁻³ (figura 5c) la dependencia es más compleja: una vez agotado el transitorio (al cabo de unos 2 segundos), aparecen unas oscilaciones muy grandes debidas a la presencia de una fuerte anisotropía, perpendicular al eje del hilo, en la zona $x > 0.7$; en esta zona la imanación tiende a ponerse perpendicular al eje del hilo.

La figura 6 ofrece el *espacio de fases*, esto es, la representación de la velocidad frente al ángulo de torsión, para las tres anisotropías de la figura 5.

La figura 6a representa el espacio de fases para $K=0$. Se aprecian dos puntos, situados cerca de +10 grados y -10 grados, entre los cuales existen órbitas, líneas que los conectan. Para $K=20$ Jm⁻³ (figura 6b), los puntos se hacen más grandes. El diagrama se complica mucho más para $K=150$ Jm⁻³ (figura 6c).

Cada bucle cerrado en el espacio de fases representa una frecuencia de movimiento determinada. Para determinar las frecuencias que concurren se analiza el espectro de Fourier de las señales temporales. La figura 7 muestra el resultado.

La figura 7a ofrece el resultado para $K=0$. Aparece claramente el pico correspondiente a la frecuencia excitadora de 1 Hz así como dos de sus armónicos (en 3 Hz y 5 Hz). Se aprecia también un *fondo continuo* entre los 7 Hz y los 13 Hz; este fondo está relacionado con la oscilación propia del péndulo, pero *no aparece una única frecuencia*.

Si $K=20$ Jm⁻³ (figura 7b) se mantiene básicamente la misma estructura, pero el fondo cambia de forma.

Si $K=150$ Jm⁻³ (figura 7c), se aprecia un claro pico situado en torno a los 11 Hz acompañado de algunos picos menores. Este pico es mayor que el de la frecuencia excitadora, lo que parece indicar que este valor de anisotropía favorece las oscilaciones propias del péndulo.

La distribución de anisotropía considerada hasta ahora es *discontinua* en la frontera de separación, $x_0 = 0.7$. Ahora vamos a considerar una distribución *continua*:

$$K(x) = \begin{cases} K \cdot (1-x/x_0) & \text{si } x < x_0 \\ -M \cdot K \cdot (1-x/x_0)^p & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad x_0 = 0.7$$

Se supone uniaxial y dirigida según el eje del hilo. En la zona en que $x > x_0$ es negativa, por lo que la imanación tenderá a disponerse perpendicular a ella. Reproduce la estructura magnética básica de los hilos de magnetostricción positiva.

La **figura 8a** representa la dependencia temporal del ángulo para $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, $M = 50$ y $p = 1$ (la anisotropía es lineal en x). La oscilación propia no se agota y se superpone a la forzada.

La presencia de las oscilaciones propias del péndulo es más acusada si la dependencia de la anisotropía es *cuadrática* (**figura 8b**). En este caso se toma $M = 116$ y $p = 2$. La **figura 8c** ofrece la superposición de las dos anteriores. Hay que hacer notar que ambas distribuciones de anisotropía aportan el mismo valor en la superficie del hilo, $K(1) = 428,5 \text{ Jm}^{-3}$. Nótese que las oscilaciones propias no sólo son mayores en el caso cuadrático que en el lineal, sino que además están desfasadas.

Las **figuras 9a y 9b** representan el espacio de fases para las anisotropías continuas lineal y cuadrática, respectivamente. En el primer caso, los bucles son más pequeños que en el segundo. La figura es lo suficientemente complicada como para intuir la presencia de varias frecuencias. Las **figuras 10a y 10b** representan el espectro de frecuencias para el caso lineal y cuadrático, respectivamente. En ambos casos, se aprecia una *estructura compleja* en torno a la frecuencia de oscilación propia.

Variación del ángulo de torsión con la frecuencia de la corriente

Vamos a estudiar la evolución del mapa de fases y del ángulo de torsión e función de la frecuencia de la corriente que se hace pasar a través del hilo.

Antes convendría analizar la forma de las oscilaciones en el caso del *péndulo libre con y sin amortiguamiento*.

La **figura 11a** representa la dependencia temporal del ángulo de torsión para un péndulo libre sin amortiguamiento. Las condiciones iniciales son las siguientes: se gira el péndulo 10 grados y se suelta. La **figura 11b** representa la velocidad angular de oscilación. La **figura 11c** muestra la velocidad angular frente al ángulo: se obtiene una elipse, un *ciclo límite*, que forma un bucle, representativo de una única frecuencia concurrente.

La **figura 12a** muestra la dependencia temporal del ángulo de torsión para el péndulo libre amortiguado ($A = 2 \text{ s}^{-1}$). Las oscilaciones decaen al cabo de pocos segundos. La **figura 12b** representa la velocidad angular y la **12c**, el espacio de fases. El punto representativo del estado del sistema (que ofrece el valor del ángulo y la velocidad angular) en un instante determinado) cae, siguiendo una espiral, hacia el origen de coordenadas, que se convierte en un *atractor* de las trayectorias del espacio de fases.

Los cálculos que se muestran en las figuras siguientes han sido obtenidos considerando un hilo de $60\text{ }\mu\text{m}$ de radio y 10 cm de longitud, con lo que la frecuencia de resonancia, en este caso, es de 8.29 Hz . Se ha tomado el caso de anisotropía nula, $H_z = 132\text{ A/m}$, $I = 50\text{ mA}$, y la forma de la onda, sinusoidal. El amortiguamiento $A = 2\text{ s}^{-1}$. Las condiciones iniciales consideradas son: $\alpha(0)=0$ y $\alpha'(0)=10^{-5}\text{ grados/s}$. Las figuras 13-25 muestran en ángulo, la velocidad y el espacio de fases para diferentes frecuencias de corriente I : 0.01 Hz , 0.1 Hz , 1 Hz , 2 Hz , 6 Hz , 6.5 Hz , 7 Hz , 7.5 Hz , 8 Hz , 8.29 Hz , 8.5 Hz , 9 Hz y 10 Hz .

Conforme va aumentando la frecuencia, se va incrementando el ángulo máximo, hasta llegar a 8.29 Hz (resonancia), en que el ángulo comienza a disminuir con la frecuencia.

El espacio de fases comienza con un atractor puntual situado en 3 grados , para $\nu = 0.01\text{ Hz}$ (figura 13c), para evolucionar hacia una estructura más compleja con cuatro bucles (figura 14c), para $\nu = 0.1\text{ Hz}$. Para $\nu = 1\text{ Hz}$ (figura 15c) la estructura se simplifica. Los bucles quedan reducidos a tres para $\nu = 2\text{ Hz}$ (figura 16c), que desaparecen para formar una única figura, un *toro* (figura 17c) si $\theta = 6\text{ Hz}$. Las dimensiones del toro se modifican al ir aumentando la frecuencia e ir actuando la no linealidad de la ecuación diferencial (figuras 18c, 19c, 20c, 21c, 22c, 23c, 24c y 25 c).

Figura 1 - a) Tension de torsion, b) Deformacion angular frente a intensidad de corriente continua

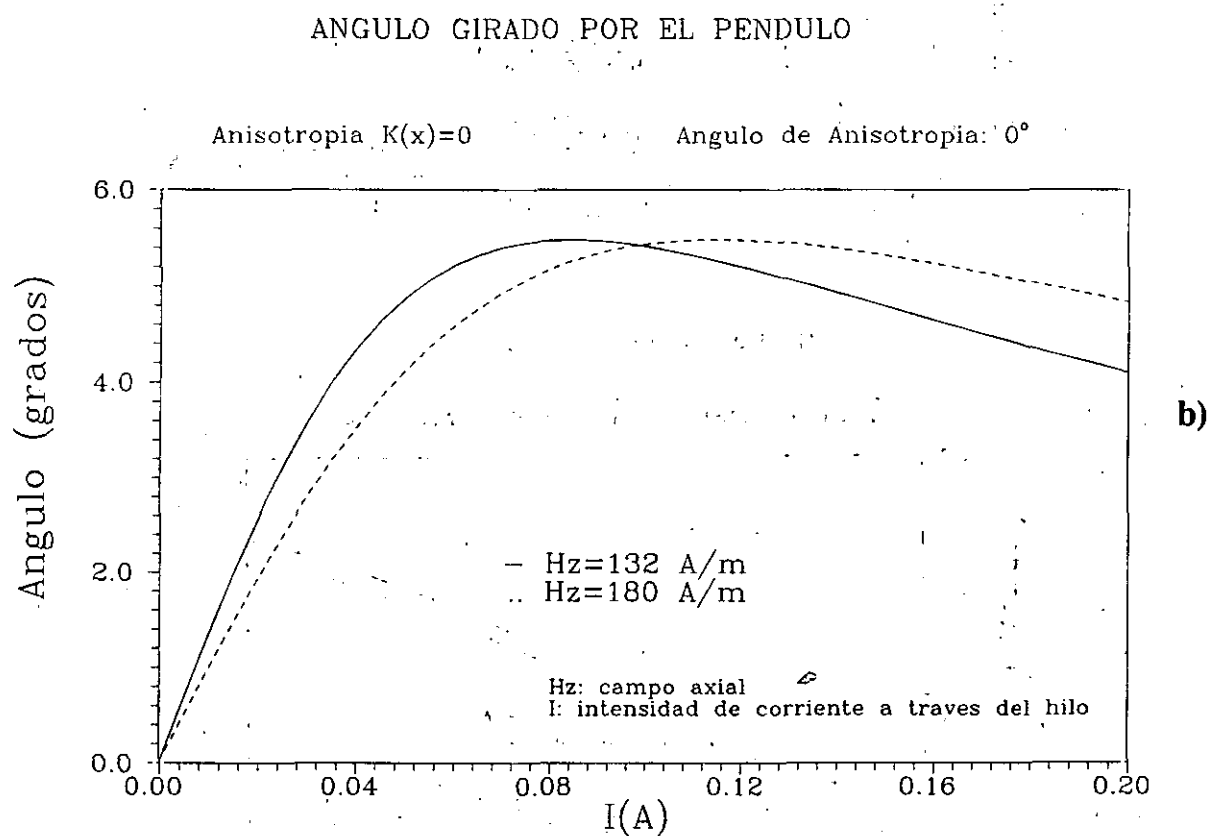
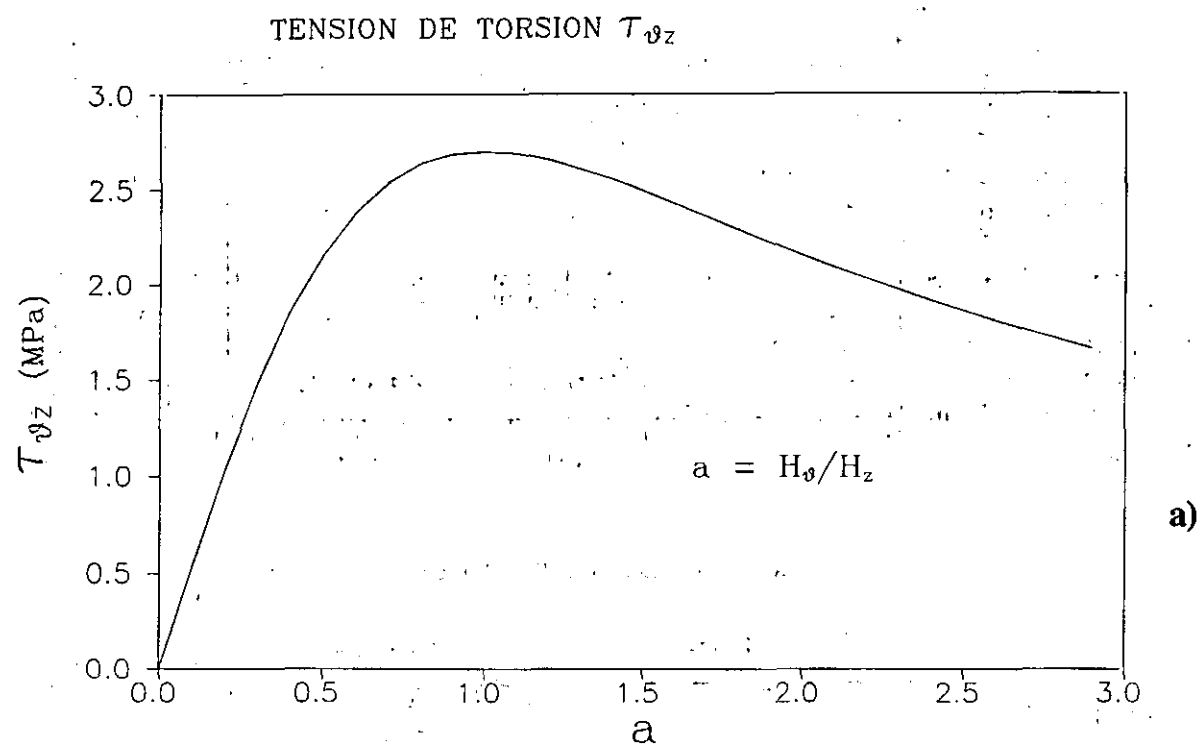
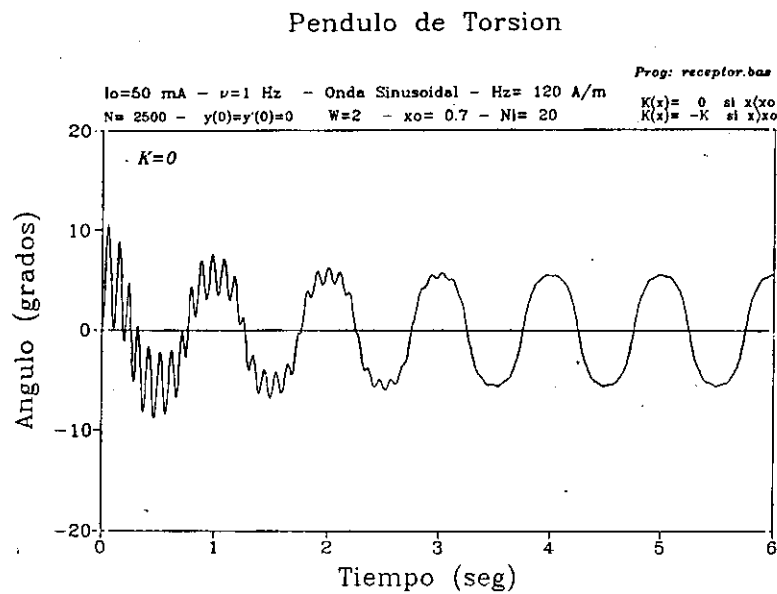
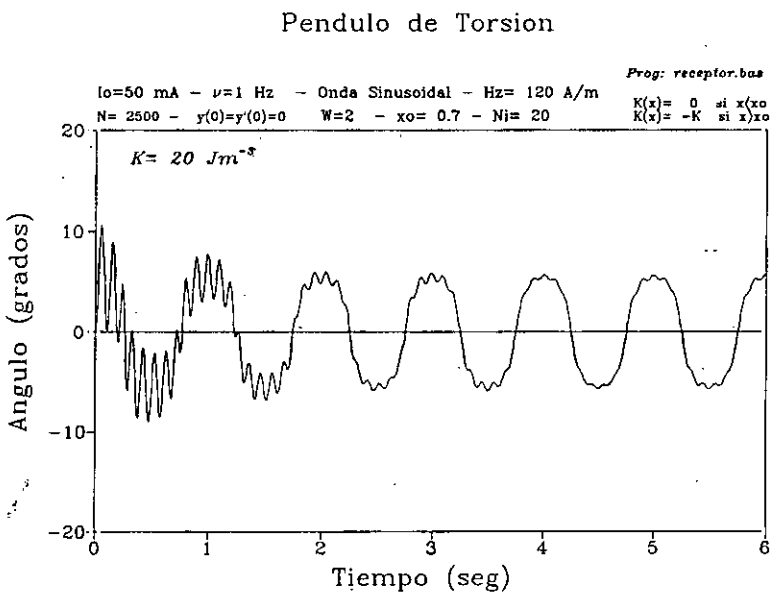


Figura 5 -. Dependencia temporal del ángulo de torsión para varias anisotropías:

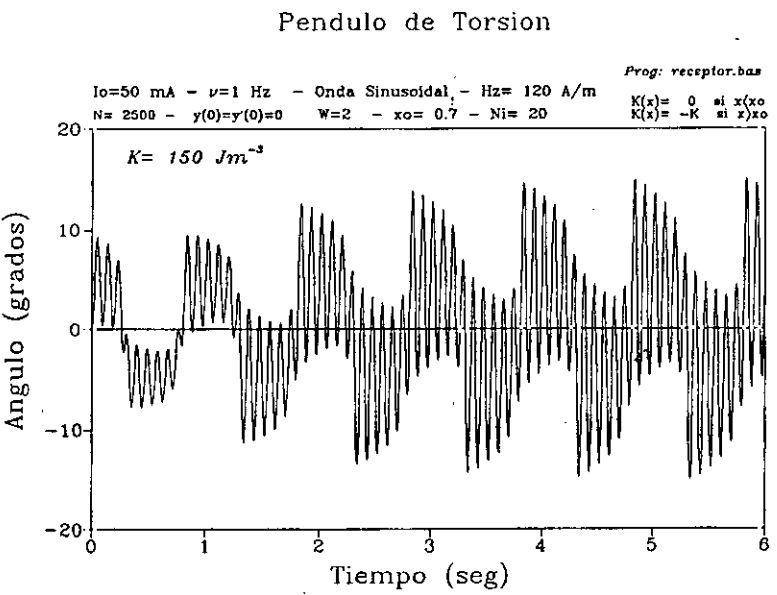
a) $K=0$, b) $K=20 \text{ Jm}^{-3}$, c) $K=150 \text{ Jm}^{-3}$



a)

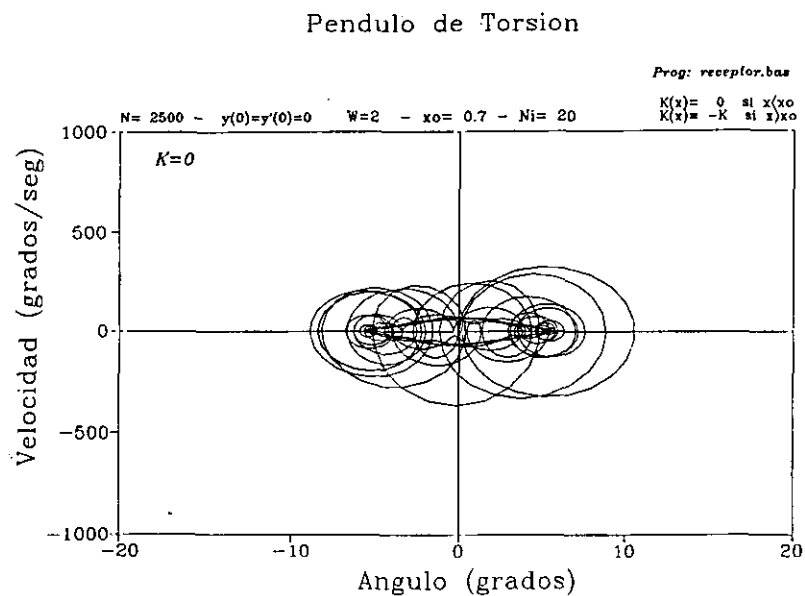


b)

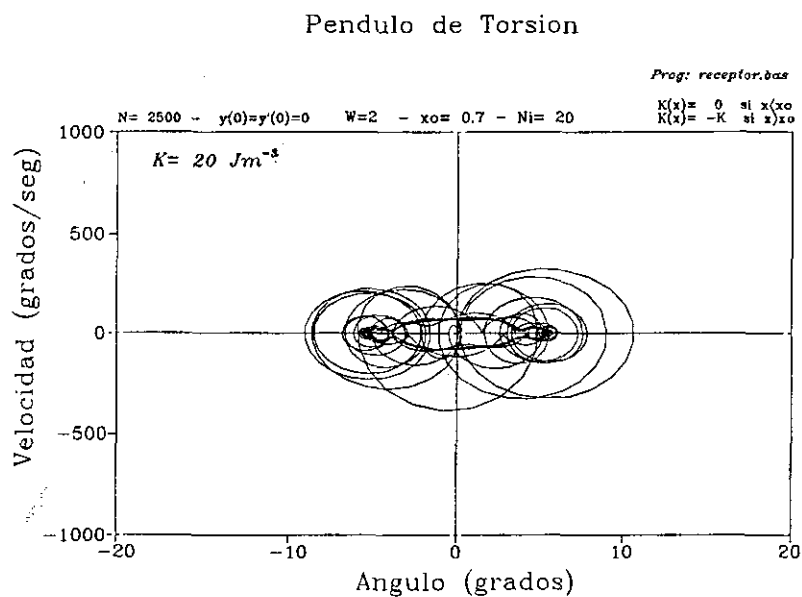


c)

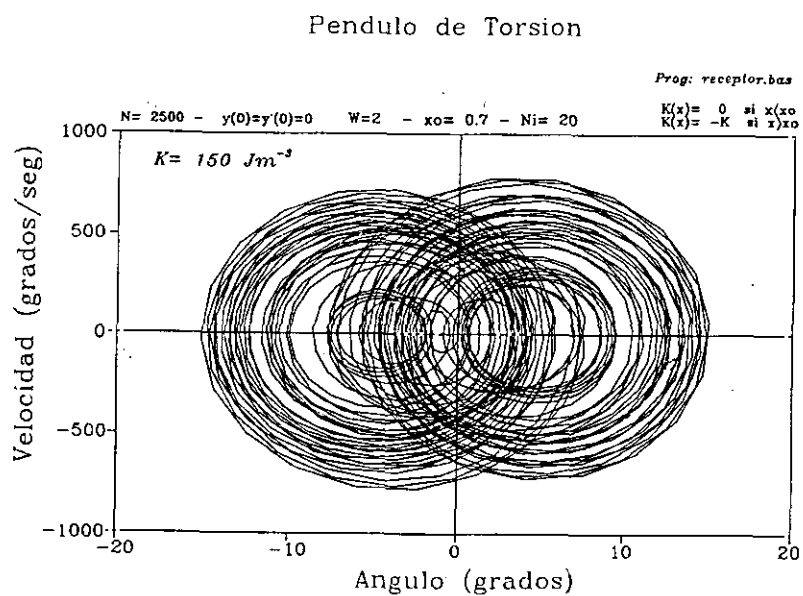
Figura 6 -.Representación del ángulo frente a la velocidad para varias anisotropías: . . .
a) $K = 0$, b) $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, c) $K = 150 \text{ Jm}^{-3}$.



a)



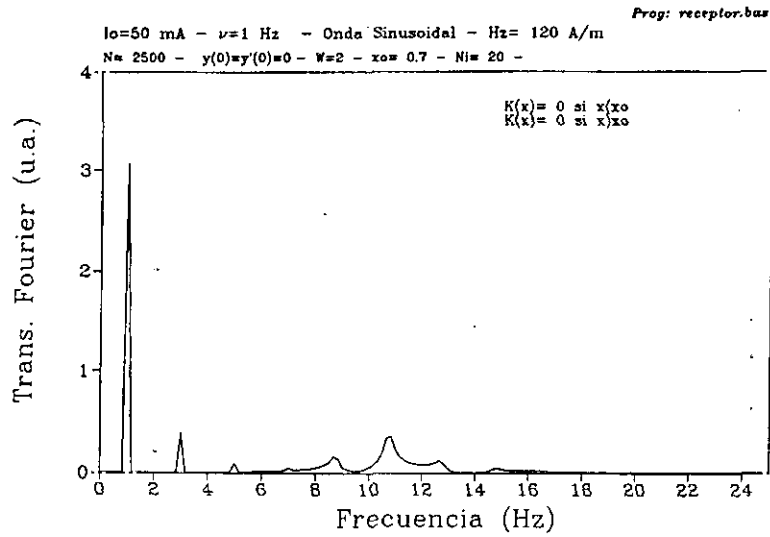
b)



c)

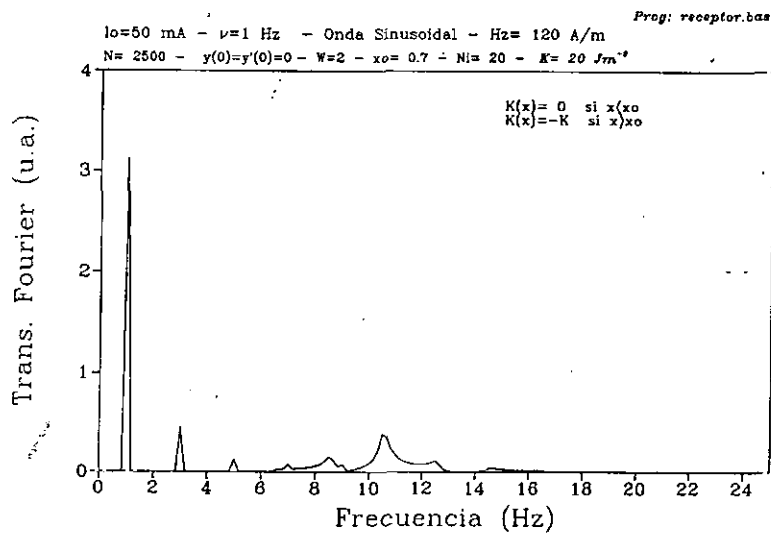
Figura 7 - Transformada de Fourier para tres anisotropias distintas:
a) $K = 0$, b) $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, c) $K = 150 \text{ Jm}^{-3}$

Pendolo de Torsion



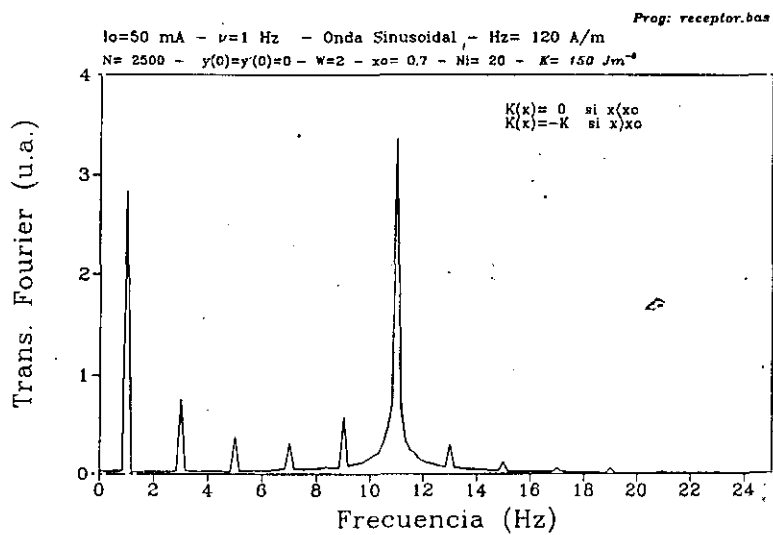
a)

Pendolo de Torsion



b)

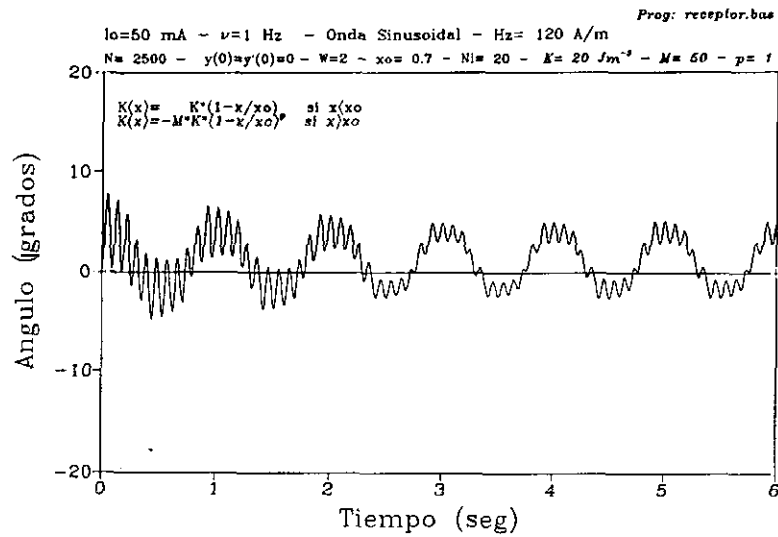
Pendolo de Torsion



c)

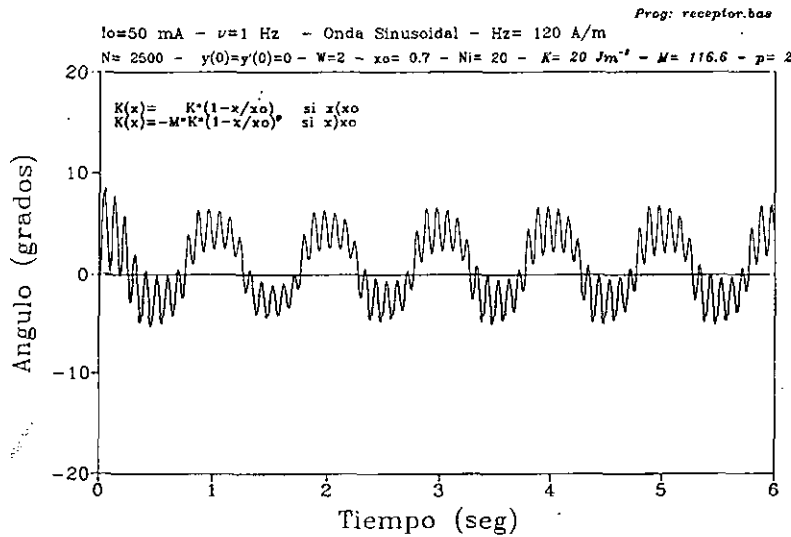
Figura 8 -. Dependencia temporal del ángulo de torsión para diferentes anisotropías continuas.

Pendulo de Torsion



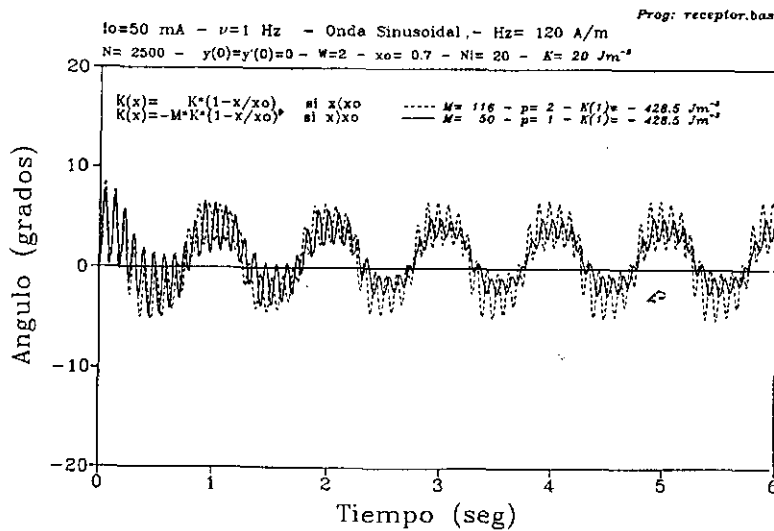
a)

Pendulo de Torsion



b)

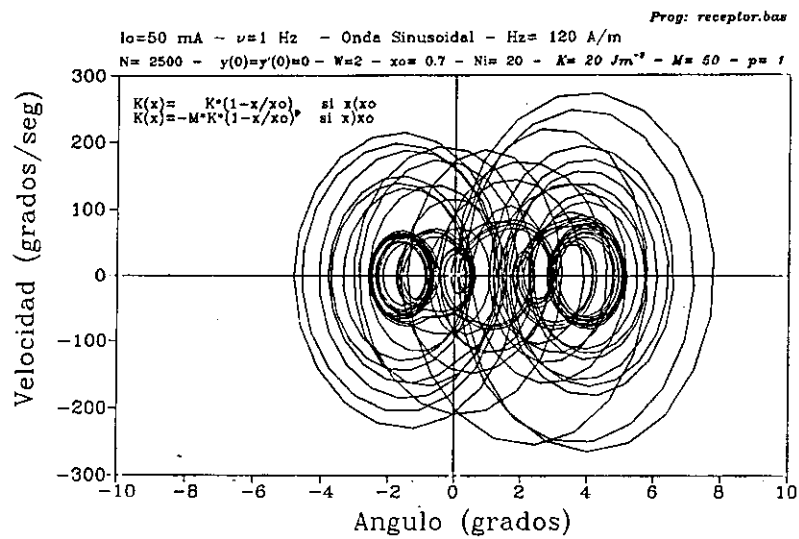
Pendulo de Torsion



c)

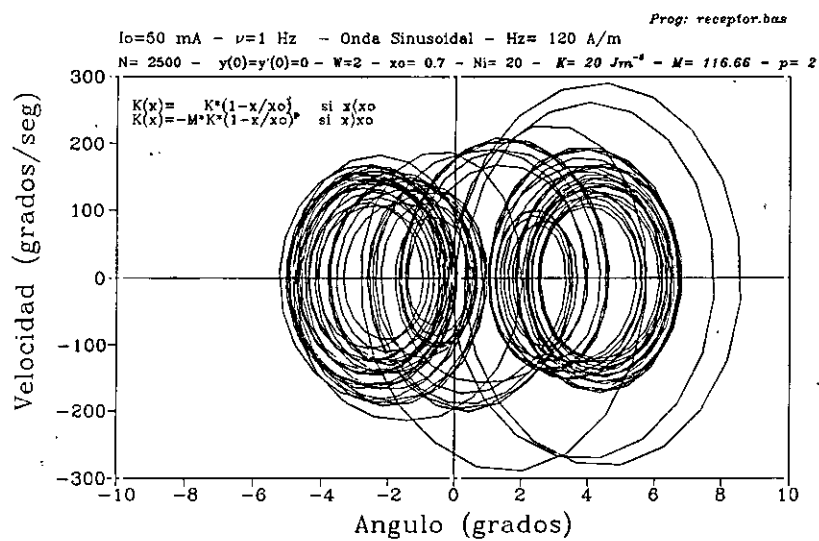
Figura 9 -. Espacio de fases para dos anisotropías continuas.

Pendulo de Torsion



a)

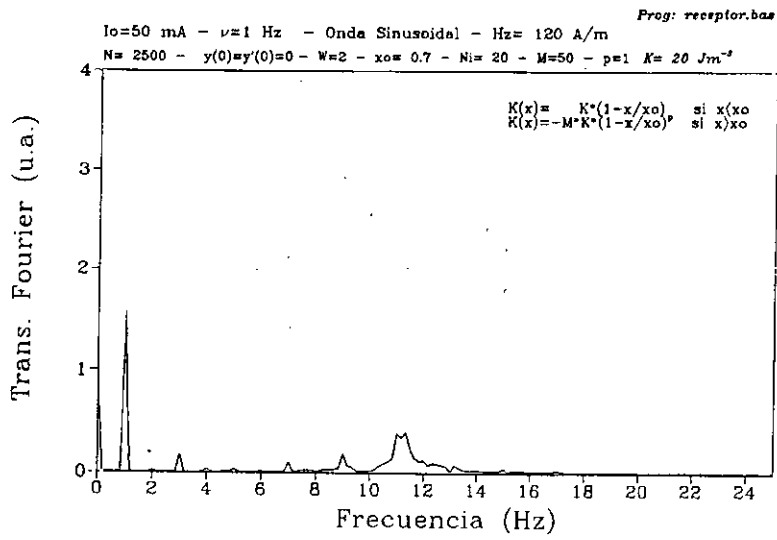
Pendulo de Torsion



b)

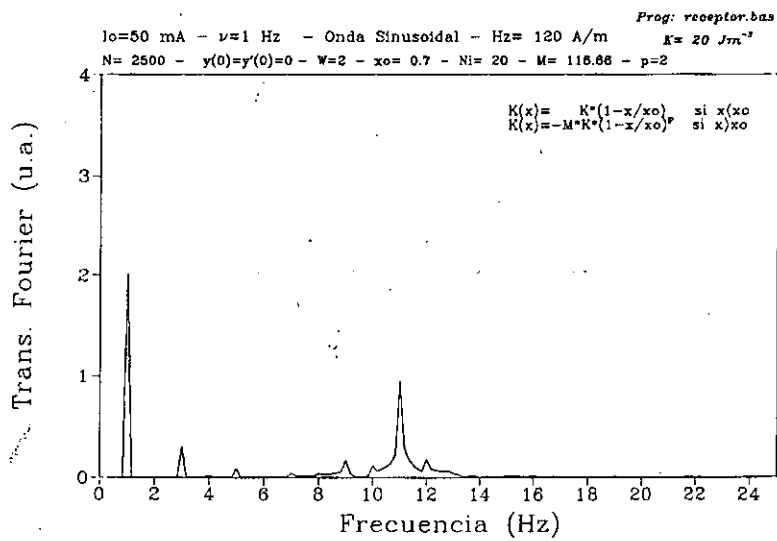
Figura 10 -. Espectro de frecuencias para dos anisotropias continuas.

Pendulo de Torsion



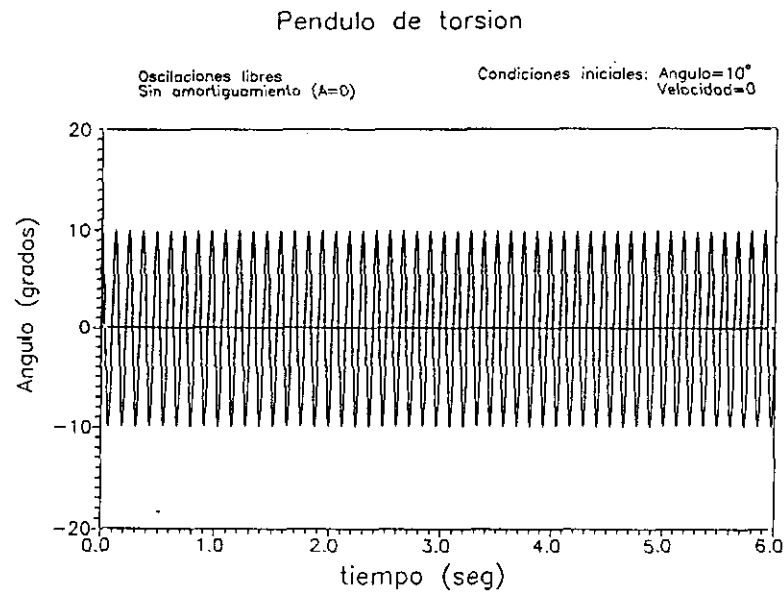
a)

Pendulo de Torsion

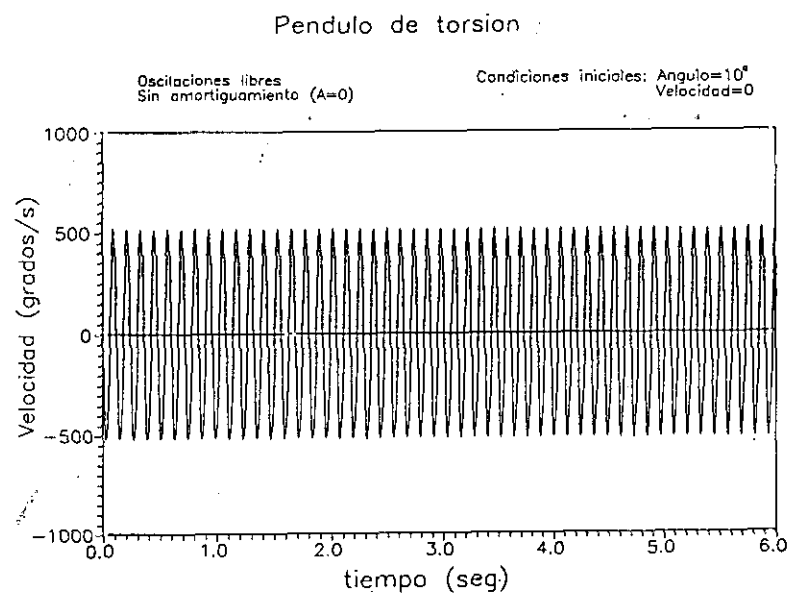


b)

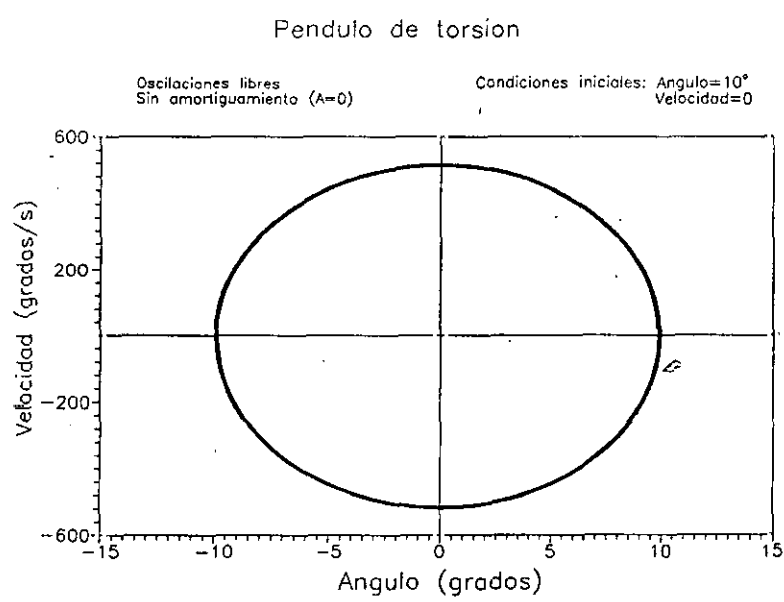
Figura 11 -. Dinámica para péndulo libre sin amortiguamiento ($A=0$).
a) ángulo, b) velocidad, c) espacio de fases



a)



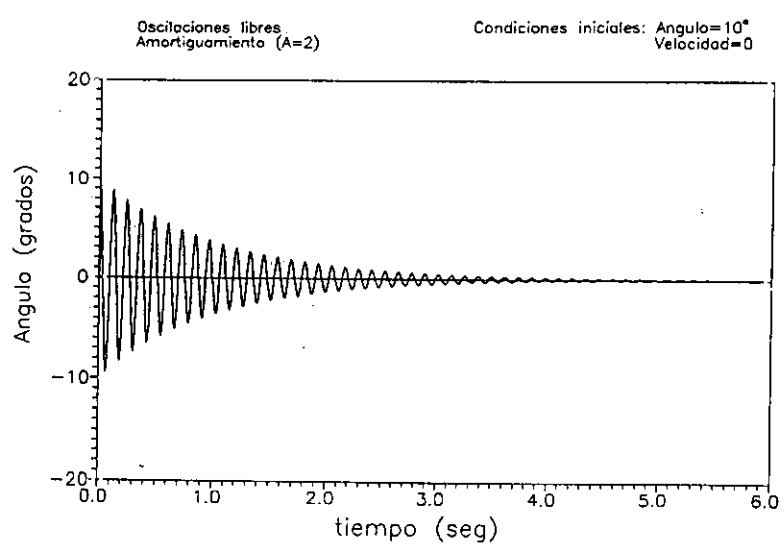
b)



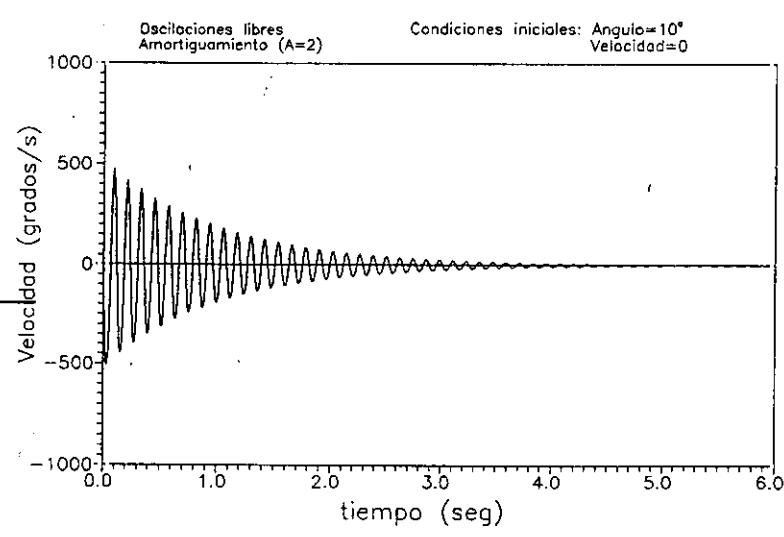
c)

Figura 12 -. Dinámica para péndulo libre con amortiguamiento ($A=2 \text{ s}^{-1}$): a) ángulo, b) velocidad, c) espacio de fases

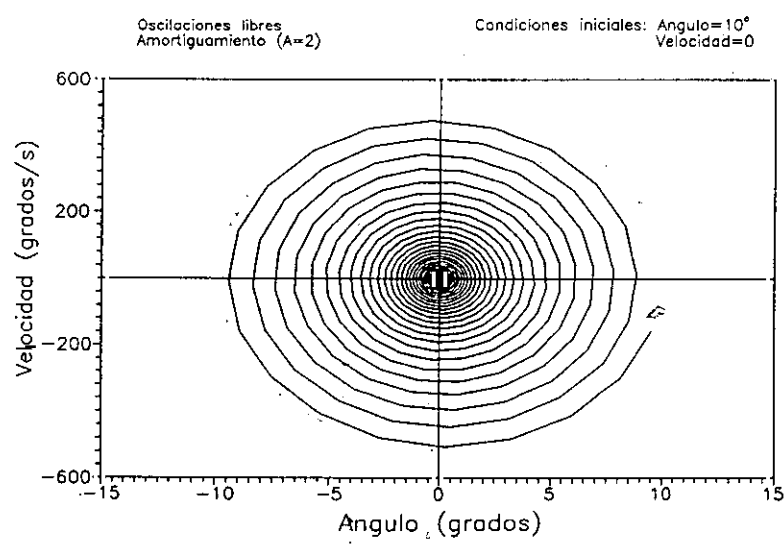
Pendulo de torsion



a)



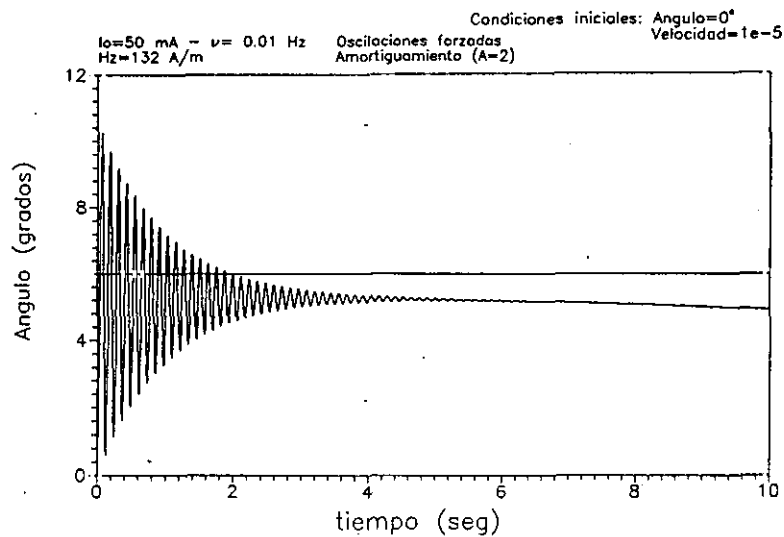
b)



c)

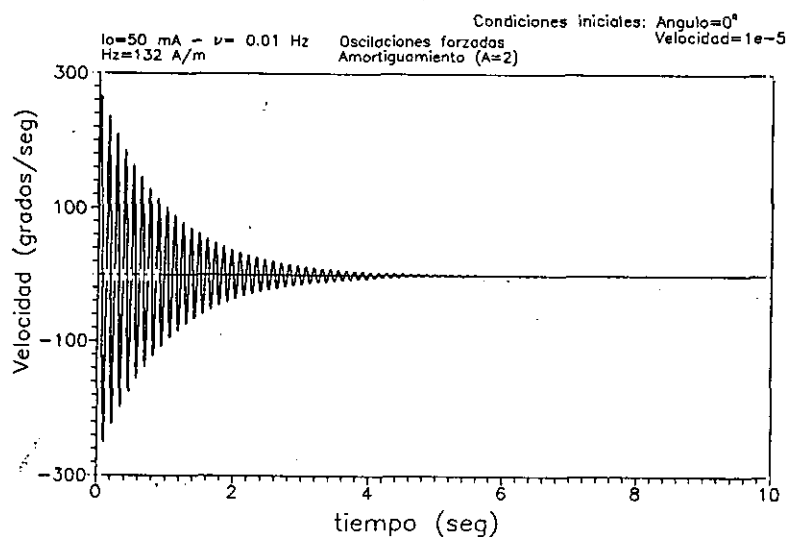
Figura 13 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 0.01$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases

Pendulo de torsion



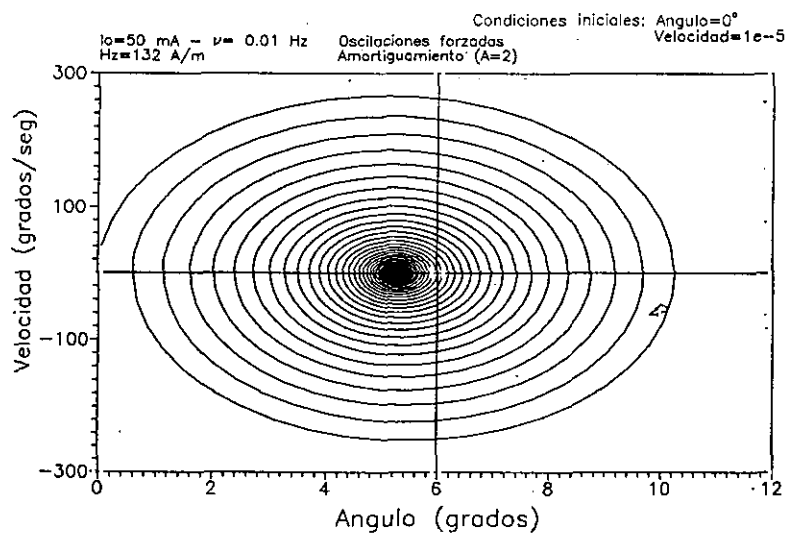
a)

Pendulo de torsion



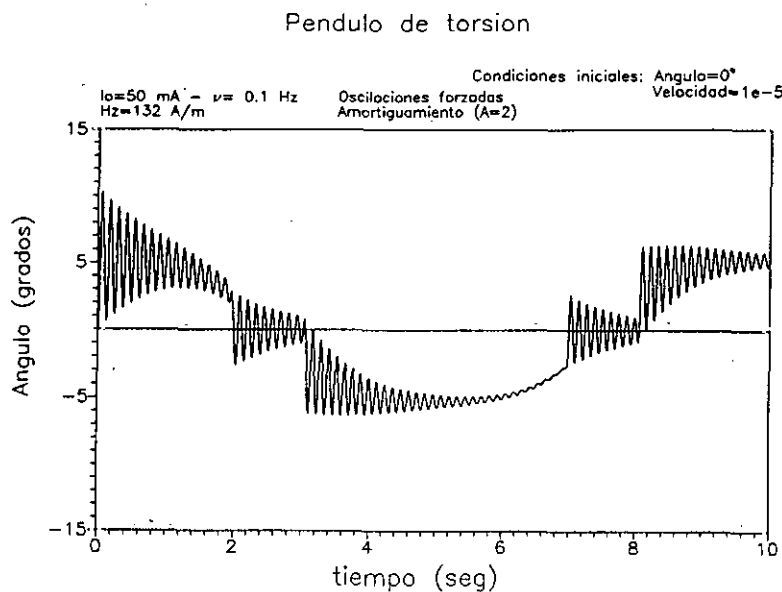
b)

Pendulo de torsion

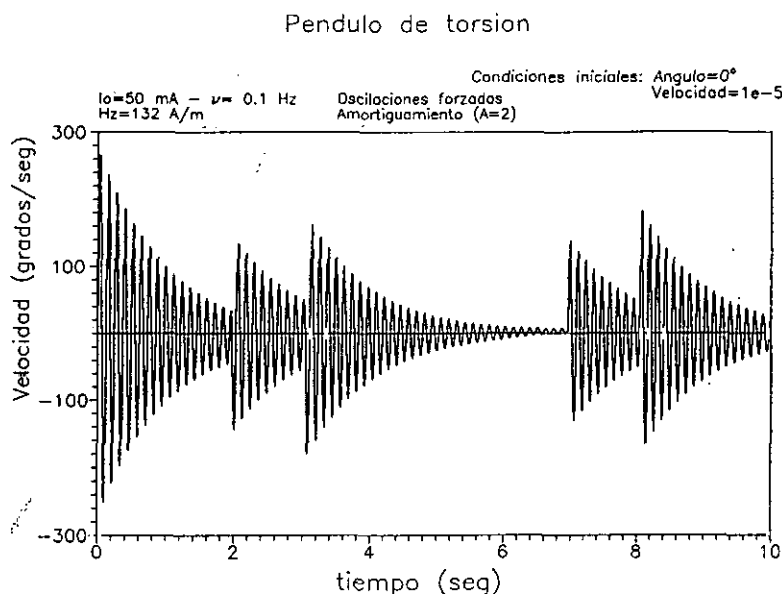


c)

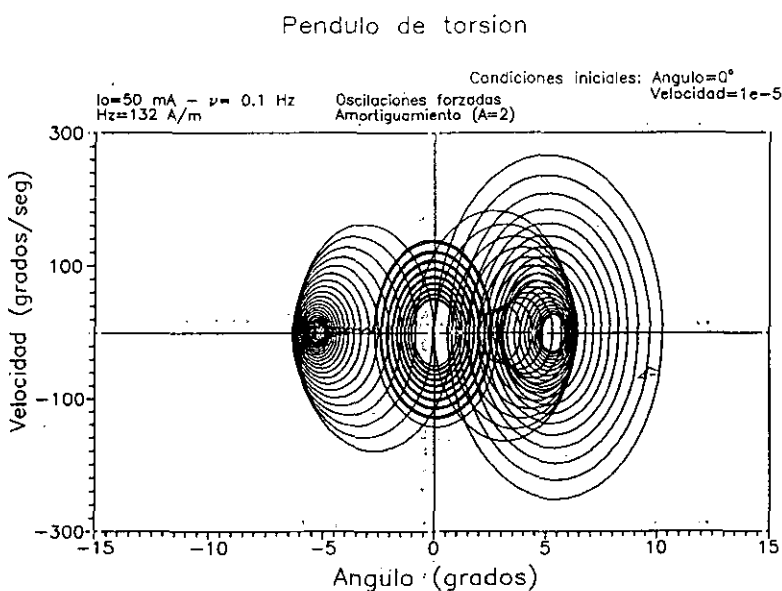
Figura 14 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 0.1$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases



a)



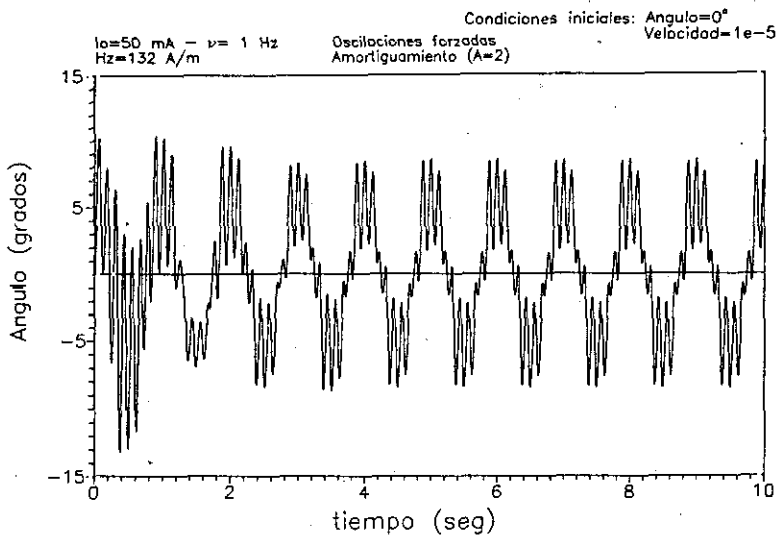
b)



c)

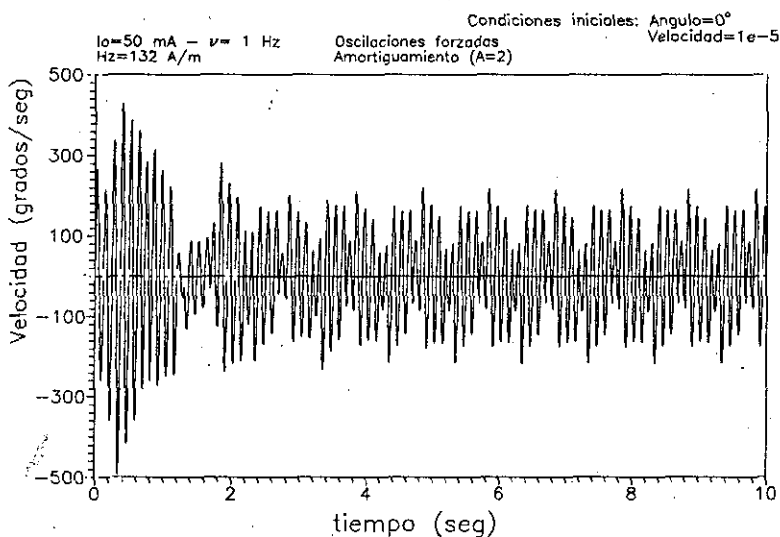
Figura 15 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 1$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases

Pendulo de torsion



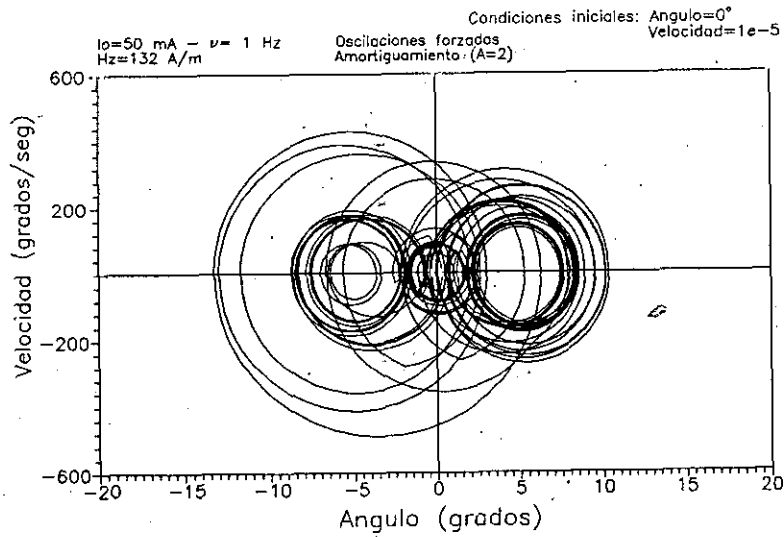
a)

Pendulo de torsion



b)

Pendulo de torsion

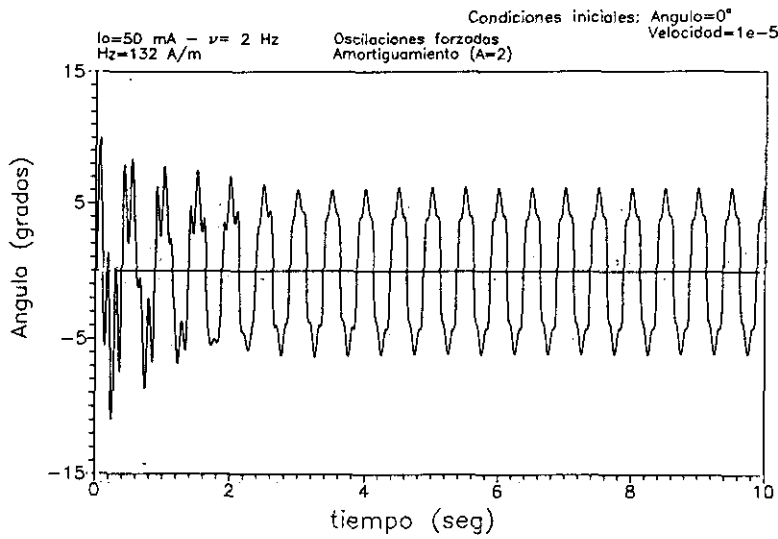


c)

Figura 16 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 2$ Hz.

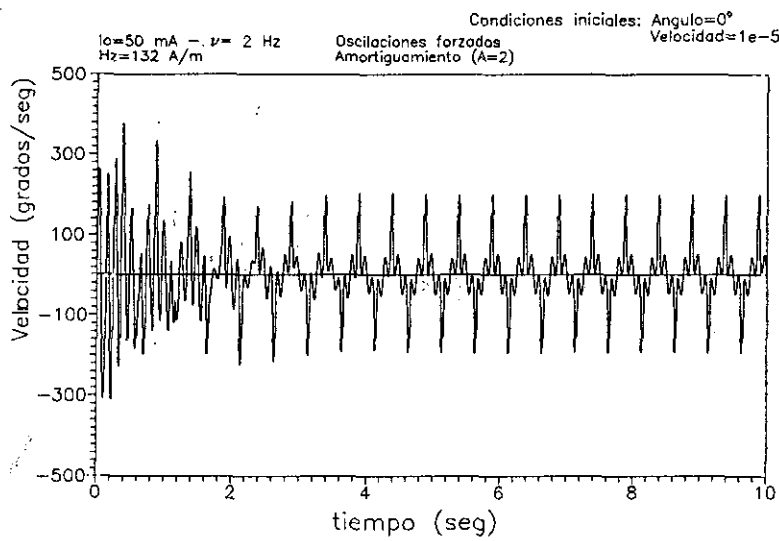
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases

Pendulo de torsion



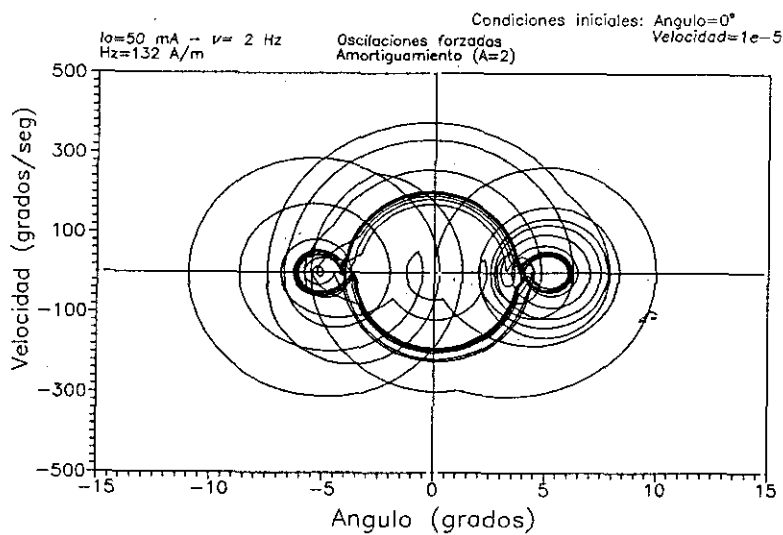
a)

Pendulo de torsion



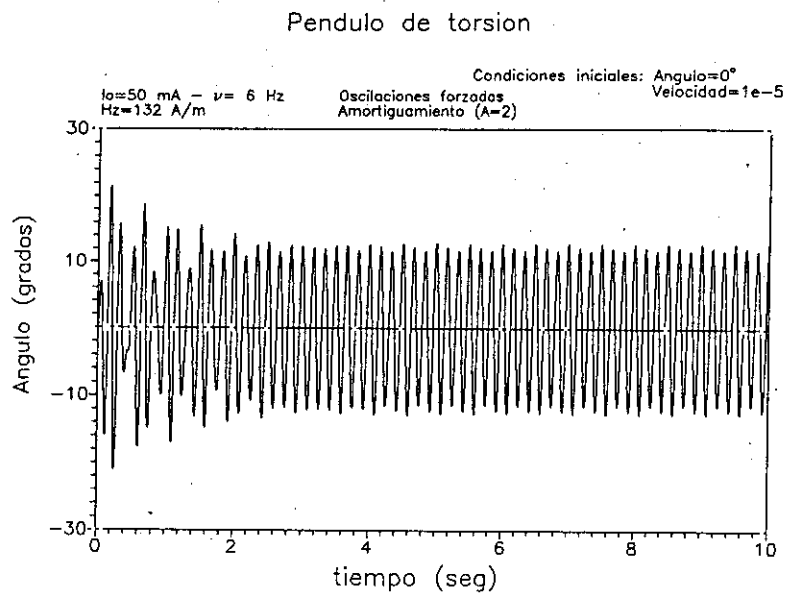
b)

Pendulo de torsion

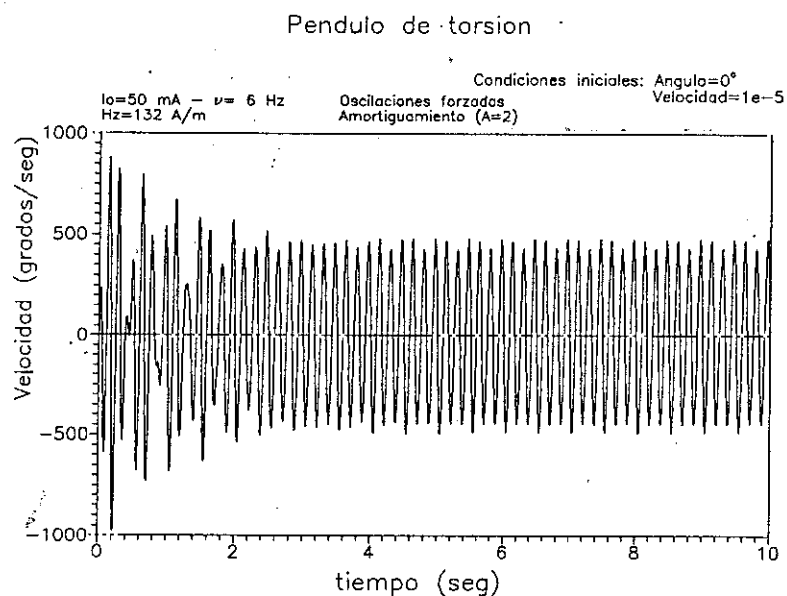


c)

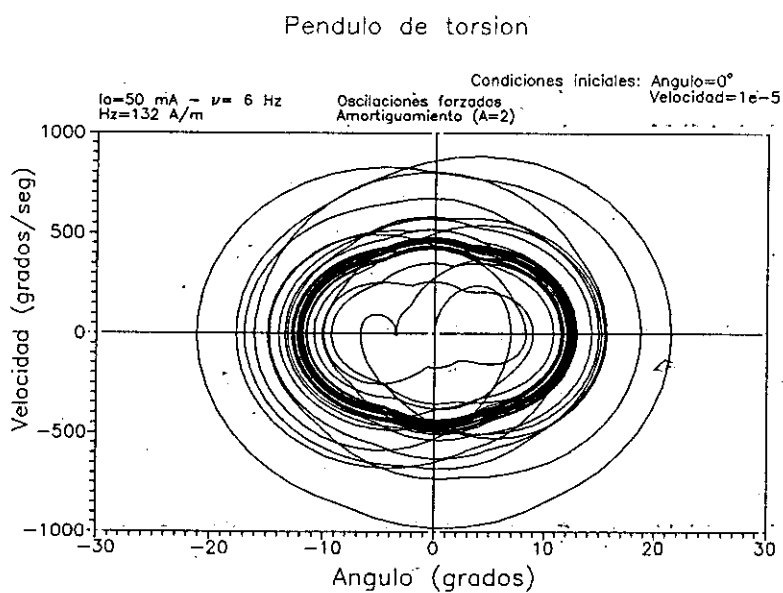
Figura 17 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 6$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases



a)



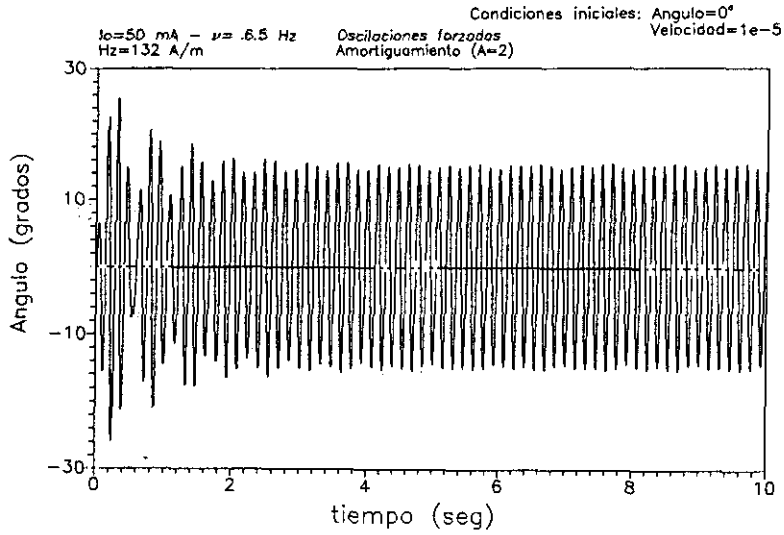
b)



c)

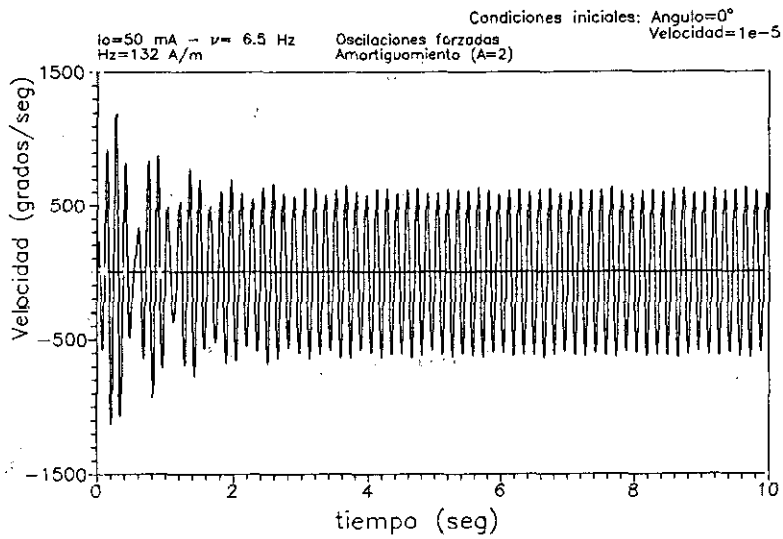
Figura 18 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 6.5$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases

Pendulo de torsion



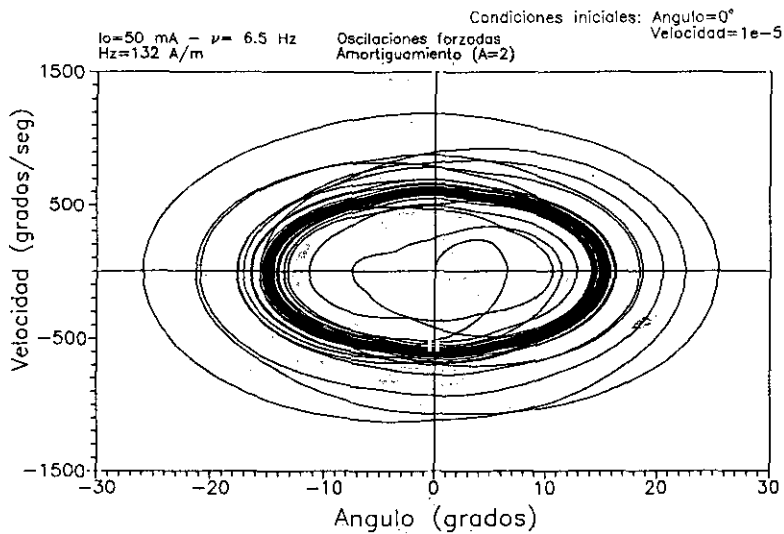
a)

Pendulo de torsion



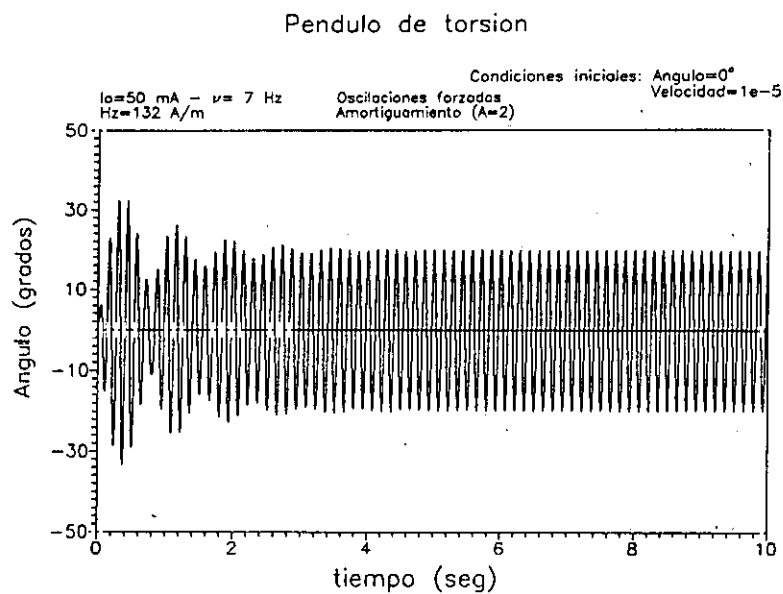
b)

Pendulo de torsion

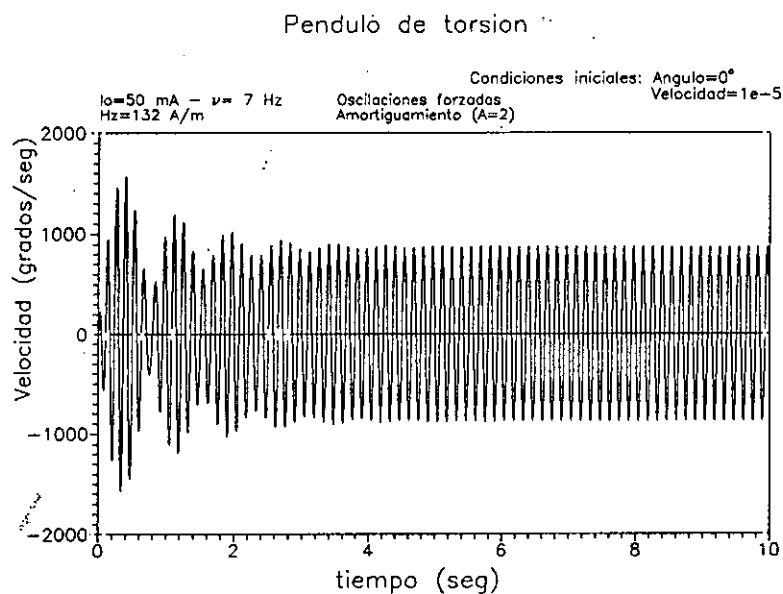


c)

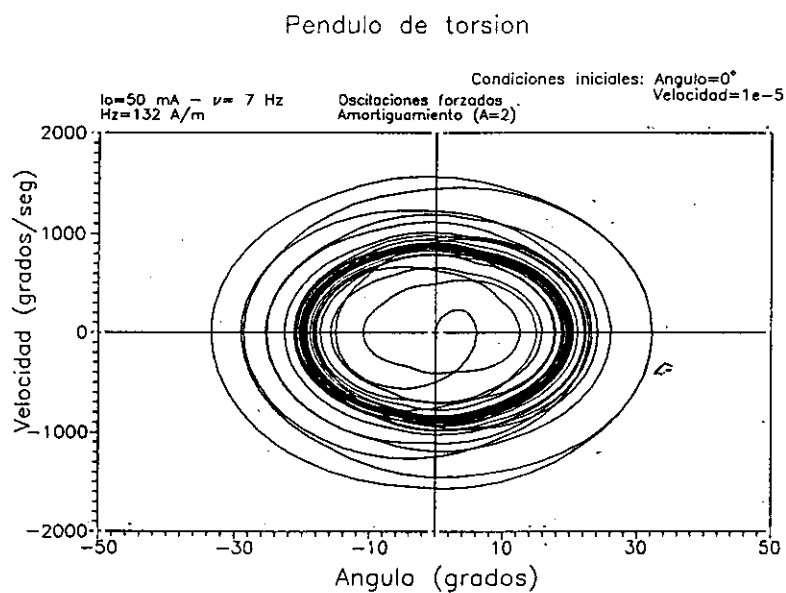
Figura 19 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 7$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases



a)



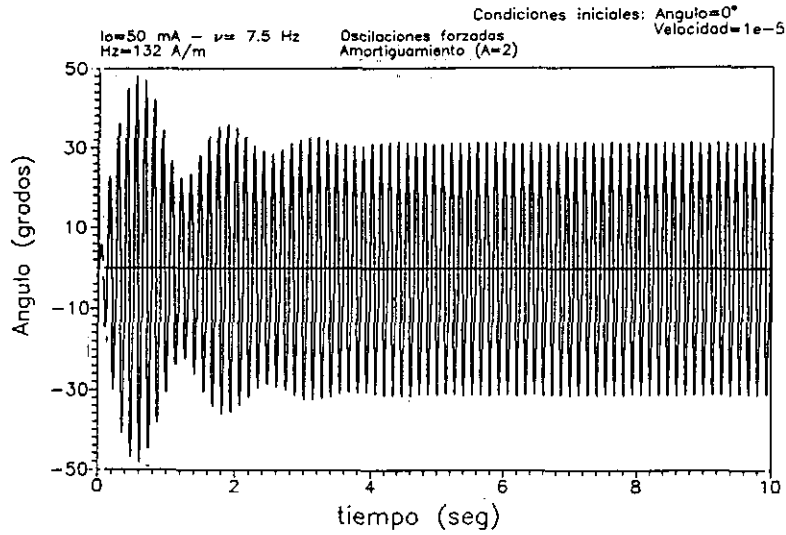
b)



c)

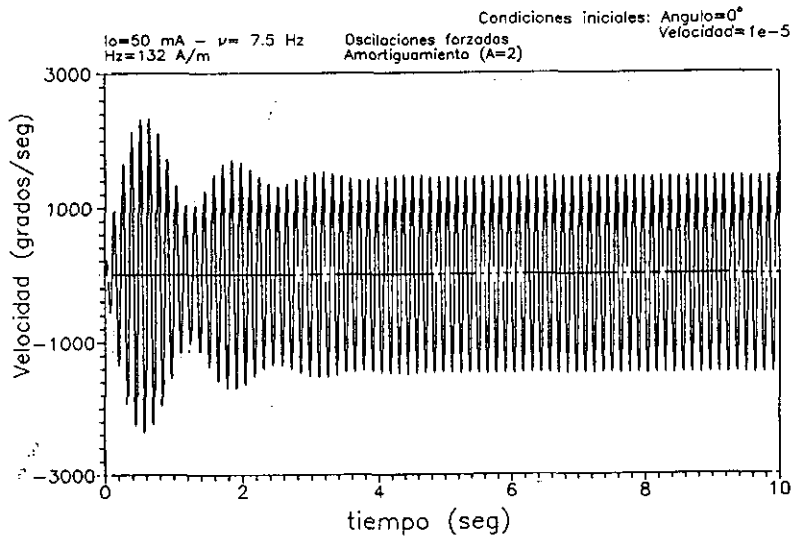
Figura 20 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 7.5$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases

Pendulo de torsion



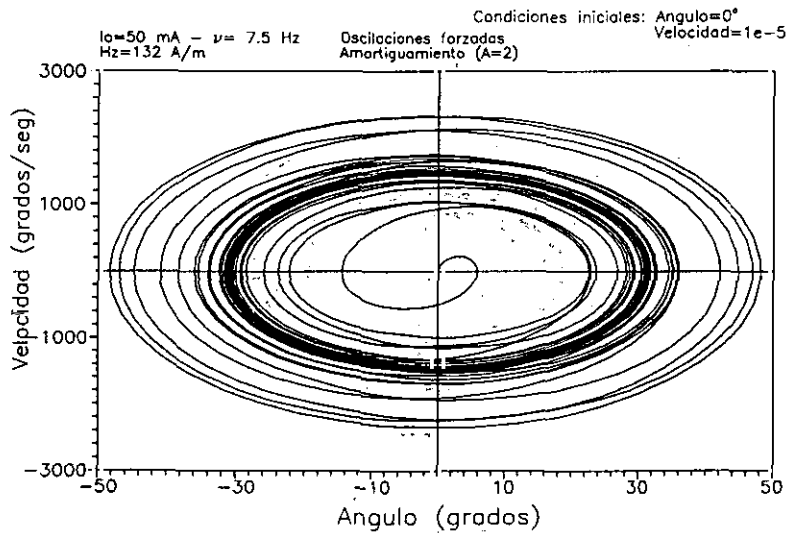
a)

Pendulo de torsion



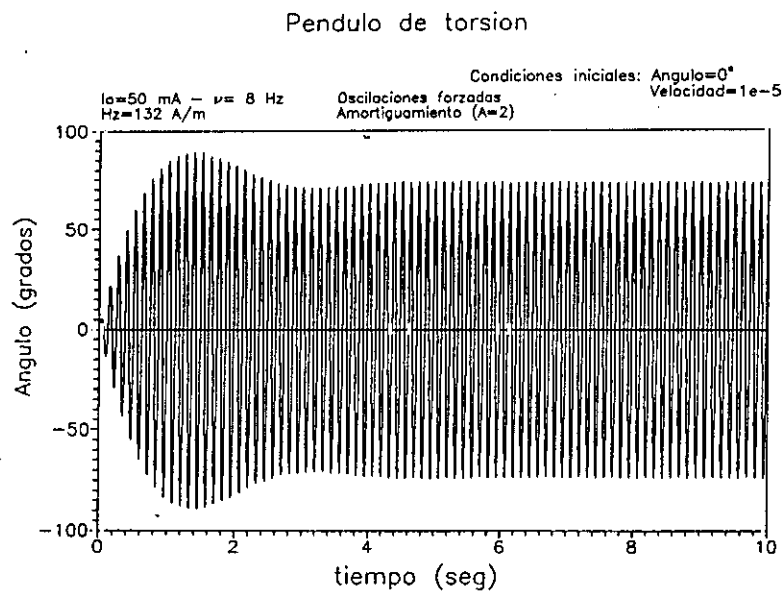
b)

Pendulo de torsion

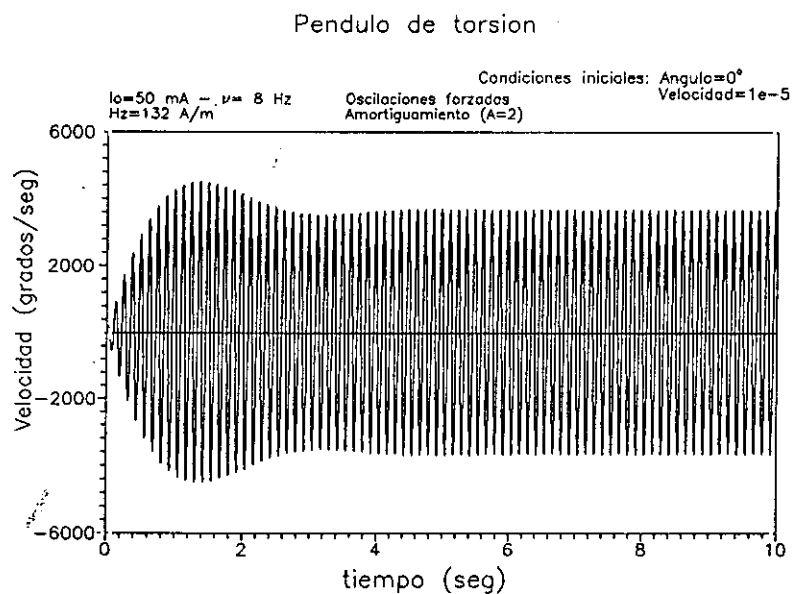


c)

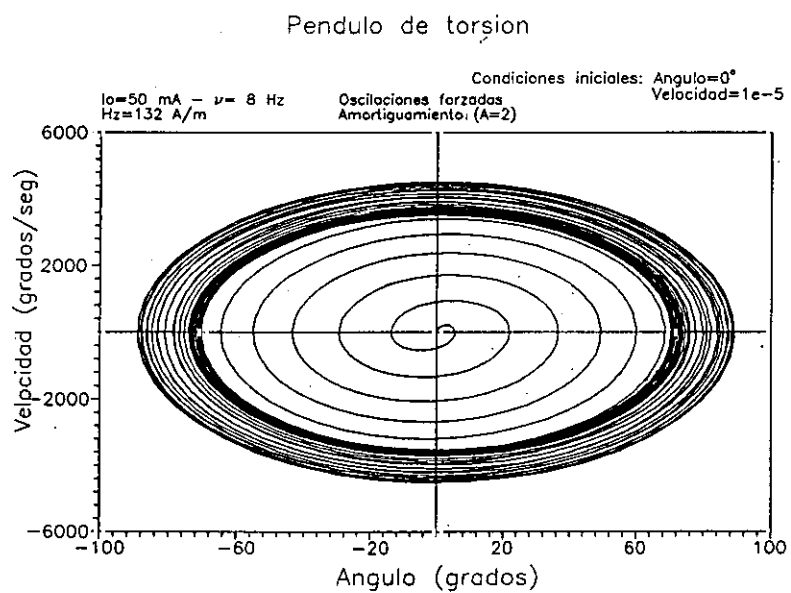
Figura 21 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu=8$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases



a)



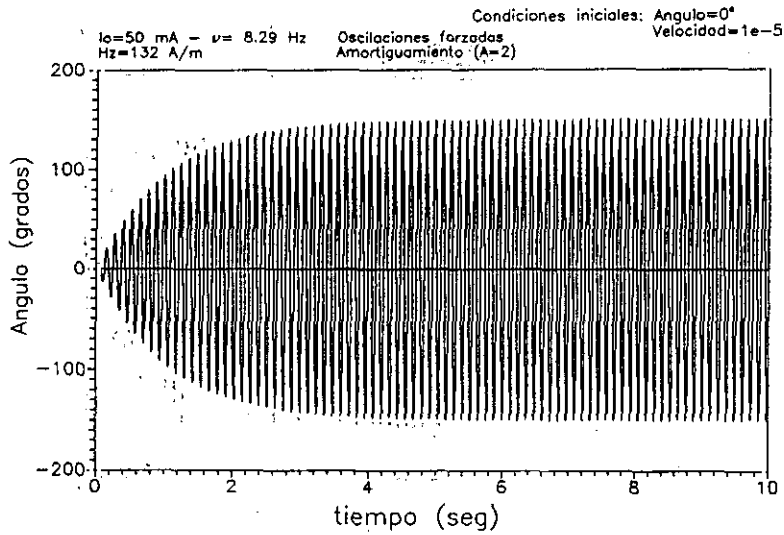
b)



c)

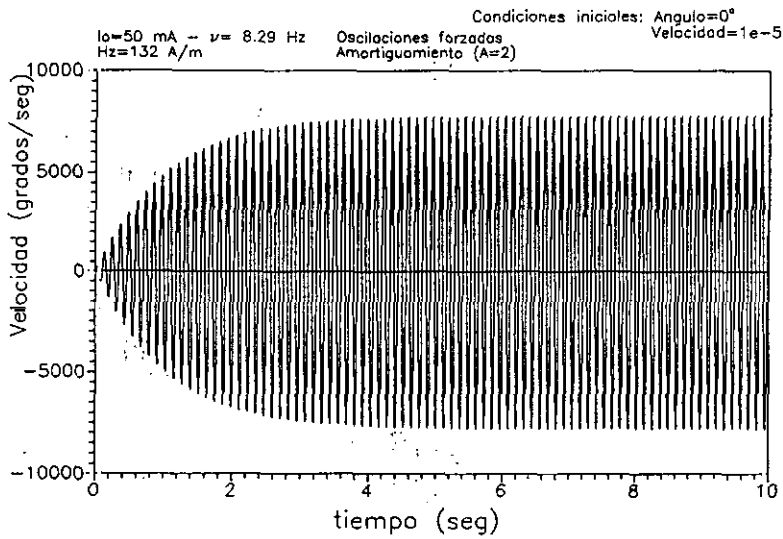
Figura 22 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 8.29$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases

Pendulo de torsion



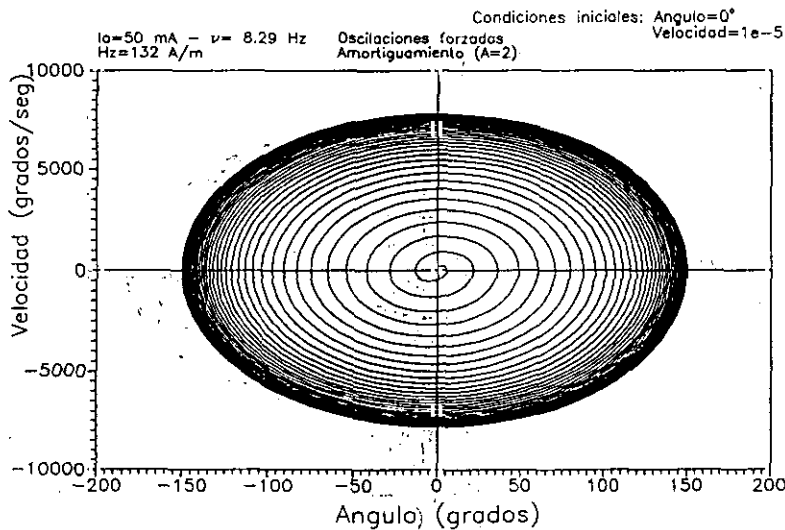
a)

Pendulo de torsion



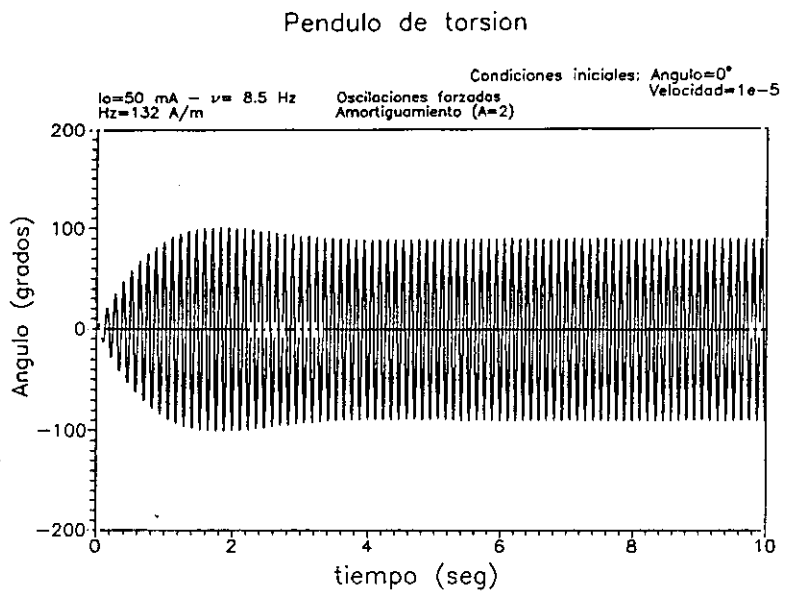
b)

Pendulo de torsion

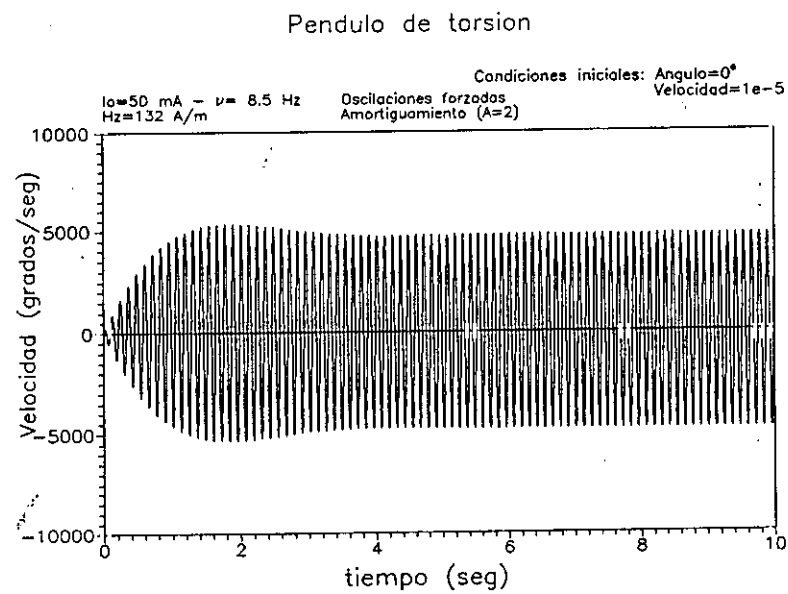


c)

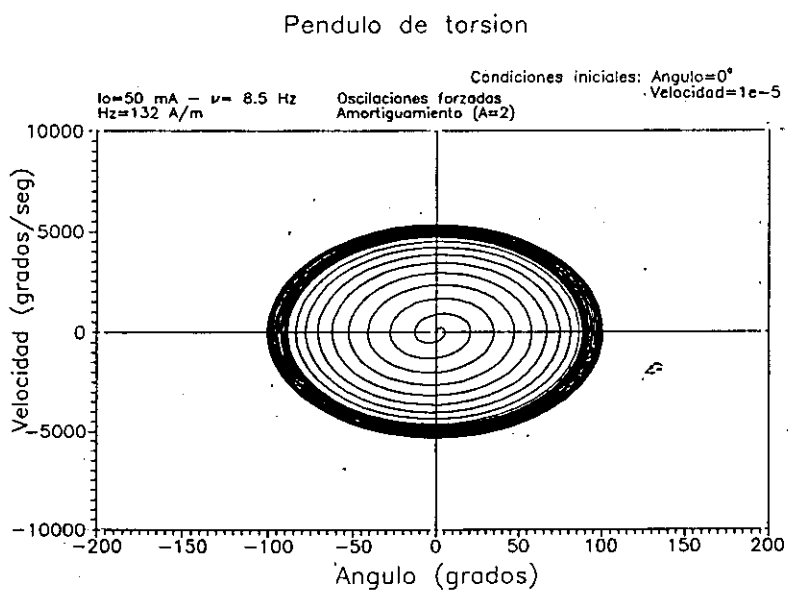
Figura 23 - Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 8.5$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases



a)



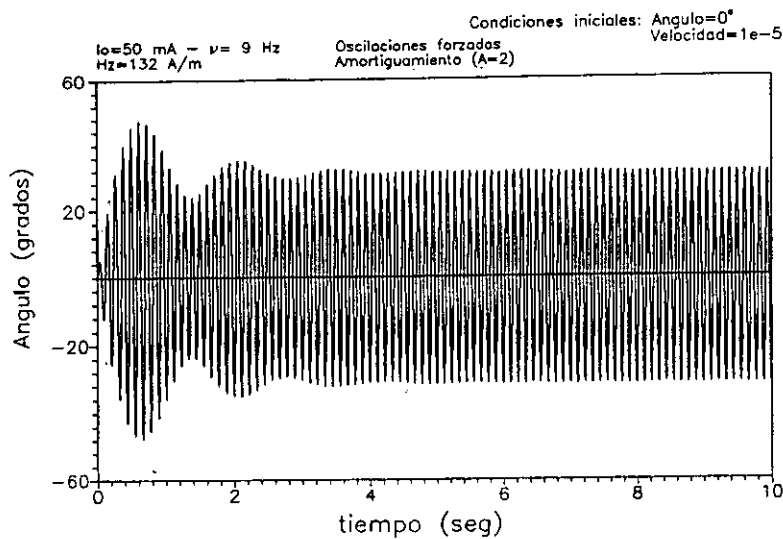
b)



c)

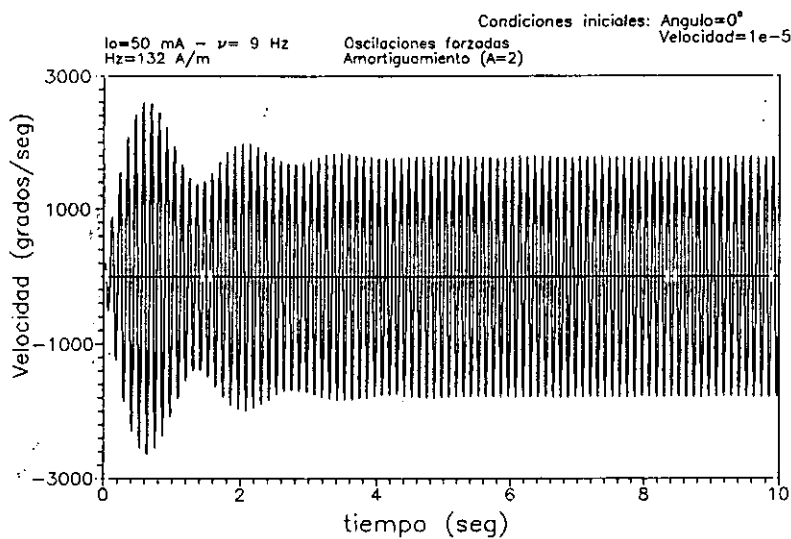
Figura 24 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 9$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular; c) mapa de fases

Pendolo de torsion



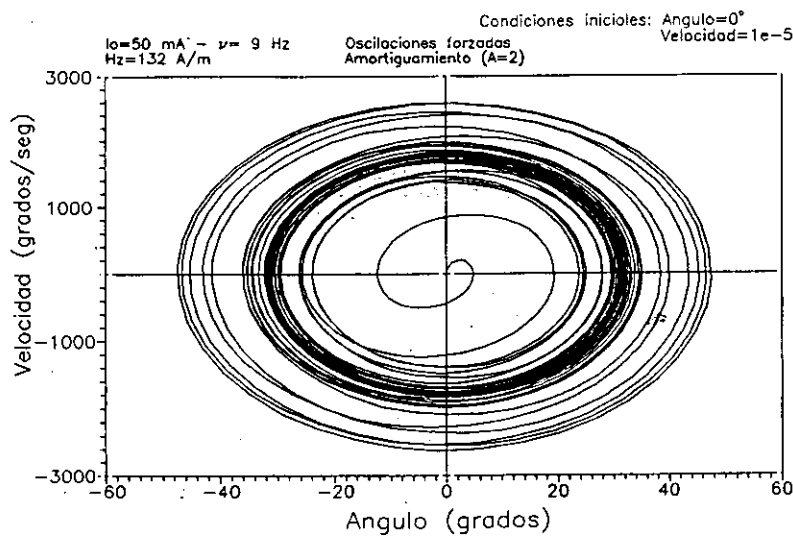
a)

Pendolo de torsion



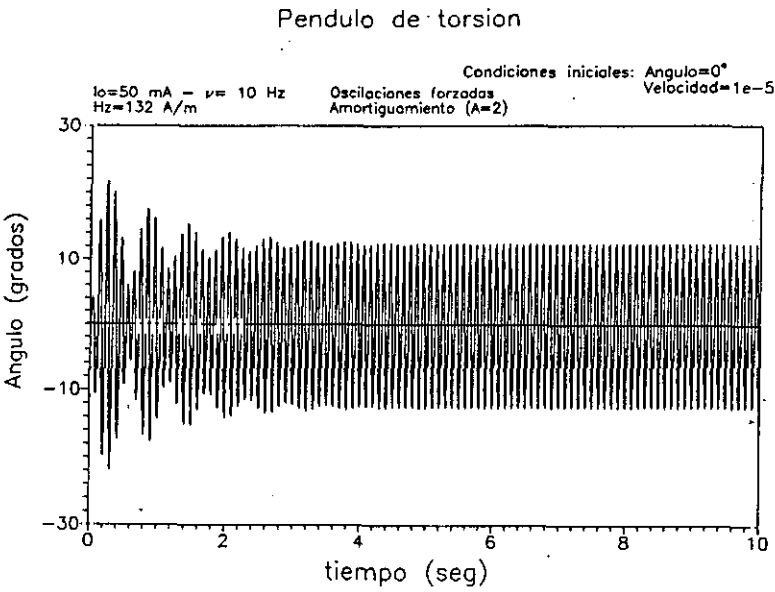
b)

Pendolo de torsion

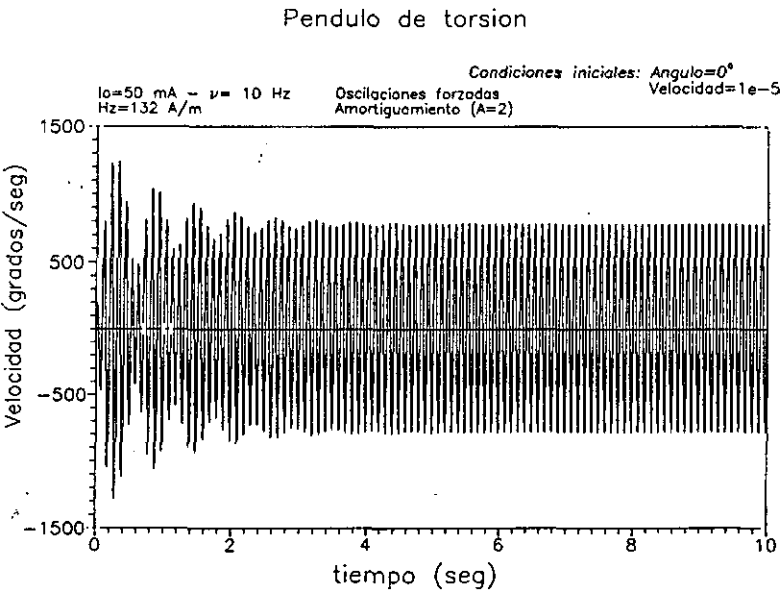


c)

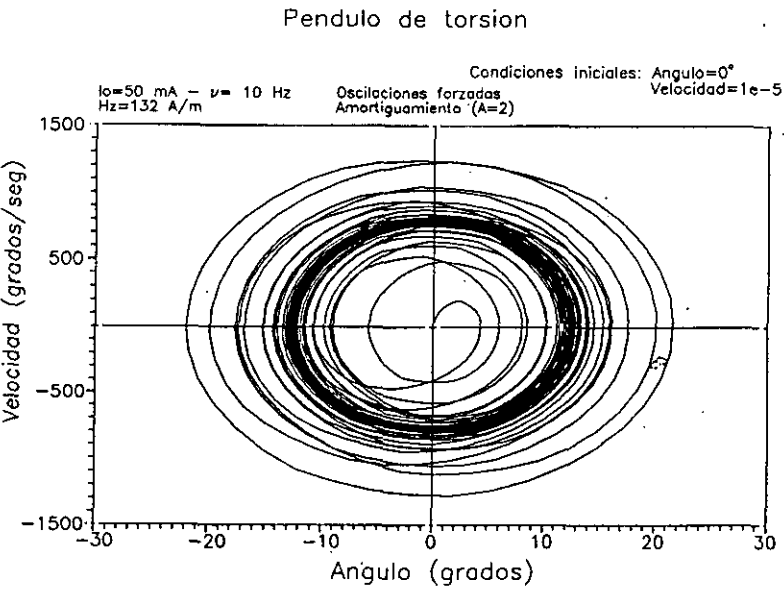
Figura 25 - Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 10$ Hz.
a) ángulo de torsión, b) velocidad angular, c) mapa de fases



a)



b)



c)

Si se representa el ángulo máximo en función de la frecuencia de la corriente se aprecia un incremento de aquél al aumentar ésta. Alcanza el valor más alto en la frecuencia de 8.29 Hz (resonancia), para caer bruscamente cuando se sobrepasa la citada frecuencia (figura 26a). Conforme se va incrementando la frecuencia de excitación, acercándose a la frecuencia de resonancia del péndulo, éste va absorbiendo más energía, hecho que se traduce en una mayor amplitud de oscilación. Una vez sobrepasada la frecuencia de resonancia, el péndulo no es capaz de absorber más energía de los campos magnéticos, disminuyendo bruscamente la citada amplitud. Si se sigue aumentando la frecuencia, el péndulo comienza a tener dificultades para seguir la oscilación de los campos, por lo que sigue decreciendo el ángulo máximo girado.

La capacidad de absorber energía dependerá del parámetro de amortiguamiento, que limitará esa capacidad. La figura 26b representa el ángulo máximo de oscilación en función de la frecuencia de la corriente para amortiguamientos crecientes, $A = 2 \text{ s}^{-1}$, $A = 10 \text{ s}^{-1}$ y $A = 15 \text{ s}^{-1}$. Cuanto mayor es el amortiguamiento, menor es el ángulo máximo girado.

El comportamiento mecánico representado en la figura 26a es *similar al magnético experimental* encontrado en el péndulo ; en la figura 3 del apartado correspondiente al estudio experimental del efecto Wiedemann, se aprecia un aumento progresivo del pico de la transformada de Fourier al ir aumentando la frecuencia de la corriente. La figura corresponde al caso en que se aplica un campo axial $H_z = 205.7 \text{ A/m}$, en el que el hilo amorfo está saturado y encontramos únicamente imanación dirigida según el eje del hilo.

El modelo de hilo que hemos usado para obtener la figura 26a corresponde al caso en que las anisotropías son nulas o muy pequeñas en comparación con las densidades de energía que aportan los campos, es decir, el caso en que el campo H_z influye decisivamente, sin ser entorpecido por anisotropías, en el movimiento de la imanación.

La similitud entre el comportamiento experimental y el teórico parece indicar una íntima conexión entre el comportamiento mecánico y el magnético del péndulo; según el resultado experimental mencionado arriba, la imanación parece moverse a frecuencias más definidas (transformada de Fourier más altas) cuanto más próxima está la frecuencia excitadora a la de resonancia mecánica del péndulo.

Otros resultados experimentales (ver figuras 2 y 4 del apartado correspondiente al estudio experimental del efecto Wiedemann) muestran, para campos axiales menores que el indicado anteriormente, la *aparición de dos frecuencias de resonancia* diferentes. En principio, cada una de ellas puede asignarse a cada una de las dos zonas en que se estructura en hilo desde el punto de vista magnético: una frecuencia correspondería al núcleo y otra a la corteza externa.

Puede plantearse un modelo que de cuenta de este resultado: las dos zonas pueden simularse considerando un cilindro macizo en el interior de uno hueco (con cierto radio interno y externo). Cada cilindro, que está unido a un disco de idéntico momento de inercia, tiene un módulo de cizalladura diferente, por lo que la frecuencia de resonancia del péndulo que constituyen cada uno de ellos, será diferente. Cada uno de los cilindros responderá de forma distinta al campo excitador. Este modelo se estudiará en detalle más adelante. Ahora vamos a considerar un aspecto experimental del comportamiento mecánico del péndulo que no ha sido considerado en estudio llevado a cabo hasta ahora. Se trata del movimiento vertical del péndulo.

Movimiento vertical del péndulo

Cuando se estudia el movimiento mecánico del péndulo, gracias a la luz láser reflejada en el pequeño espejo pegado en el disco del péndulo, se aprecia que el spot del láser forma varios tipos de figuras en la pantalla situada a 30 centímetros del péndulo. Según sea la magnitud y las frecuencias de los campos, pueden observarse líneas rectas, bucles semejantes a figuras de Lissajous y otras de forma indefinible.

La presencia de esas figuras tipo Lissajous revela la presencia de un *movimiento oscilatorio vertical*, ya que las figuras de Lissajous resultan de la composición de dos movimientos oscilatorios perpendiculares entre sí.

Hasta ahora sólo se había considerado el movimiento de torsión, que mueve el disco del péndulo en sentido horizontal. Cuando se dedujo la tensión de torsión (relación (25)), responsable de la aparición del momento torsor elástico (que intenta compensar el momento torsor exterior debido a los campos magnéticos), se despreció la influencia de las otras tensiones que presentaban únicamente una dependencia de segundo orden en el ángulo de torsión φ . Una de estas tensiones es axial, σ_z (relación (23)). Cuando los campos magnéticos torsionan el hilo, éste genera una tensión de torsión que se opone a la torsión exterior; para ángulos de torsión suficientemente grandes, de modo que φ^2 sea importante, aparecerá también una tensión axial, es decir, a la par que el péndulo gira también se mueve hacia arriba. A continuación se ofrece una expresión aproximada de la tensión axial.

Considérese la relación (23); tiene dos términos, ambos del mismo orden de magnitud (relacionados con el valor de G a través de las relaciones (20)) y presentan la misma dependencia con φ . Si despreciamos la dependencia en z^2 , encontramos una expresión del tipo:

$$\sigma_z = G \varphi^2 r^2 \quad (54)$$

Es proporcional al módulo de cizalladura, al cuadrado del ángulo de torsión por unidad de longitud y depende del cuadrado de la coordenada radial.

Para encontrar la *tensión axial total* se hace un promedio en el hilo. Si $dV = r dr \cdot d\theta \cdot dz$ es un elemento diferencial de volumen en el hilo, se tiene:

$$\langle \sigma_z \rangle_{\text{hilo}} = \frac{\iiint \sigma_z(\vec{r}) dV}{\iiint dV} \quad (55)$$

Se obtiene:

$$\langle \sigma_z \rangle_{\text{hilo}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R dr r \sigma_z(r) = G \varphi^2 \frac{R^2}{2} = G \alpha^2 \frac{R^2}{2L^2} \quad (56)$$

Para $R = 65.5 \mu\text{m}$, $G = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $L = 12.2 \text{ cm}$ y $\alpha = 15^\circ = 0.261$ radianes, se obtiene un valor $\langle \sigma_z \rangle = 589 \text{ Pa}$, valor que es mucho menor que la tensión de torsión que era del orden de MPa (relación (26)). Por consiguiente, el movimiento vertical es mucho más limitado que el horizontal debido a la diferencia en los ordenes de magnitud de las tensiones involucradas.

Por otro lado, el movimiento de la imanación provoca también un movimiento vertical. Cuando el campo H_z , debido a la corriente alterna que fluye por el hilo, cambia de sentido, induce un cambio de sentido en la componente axial de la imanación. Dado que el hilo amorfo tiene una constante de magnetostricción *alta y positiva*, es de esperar un alargamiento en la dirección de la imanación. Cuando ésta forme ángulos pequeños con el eje del hilo, habrá un alargamiento en esa dirección. Teniendo en consideración esto, puede calcularse una *fuerza axial* debida a los campos magnéticos.

Teniendo en cuenta que el alargamiento magnetostrictivo (Hernando, 1987) en la dirección del eje del hilo puede expresarse en la forma:

$$e = \frac{3}{2} \lambda \cos^2 \theta \quad (57)$$

donde θ es el ángulo que forma la imanación con el eje del hilo y λ la constante de magnetostricción del hilo. La tensión axial producida gracias a la magnetostricción será, en virtud de la ley de Hooke:

$$T = E e = \frac{3}{2} \lambda E \cos^2 \theta \quad (58)$$

donde E es el módulo de Young.

En el caso de anisotropías nulas, la posición $\theta(r)$ de la imanación en cada punto vendrá dada por:

$$\cos \theta(r) = \frac{H_z}{\sqrt{H_z^2 + H_\phi^2(r)}} \quad (59)$$

donde $H_\phi(r) = I_a \cdot r / R^2$, con $I_a = I / 2\pi$, siendo I la intensidad de corriente. Dada la dependencia con r , se promedia la tensión (58), para obtener la tensión total:

$$T = \frac{3}{2} \lambda E \langle \cos^2 \theta(r) \rangle \quad (60)$$

Se obtiene:

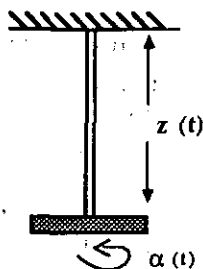
$$T = 3 \lambda G (1 + \nu) \frac{H_z^2 R^2}{I_a^2} \ln \left(\frac{H_z^2 + \frac{I_a^2}{R^2}}{H_z^2} \right) \quad (61)$$

donde se ha considerado la relación $G = E / (1 + \nu)$, siendo ν el módulo de Poisson, que se toma como $\nu = 0.33$ (Velázquez, 1991).

Ecuación de movimiento vertical

Para hallar la ecuación de movimiento vertical, puede considerarse el hilo como una suerte de muelle con una constante recuperadora, que se relaciona con el módulo de Young del hilo. Se considera también un factor de amortiguamiento dependiente de la velocidad de movimiento vertical.

La posición del disco respecto del punto de sujeción se representa mediante la variable z .



Se va a obtener una *ecuación diferencial para el movimiento del disco*. Teniendo en cuenta las tensiones (55) y (61), puede plantearse la siguiente ecuación, teniendo en cuenta la segunda ley de Newton:

$$M_D z'' = -K_h(z-L) - Bz' - [G\alpha^2 \frac{R^2}{2L^2}]S + [T]S \quad (62)$$

donde T representa la tensión exterior dada en (61). La letra S representa la sección $S = \pi R_D^2$ del disco, donde R_D es el radio del disco. La masa del disco es M_D .

El tercer término de la ecuación representa el amortiguamiento a que se ve sometido el movimiento vertical. Depende de la velocidad z' .

El segundo término del segundo miembro de la ecuación representa una *fuerza recuperadora tipo Hooke*. Depende del valor de la constante de Hooke K_h . El valor de ésta está relacionado con el módulo de Young. Esa dependencia se puede calcular de la siguiente forma: sea L_o la longitud del hilo en reposo sea $\Delta L = L - L_o$, la variación de longitud al aplicar una fuerza F . La relación entre la tensión (fuerza por unidad de superficie) σ y el alargamiento relativo viene dada por:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L_o} \quad (63)$$

donde E es el módulo de Young. Dado que $F = \sigma \cdot S$, siendo S la superficie sobre la que actúa la tensión, se tiene:

$$F = E \frac{\Delta L}{L_o} S = \frac{ES}{L_o} \Delta L = K_h \Delta L \quad (64)$$

es decir K_h toma el valor:

$$K_h = \frac{ES}{L_o} \quad (65)$$

Su valor, para $E = 1.5 \cdot 10^{11}$ Pa, valor típico del módulo de Young en hilos amorfos, es $K_h = 17600$ N/m.

La ecuación (62) se resuelve numéricamente junto con la ecuación diferencial (45), correspondiente al ángulo de deflexión. Nótese que ambas ecuaciones están acopladas.

Teniendo en cuenta que dos ecuaciones diferenciales de segundo orden equivalen a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, el sistema se resuelve mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Las ecuaciones se resuelven para el caso de anisotropía nula en el hilo, considerando un módulo de cizalladura $G_0 = 6 \cdot 10^{10}$ Pa y una constante elástica vertical $K_s = 17600$ N/m. El factor de amortiguamiento para el movimiento de torsión se toma $A = 2 \text{ s}^{-1}$. El factor de amortiguamiento vertical se toma de forma tentativa como $B = 5 \text{ s}^{-1}$. Se considera este valor para conseguir que el movimiento vertical no sea demasiado grande. La intensidad de corriente es de 50 mA, sinusoidal, y de frecuencia 15 Hz. El campo axial tiene un valor de 120 A/m. Los parámetros numéricos son los siguientes: el intervalo temporal (4 segundos) se divide en 2500 partes y se toman las siguientes condiciones iniciales: i) movimiento horizontal: $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, ii) movimiento vertical: $z(0) = 12.2$ cm (longitud del péndulo), $z'(0) = 0$. Los resultados se muestran en la figura 27:

La figura 27a muestra el desplazamiento vertical, en centímetros, frente al desplazamiento horizontal, en grados, cuando el péndulo se deja evolucionar durante 0.25 segundos. La figura 27b muestra el comportamiento tras 0.52 segundos y la figura 27c lo representa al cabo de 4 segundos. Se aprecia en la evolución temporal, tras un movimiento errático, la tendencia a conformar una figura determinada: es como si el punto que representa el estado dinámico horizontal y vertical del péndulo, confluyese hacia un *atractor*.

Complejidad del comportamiento

Tanto los resultados experimentales como los teóricos muestran una complejidad considerable en el comportamiento de péndulo de torsión fabricado con hilos amorfos de magnetostricción alta y positiva. Esta complejidad proviene de dos fuentes:

i) El movimiento mecánico es *no lineal*. En ángulo de deflexión observado experimentalmente puede llegar a alcanzar, en condiciones de resonancia, ángulos casi rectos. Esto representa torsiones muy grandes que hacen perder la linealidad de la respuesta del péndulo ante el estímulo externo. La ecuación diferencial que describe la deflexión angular presenta en consecuencia un término no lineal. Considerada únicamente la no linealidad involucra una complejidad, ya que la respuesta del péndulo (el movimiento de deflexión), no será proporcional al estímulo (los campos magnéticos).

ii) La estructura interna del hilo influye en los resultados. Diferentes distribuciones de anisotropías producen distintos comportamientos. La distribución de anisotropías va a influir en el *momento excitador* que posibilita el movimiento del péndulo. Este momento excitador no va a "inyectar" una única frecuencia al péndulo sino que va a introducir un conjunto de ellas: El momento excitador *determina el movimiento mecánico y depende a su vez del estado magnético*. Esto permitiría comprender la similitud de los resultados experimentales mecánicos y magnéticos.

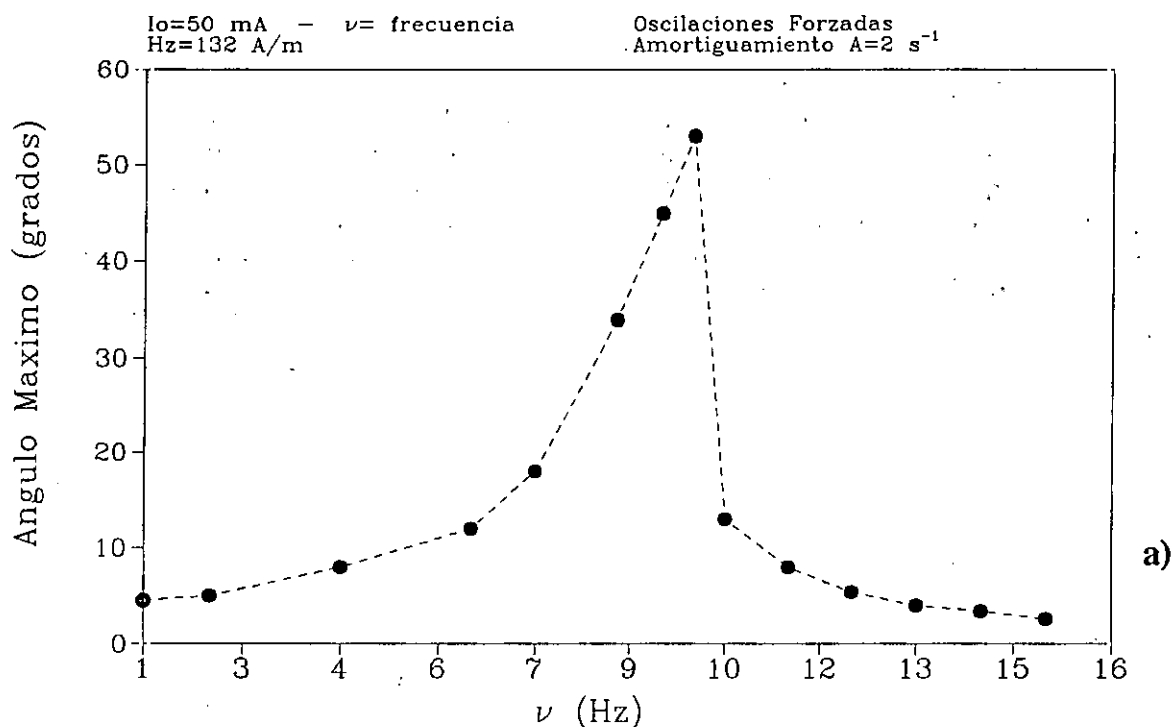
iii) La posibilidad de un comportamiento independiente de cada parte del hilo (núcleo y capa externa) aporta complicaciones adicionales.

La no linealidad es una condición necesaria, pero no suficiente, para que un sistema físico exhiba *caos*. Vamos a intentar estudiar este sistema desde el punto de vista de la Teoría del Caos.

Antes de abordar el análisis de los datos experimentales vamos a introducir los fundamentos de la teoría del caos. Tras hacer un repaso de los conceptos fundamentales y describir su creciente utilidad en multitud de campos de la ciencia, se procede a mostrar los métodos matemáticos precisos estudiar un sistema desde el punto de vista del caos. Algunos de esos instrumentos se utilizarán para analizar dos sistemas caóticos sobradamente conocidos, como son las ecuaciones de Lorentz y Rössler, y poder apreciar lo que se *puede esperar de un sistema caótico*. A continuación, esos mismos instrumentos matemáticos, se usan más detalladamente en los resultados obtenidos a partir de un sencillo modelo fenomenológico que intenta dar cuenta del movimiento de la imanación en presencia de anisotropías axiales y campos magnéticos.

Figura 26 -. a) Angulo máximo de deflexión en función de la frecuencia de la corriente excitadora, b) Angulo máximo de deflexión, para distintos factores de amortiguamiento, en función de la frecuencia de la corriente

Pendulo de Torsion



Pendulo de Torsion

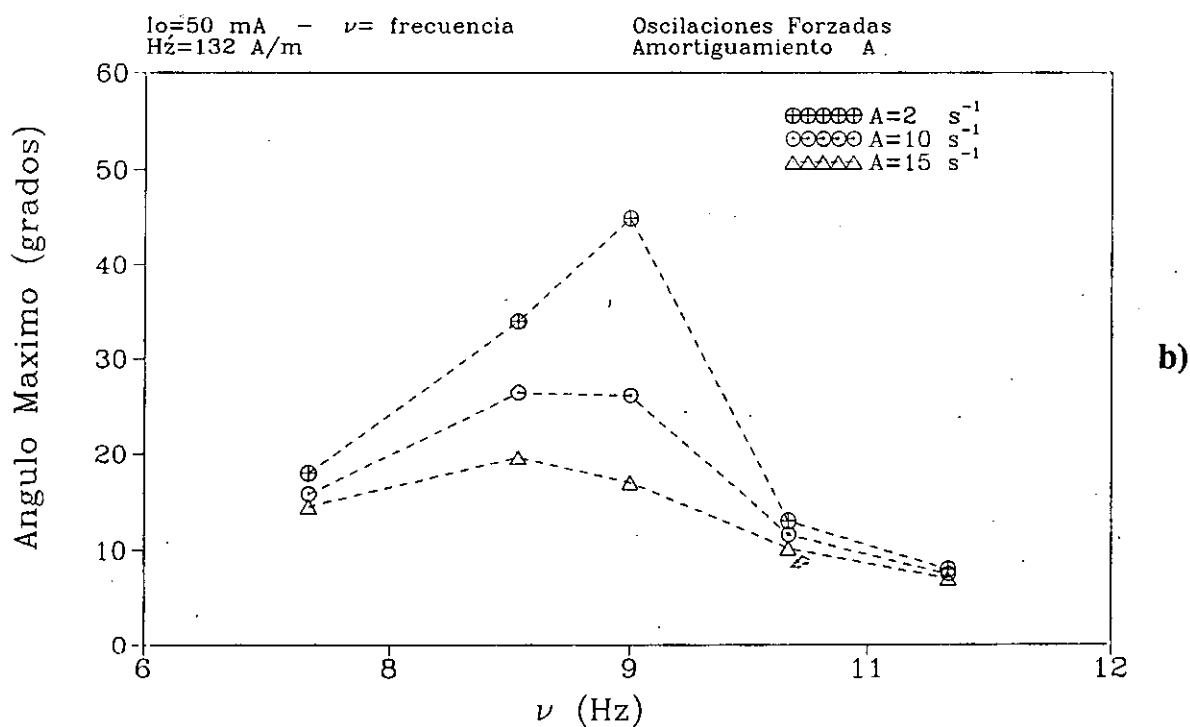
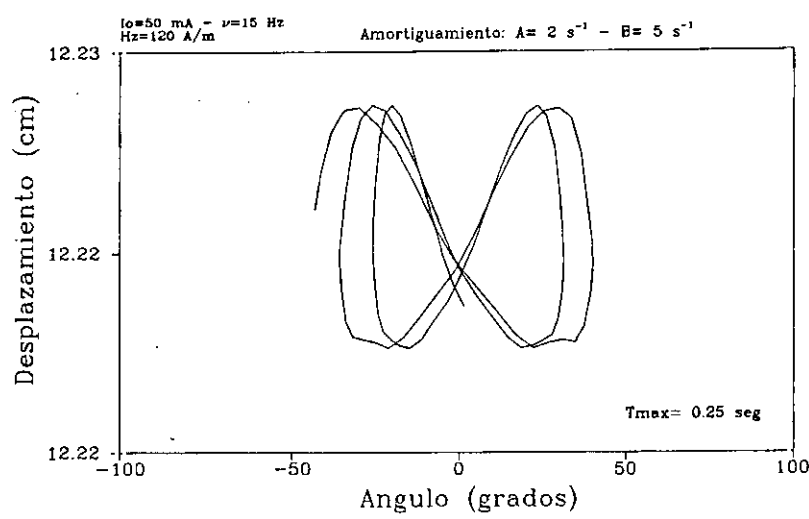


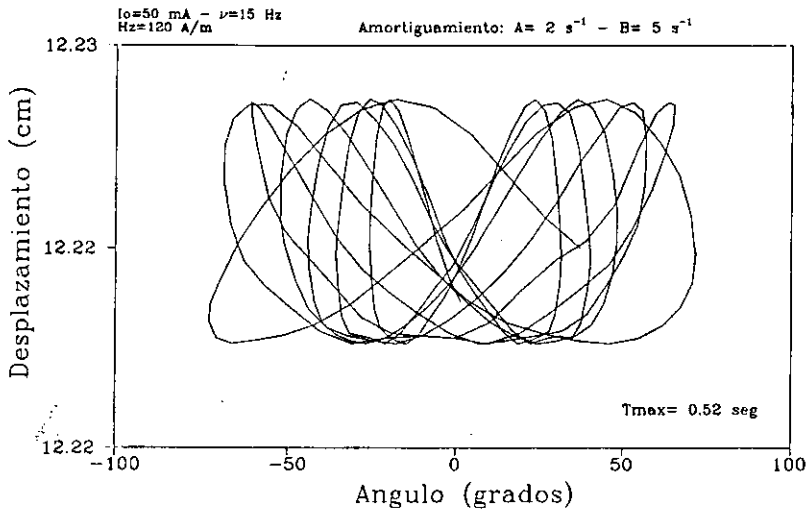
Figura 27 -. Composición de movimientos horizontal y vertical del péndulo para diferentes tiempos máximos de evolución temporal, T_{\max} : a) $T_{\max} = 0.25$ segundos, b) $T_{\max} = 0.52$ segundos, c) $T_{\max} = 4$ segundos

Pendolo de Torsion



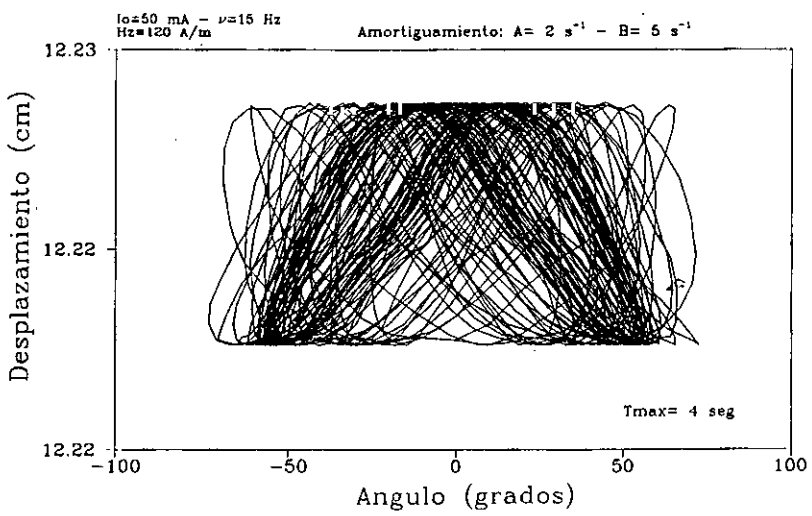
a)

Pendolo de Torsion



b)

Pendolo de Torsion



c)

ANÁLISIS DE LA COMPLEJIDAD

¿Cómo analizar la complejidad? ¿Cómo encontrar información en señales temporales complicadas? ¿Se puede colegir el estado del sistema o hay que desistir de toda posibilidad de predicción? Durante los últimos treinta años investigadores de diversas disciplinas se han visto en la necesidad de abordar una parte de la naturaleza hasta ahora descuidada: la porción irregular, su parte discontinua y variable (Gleick, 1988).

En la década de los años setenta un grupo de investigadores europeos y norteamericanos, sin contacto mutuo, comenzó a elaborar la vía hacia el entendimiento del desorden. Eran matemáticos, físicos y biólogos, unidos en la búsqueda de nexos entre las diferentes clases de irregularidades. Los fisiólogos hallaron pasmoso orden en el caos que sobreviene en el corazón humano, causa primera de inexplicables muertes repentinas. Los ecólogos estudiaron el aumento y decremento en las poblaciones de insectos. Los economistas desenterraron olvidados datos referentes al precio de valores cotizados en bolsa, analizándolos bajo un nuevo enfoque. La información reunida condujo al mundo natural: a las formas de las nubes, a la forma de las descargas eléctricas, al entretejido de los vasos sanguíneos y a la acumulación de estrellas en las galaxias.

Investigadores como Edward Lorentz, Mitchell Feigenbaum, Robert May, James Yorke, Stephen Smale, Benoit Mandelbrot, David Ruelle y un largo etcétera sentaron las bases de una nueva forma de entender los sistemas dinámicos: *la teoría del Caos*. Los defensores del caos aseguran que el siglo XX se recordará por tres cosas: la relatividad, la mecánica cuántica y el caos. Al igual que los dos primeros, el último ataca despiadadamente al edificio newtoniano: el caos elimina la idea laplaciana de la predecibilidad determinista.

¿Qué es el caos?

La palabra caos evoca en nuestra mente imágenes de confusión, aleatoriedad, desorden y destrucción. La paternidad del término "caos", para designar el comportamiento complejo de sistemas dinámicos, hay que atribuírsela a James Yorke, matemático del Institute for Physical Science and Technology, en Maryland. Redactó el artículo que inauguraba la nueva disciplina, el cual envió a la *American Mathematical Monthly* y que lleva por título "Period three implies chaos".

La palabra caos proviene de la mitología griega (Costello, 1978). Hesíodo escribía en el siglo VII antes de Cristo, inspirado por las Musas, su "Teogonía", obra de carácter épico y de intención didáctica en la que describía el origen y genealogía de los dioses. Según el poeta griego, en el principio fue el Caos, donde todo era indistinguible, nada estaba organizado, donde el uno es todo y el todo es uno. Después fue Gaia, la organización del Caos, la primera expresión de las potencialidades de éste, la primigenia arquitectura (Velázquez, 1994, (1)).

Cuando mencionamos la palabra caos, en sentido técnico, aludimos a la característica de ciertos sistemas dinámicos deterministas que exhiben comportamientos complejos, resultando imposible toda predicción detallada para tiempos grandes. En estos caos, se habla de comportamiento caótico, turbulento o estocástico (Rañada, 1986).

Constituye su característica más importante la extremada sensibilidad del sistema a pequeñas

variaciones en sus condiciones iniciales, que son imposibles de eliminar, bien como resultado de inevitables imprecisiones en las medidas, bien debidas a las necesarias aproximaciones en los métodos de cálculo. La llamada dependencia sensitiva de las condiciones iniciales (coloquialmente, efecto mariposa) es considerado como la huella característica del caos (Lorentz, 1995).

El caos no es aleatoriedad

Se sabía que la estocasticidad o aleatoriedad aparece en sistemas con un número grande de grados de libertad; éstas son cada una de las variables necesarias para la descripción de un sistema dinámico. Pero resulta notable que la aleatoriedad ocurra también en sistemas de aspecto muy simple con sólo dos o pocos grados de libertad, y en particular en aquellos denominados *deterministas*. El movimiento se describe mediante ecuaciones diferenciales, que son relaciones que permiten calcular las aceleraciones en función de las posiciones y las velocidades. Cada una de esas ecuaciones tiene infinitas soluciones que corresponden a los infinitos movimientos que podría seguir el objeto estudiado. Pero sólo hay una que corresponda al estado (dado por las posiciones y las velocidades) en el momento actual. Por ello, conocida la ley y una vez fijado el estado actual, queda fijada la solución, es decir, el movimiento para todos los valores del tiempo, es decir, el futuro y el pasado quedan determinados por el presente. Esta propiedad recibe el nombre de determinismo, la cual suele identificarse con predictividad, es decir, con la capacidad de predecir el futuro a partir de los datos actuales.

Para sistemas complejos, con muchos grados de libertad (por ejemplo, un litro de aire, con 10^{25} moléculas); la técnica determinista es inaplicable dada la imposibilidad de fijar las condiciones iniciales para todos los componentes del sistema. Para extraer información se recurre a técnicas estadísticas (uso de probabilidades y valores medios). La mecánica estadística considera todos los movimientos como desordenados, como pone de manifiesto la *hipótesis ergódica* propuesta por Boltzman en 1871: todos los movimientos de un sistema pasan arbitrariamente cerca de cualquiera de sus estados posibles si se espera suficiente tiempo. Dado que esto ocurriría para todas las condiciones iniciales, se perdería toda predictividad ya que cualquier estado puede ir a cualquier otro. No obstante, es posible calcular el promedio de una magnitud a lo largo del tiempo.

Los dos enfoques dinámicos, el determinista y el probabilista o estadístico, mantenían sus dominios de aplicación separados: el primero daba cuenta de los sistemas con pocos grados de libertad y el último de aquellos que cuentan con muchos. Siempre se tiende a asociar la impredecibilidad con un alto número de grados de libertad y se consideraba lo complejo como una mera acumulación de elementos simples. Esta división dual se ha roto con la aparición del caos: el determinismo de las ecuaciones de movimiento no garantiza la predictividad. Se ha podido demostrar que los sistemas dinámicos tienen, en general y simultáneamente, movimientos regulares y caóticos entrelazados, con datos iniciales aleatoriamente próximos. Esto ocurre en sistemas aislados con sólo dos grados de libertad, e incluso con uno sólo si está sometido a la acción de una fuerza exterior dependiente del tiempo (Rañada, 1986). Por tanto, hay que entender la complejidad como una categoría cualitativamente distinta de lo simple y que no se debe a la mera acumulación de elementos. El caos presenta un desafío al punto de vista reduccionista: un sistema no puede entenderse descomponiéndolo y estudiando cada parte por separado. El enfoque reduccionista, tradicionalmente usado en la ciencia, tiene éxito porque existen muchísimos sistemas en los que el comportamiento del todo es realmente la suma de los comportamientos de sus componentes. El caos demuestra, sin embargo, que un sistema puede tener un comportamiento complicado que emerge en virtud de interacciones no lineales entre cada uno de sus componentes (Crutchfield, 1987).

Descripción de un sistema dinámico

Un sistema dinámico consta de dos partes: i) *el estado* (la información esencial referente al sistema) y ii) la *dinámica* (regla que describe cómo evoluciona el estado en el tiempo). La evolución puede representarse en el *espacio de fases*, construcción abstracta cuyas coordenadas son las componentes del estado. Las coordenadas del espacio de fases varían según el contexto: en un sistema mecánico podrían ser las posiciones y velocidades y en un modelo ecológico, las poblaciones de las diferentes especies.

Un sistema sencillo lo constituye el péndulo simple. Todo lo que se necesita para determinar su movimiento son dos variables: posición y velocidad. El estado es un punto en un plano, cuyas coordenadas son las posición y velocidad. Las leyes de Newton dan una regla, expresada matemáticamente en una ecuación diferencial, que describe la solución de dicho estado. Conforme el péndulo oscila a un lado y otro, el estado se mueve a lo largo de un camino y órbita en el plano. En el caso ideal de un péndulo sin rozamiento, la órbita es un ciclo, una curva cerrada; si existe rozamiento, el punto describe una espiral que tiende a un punto a medida que se va frenando el péndulo.

La evolución temporal de un sistema dinámico puede desarrollarse de manera continua o discreta en el tiempo; en el primer caso se habla de un *flujo* y en el segundo de una *aplicación*. Para saber como evoluciona el sistema desde un estado inicial dado, se recurre a las ecuaciones de movimiento, que dan cuenta del desplazamiento del punto, por incrementos a lo largo de la órbita. Para determinar el comportamiento del sistema, se necesita un trabajo de cálculo que es proporcional al tiempo durante el que se desea seguir la órbita. En el caso de sistemas simples es posible encontrar una *solución explícita*, una *formula o algoritmo* que exprese cualquier estado futuro en función del inicial. Con tal solución, el trabajo de cálculo necesario para seguir el movimiento es más o menos independiente del tiempo deseado.

El comportamiento impredecible de sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse mediante una solución explícita. No obstante, el análisis del espacio de fases proporciona valiosa información para describir el comportamiento de los sistemas dinámicos. La utilidad de la imagen que se obtiene en el espacio de fases descansa en la posibilidad de *representar el comportamiento dinámico de manera geométrica*. Por ejemplo, un péndulo con rozamiento termina por detenerse, lo que significa que la órbita se aproxima a un punto en el espacio de fases. Este punto no se mueve, está fijo y tiene la capacidad de atraer las órbitas próximas a él; recibe el nombre de *atractor*. Si se da un pequeño empujón al péndulo, vuelve al mismo punto fijo *atractor*. Cualquier sistema que tiende al reposo con el paso del tiempo puede caracterizarse por un punto fijo en el espacio de fases. Se trata de un fenómeno general por el que las pérdidas energéticas, debidas a rozamiento o viscosidad, provocan que las órbitas sean atraídas hacia una región menor del espacio de fases. Se dice que esta región constituye un *atractor*.

Atractores

Hacia el atractor sería impelido el comportamiento del sistema. Existen varios tipos de atractores. Considérese un péndulo forzado: la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un muelle o un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez; en el espacio de fases, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una *órbita periódica*. Independientemente de cómo empieza a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a la largo del tiempo es siempre el mismo: estos atractores son conocidos como *ciclos límite*.

Un sistema puede tener varios atractores, de modo que diferentes condiciones iniciales pueden llevar a diferentes atractores. El conjunto de puntos que evoluciona hacia un atractor recibe el nombre de *cuenca de atracción*. Un reloj de péndulo tiene dos cuencas: los desplazamientos pequeños desde su posición de reposo le devuelven de nuevo al reposo; con desplazamientos grandes alcanza un régimen de movimiento estable.

Otro tipo de atractor es el *toro*, figura semejante a la superficie de una rosquilla. El toro corresponde a movimientos que constan de dos oscilaciones independientes, llamadas *movimientos cuasiperiódicos*. La órbita se enrolla rodeando el toro en el espacio de fases, de modo que una frecuencia queda determinada por la rapidez con que la órbita rodea al toro por el camino más corto y la otra por la rapidez con que lo hace alrededor del camino más largo. Los atractores pueden ser también toros de más dimensiones, lo que implica la combinación de más de dos oscilaciones. Una característica destacable de los movimientos cuasiperiódicos es la predecebilidad, a pesar de la complejidad: las órbitas que empiezan cerca una de otra en el toro permanecen siempre cercanas.

Hasta 1963, los únicos atractores conocidos eran tres: *los puntos fijos, los ciclos límite y los toros*. En el año mencionado, el meteorólogo Edward N. Lorentz, del Instituto de Tecnología de Massachusetts, descubrió un sistema de pocos grados de libertad que presentaba un comportamiento complejo (Gleick, 1988). Intentando comprender la evolución del tiempo atmosférico, simplificó las ecuaciones de un fluido en movimiento, reduciéndolas a tres ecuaciones diferenciales de primer orden: el sistema sólo tenía tres grados de libertad. A pesar de ello, se comportaba de forma aparentemente estocástica y el atractor obtenido no encajaba en la clasificación anteriormente mencionada. El llamado atractor de Lorentz, fue el primer ejemplo de *atractor caótico o extraño*.

Atractores extraños

Usando un sencillo ordenador digital Royal McBee, Lorentz comprobó el mecanismo básico responsable del azar obtenido mediante sus ecuaciones: las perturbaciones microscópicas se amplifican hasta afectar al comportamiento macroscópico. Dos órbitas, con condiciones iniciales próximas *divergen rápidamente de forma exponencial* y por ello permanecen cercanas sólo durante un corto período de tiempo. La situación difiere cualitativamente en los atractores no caóticos. En ellos, las órbitas vecinas siguen estando cerca; los pequeños errores se encuentran acotados y el comportamiento sigue siendo predecible. El entendimiento del comportamiento caótico reside en estiramientos y plegamientos que se producen en el espacio de fases (Bergé, 1992). La divergencia exponencial constituye una propiedad local; si los atractores tienen un *tamaño finito*, dos órbitas en uno de ellos no pueden diverger exponencialmente de manera indefinida. Por consiguiente, el atractor debe *plegarse sobre sí mismo*. A pesar de que las órbitas diverjan y sigan caminos cada vez más alejados, en algún momento habrán de acercarse de nuevo entre sí: Al hacerlo, *las órbitas se mezclan en un atractor extraño*. El azar en las órbitas caóticas es consecuencia del proceso de mezcla. Los estiramientos y plegamientos se producen indefinidamente creando pliegues dentro de pliegues: *el atractor caótico es un fractal*, objeto que revela nuevos detalles a medida que se va amplificando.

El proceso de plegado y estiramiento puede entenderse generando la llamada "*herradura*" de Smale (Bergé, 1992), que posee todas las características de los atractores extraños. Sitúese un cuadrado en el plano (x,y) . Estírese en la dirección x y comprímase en la dirección y : se tiene un rectángulo. Pléguese el rectángulo hasta formar una U, una herradura. Con esta U repítase el proceso. Tras algunas iteraciones, se dispone de un ente topológico que dispone de las propiedades observadas en los atractores extraños: tamaño finito y sensibilidad a las condiciones iniciales; dos

puntos inicialmente próximos en el cuadrado quedan muy alejados entre sí al final del proceso.

Las operaciones de estirado y plegado en un atractor caótico eliminan sistemáticamente la información inicial y la sustituyen por otras nuevas: los estirones amplían las incertidumbres en las escalas pequeñas, los pliegues acercan las trayectorias que estaban muy separadas y destruyen información de gran escala. Los atractores extraños actúan como multiplicadores que elevan las fluctuaciones microscópicas a una escala macroscópica. Esto explica por qué no existen soluciones exactas: tras un breve período, la incertidumbre incluida en la medición inicial cubre el atractor por entero y se pierde toda capacidad predictiva: no hay conexión causal entre pasado y futuro.

¿Qué sistemas exhiben caos?

El comportamiento caótico aparece en *sistemas no lineales*, esto es, en los que no responden a los estímulos en proporción directa (Lorentz, 1995). El caos puede aparecer en sistemas con y sin disipación de energía (Crutchfield, 1987). En estos últimos, las órbitas no se relajan hacia un atractor, sino que están confinadas en una superficie de energía.

¿Es ubicuo el caos?

Dado que la linealidad supone una simplificación del mundo real para hacer éste inteligible, la dinámica caótica, no lineal, aparece prácticamente en todos los campos de la ciencia, además de en la Física.

Aparece en la *química*, dando cuenta de reacciones químicas oscilantes (Epstein, 1983). En 1921, William C. Bray, de la Universidad de California en Berkeley, encontró una conducta extraña en reacciones químicas que involucrasen el ión oxidado IO_3^- ; al catalizar la descomposición del peróxido de hidrógeno en agua y oxígeno, observó que bajo ciertas condiciones, la velocidad de producción de oxígeno y la concentración de iodo en la disolución cambiaba periódicamente. En 1958, el químico ruso B.P. Belousov observó que si disolvía, en agua, ácido nítrico y ácido sulfúrico con bromato potásico y una sal de cerio, el color de la mezcla cambiaba periódicamente de incoloro a amarillo pálido. Posteriormente, el también químico ruso A.M. Zhabotinsky sistematizó el estudio de la reacción, cuya termodinámica se entiende en el contexto de los procesos irreversibles de Ilya Prigogine. Se precisan tres condiciones para obtener un oscilador químico: i) los sistemas químicos han de estar lejos del equilibrio; ii) ha de existir retroalimentación (es decir, si la *reacción tiene lugar en varios pasos, el producto resultante de una de esas subreacciones, influye en la velocidad de formación de ese mismo producto en otra subreacción*); iii) el sistema químico debe presentar biestabilidad (existencia de dos estados químicos estables). Los osciladores químicos se han reunido en tres familias principales: osciladores de bromato, clorito e iodato, donde se involucran iones de Br, Cl e I, respectivamente. Bajo ciertas condiciones experimentales, la oscilación química es caótica: el experimentador es incapaz de predecir el color que tomará de disolución. La oxidación del ácido malónico por efecto del bromato potásico en presencia de iones de cerio muestra una evolución temporal por oscilaciones (que se reflejan en el cambio de color) hacia una estructura disipativa consistente en capas alternadas de iones Ce^{2+} e iones Ce^{3+} (Prigogine, 1993), cada una de ellas con un color diferente.

El caos aparece también en *biología* (May, 1991), al dar cuenta de la evolución de especies distintas coexistiendo en un mismo ecosistema; los biólogos encontraron comportamientos oscilantes

extraños en la cantidad de individuos de una especie con el transcurrir del tiempo. Se modelizan los sistemas biológicos con ecuaciones en diferencias de *tipo logístico* $x_{i+1} = rx_i(1-x_i)$, donde r simboliza una razón de crecimiento (Gleik, 1988); la ecuación se resuelve por un proceso de *retroalimentación*: el resultado x_{i+1} vuelve a introducirse en la ecuación para obtener un nuevo resultado. La variable x_i simboliza la población relativa de una especie en la generación i . Se ha encontrado comportamiento caótico para valores de r mayores que 3,57.

Se ha comprobado que, aumentando la temperatura del medio ambiente, se pueden acelerar los procesos metabólicos de ciertos organismos de pequeño tamaño (rotíferos, dafnias, moscas de la carne, etc) de tal modo que se incrementa la tendencia de la población a oscilar, es decir, a "explosionar" a débiles densidades y a "implosionar" a densidades elevadas. El tipo de oscilación puede ser caótico, ajustándose a lo predicho por la ecuación logística.

También se encuentra el caos en *astronomía* (Laskar, 1991). Por ejemplo, se ha encontrado que un gran número de cuerpos del sistema solar (cometas, asteroides e incluso planetas) siguen órbitas caóticas. Esto permite tener un nuevo punto de vista para explicar la distribución que se observa de asteroides y cometas.

Aparece también en *medicina*: el funcionamiento normal del corazón humano puede implicar un ritmo caótico, siendo el comportamiento periódico presagio de enfermedad (Goldberger, 1990). Se han analizado las representaciones en el espacio de fases del atractor reconstruido a partir de las señales temporales obtenidas en los electrocardiogramas; se han encontrado atractores que pueden catalogarse de extraños, indicativo de que la dinámica del ritmo cardíaco normal podría ser caótica. El mecanismo responsable del caos en la variabilidad de unos latidos a otros en el corazón sano reside, probablemente, en el sistema nervioso. El nodo senoideo (el marcapasos natural del corazón) recibe señales de la porción involuntaria (autónoma) del sistema nervioso. Éste consta de dos grandes ramas: el sistema simpático y el parasimpático. La estimulación parasimpática hace disminuir el ritmo de excitación de las células del nodo senoideo, mientras que la estimulación simpática produce el efecto contrario. La influencia de estas dos ramas tiene por efecto un incesante tira y afloja sobre el marcapasos.

Otro campo donde es aplicable la dinámica caótica lo constituye la *meteorología* (Nicolis, 1991). La descripción de un fluido sometido a variaciones de temperatura y densidad es muy compleja, sobre todo si se consideran las *turbulencias*. El primer intento de explicación del fenómeno de la generación de turbulencias lo realizó el físico ruso Lev. D. Landau, que proporcionó una explicación del movimiento estocástico de fluidos, la cual consiste en suponer que tal movimiento incluye muchas oscilaciones diferentes e independientes. A medida que el fluido se mueve más rápido, adquiriendo mayor turbulencia, las oscilaciones entran en movimiento de una en una. Aunque cada oscilación por separado puede ser simple, la complicación del movimiento combinado hace que el flujo resulte imposible de predecir. Se ha demostrado que la teoría de Landau no es correcta, pudiendo presentarse la aleatoriedad, la turbulencia, sin necesidad de complicación. Esta impredecibilidad choca con la pretensión de los meteorólogos de diagnosticar día a día la evolución del tiempo atmosférico. Pretenden determinar si la dinámica atmosférica responde a un atractor extraño (Lorentz, 1995).

La *economía* también se ve afectada por el caos. Los economistas daban por sentado que la economía tiene un estado de equilibrio y que terminaría por llegar a él, sin molestos ciclos

económicos, siempre que no se interviniese. Los economistas "caóticos" proponen que, como sistema dinámico, la economía es caótica y que los ciclos económicos, a intervalos irregulares son inevitables. La interferencia humana podría incluso suprimir los ciclos, en lugar de producirlos, pero lo más probable es que abreviara algunas recesiones y prolongase otras.

Recientemente, se han introducido ideas derivadas de la dinámica no lineal en la *arqueología* (Alcalde, 1995), para explicar la difusión de la cultura neolítica a lo largo del Mediterráneo, desde Oriente hasta Occidente. Para entender en profundidad la implicación del Caos en esta disciplina conviene explicar otra propiedad de los los atractores caóticos: la *fractalidad*.

Fractales

Los atractores caóticos, a fin de mantener un tamaño finito y permitir la divergencia exponencial de las trayectorias, ha de plegarse sobre sí mismo indefinidamente. Son objetos *fractales*.

¿Qué es un fractal? Matemáticamente, un fractal viene a ser el producto final que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico elemental, determina la estructura final que, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparentemente extraordinaria. En la posibilidad de *construcción y dominio de estructuras muy complejas a través de procesos simples*, radica la potencia de las estructuras fractales para *modelizar* y explorar fenómenos naturales, cuya complejidad proviene asimismo de la repetición de procesos elementales muy simples (Guzmán, 1993).

El concepto de fractal fue ideado por Benoit Mandelbrot (Gleick, 1988) para designar a aquellas figuras geométricas que poseen *dimensión fraccionaria*, es decir comprendida entre la del plano y la recta, o entre la del plano y la esfera, por ejemplo. Un fractal es un objeto de configuración tenue y esparcida. Si se amplía, irá mostrando una serie repetitiva de niveles de detalle, de modo que en todas las escalas que se examine, la estructura que ofrece es similar. Un objeto fractal presentaría el mismo aspecto a la escala de metros, milímetros o micras. Mandelbrot apuntó que muchos objetos naturales presentan esta propiedad. Se han identificado fractales en las sendas filamentosas por las que un líquido se introduce a través de una matriz maciza, como el agua al ser embebida en el suelo. El sistema de venas y arterias presenta estructura fractal, así como la red neuronal. El hollín, los coloides y algunos polímeros parecen fractales. También aparecen fractales en el movimiento de las partículas de aire a través del aceite, en el crecimiento de ciertos cristales y en el comportamiento de descargas eléctricas similares a relámpagos. Es casi seguro que las arbitrarias configuraciones que dibujan las nubes en el cielo y los sinuosos perfiles del litoral sean fractales igualmente (Sander, 1987).

Los objetos fractales son *simétricos respecto a dilataciones y contracciones* (homotecias), es decir, frente a cambios de escala. Resulta útil disponer de una medida del progresivo escalonamiento de un fractal. Tal medida queda expresada por un número llamado *dimensión fractal*, la dimensión fraccionaria, que es un número fraccionario. Si un objeto geométrico tiene una dimensión fractal de 1,7 quiere decirse que su dimensión es intermedia entre la de la recta y el plano. Cuanto más cerca está un objeto fractal de llenar el plano en que está contenido, tanto más se aproxima la dimensión a 2. La dimensión fractal de un objeto material es una propiedad independiente de muchos de los detalles que hayan intervenido en su formación. Está relacionada con el comportamiento a grandes escalas; en éstas, los detalles particulares se difuminan y desaparecen, como resultado de sucesivas operaciones de promediación.

Existen muchos tipos de fractales, pero quizás el más famoso de todos sea el fractal no lineal conocido como *conjunto de Mandelbrot*. Veamos cómo se genera: tómese un número complejo z y considérese la aplicación según la cual z es reemplazado por $z^2 + c$, donde c es otro número complejo fijo. Si tomamos como punto de partida $z=0$, éste se reemplaza por c . ¿Qué ocurre con el propio c ? Éste debe ser reemplazado por $c^2 + c$. Iterando el proceso, se obtiene la sucesión $0, c, c^2 + c, c^4 + 2c^3 + c^2 + c, \dots$. Ocurre que, para ciertos valores de c , la sucesión permanece *acotada* (todos los elementos de la sucesión quedan en el interior de algún círculo fijo centrado en el origen del plano complejo). Para otros valores de c , la sucesión no está acotada. El conjunto de Mandelbrot está constituido por aquellos puntos c que hacen que la sucesión esté acotada (Penrose, 1991). La complejidad del conjunto es sorprendente, sobre todo si se tiene en cuenta la simplicidad de su generación. La *figura 1* muestra el conjunto. El programa de cálculo utilizado muestrea valores de puntos en el plano complejo y estudia si la sucesión está acotada. Si se ampliase el borde del conjunto, *aparecerían objetos similares al de partida*.

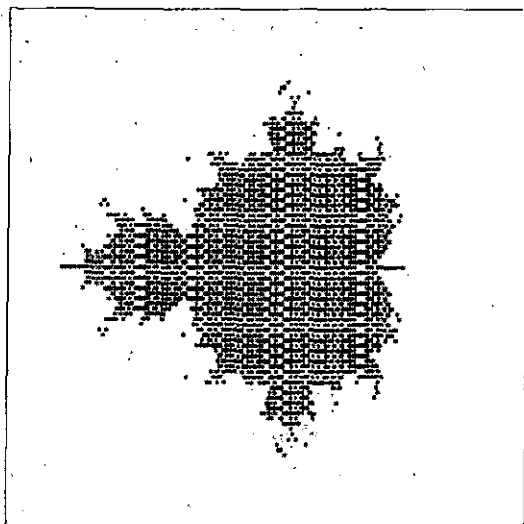


Figura 1 - Conjunto de Mandelbrot

¿Cómo calcular la dimensión fractal? Tómese el conjunto de partida, por ejemplo, una figura plana, y recúbrase mediante un retículo de cuadrados. Cuéntense los cuadraditos que contienen algún trozo del conjunto, despreciando los vacíos. El número N de cuadraditos no vacíos depende, naturalmente, de cual sea el conjunto dado y también del valor del lado ϵ de la malla del retículo. Se establece una relación en forma de función potencial entre el valor ϵ y el número N de cuadraditos recubridores; esta relación es del tipo $N = c \cdot \epsilon^{-D}$, siendo c una constante y D la dimensión fractal. Si se repite el proceso con retículos de distinto tamaño y se representan los resultados en una gráfica doblemente logarítmica, resulta que los puntos se disponen aproximadamente sobre una recta (si el objeto es fractal). La pendiente de la recta ofrece el valor de D (Jürgens, 1990). Esta técnica se conoce como *box-counting dimension*, dimensión de recuento por cajas (Guzmán, 1993).

Las estructuras fractales pueden ser consideradas como vestigios producidos por los sistemas dinámicos no lineales. Cada vez que un proceso caótico ha dado forma a un ambiente u objeto (sea la costa, la atmósfera o una falla geológica) es verosímil que haya dejado pos de sí estructuras fractales (Golberger, 1990).

Caos y fractales en la arqueología

El problema de la *expansión del Neolítico a lo largo del Mediterráneo* ha sido abordado por Alcalde, Alonso y Velázquez (Alcalde, 1995) desde la perspectiva fractal.

Se plantea el problema siguiente: arqueológicamente, se sabe que la información proveniente de la cultura neolítica, originaria del Mediterráneo Oriental, se propaga hacia el Mediterráneo Occidental; se difunden los nuevos usos y costumbres, la forma de cuidar y mantener especies domésticas. Se propaga *información*. El modelo que explicaba el proceso es el llamado de "ola de avance" (Ammerman, 1984), que implicaba movimientos de población: grupos humanos se trasladaban desde Oriente, portando, imponiendo, su nuevo modo de vida, al substrato epipaleolítico, pobladores más primitivos. El modelo de ola de avance se apoya en un símil físico: *el desplazamiento de un frente de onda a través de un medio*. Evidencias arqueológicas recientes, ponen de manifiesto la debilidad del modelo: i) el nuevo modo de vida neolítico aparece casi simultáneamente en todo el Mediterráneo, lo cual entra en contradicción con el modelo de ola de avance, que implicaría que Oriente de "neolitizaría" mucho antes que Occidente, dado que los grupos humanos necesitan un tiempo mínimo para desplazarse, y ii) en el Levante español, se encuentran poblados epipaleolíticos, que habían adoptado algunas costumbres neolíticas, como el cuidado de especies domésticas, pero no otras, como es la construcción de viviendas. Desde el punto de vista arqueológico, estos resultados se explican si *no se consideran movimientos de población, sólo de información*. ¿Cómo conciliar estos hechos con el modelo de ola de avance?

El problema puede abordarse desde otro punto de vista, de forma que no implique movimientos de población: se considera un "efecto dominó" en la transmisión de información. El modelo matemático considerado descansa en los conceptos de *percolación* y *criticalidad autoorganizada*. Supongase que se disponen de pie un conjunto de fichas de dominó. Cada ficha puede hacerse corresponder con un asentamiento prehistórico: si la ficha está de pie, el poblado es epipaleolítico (primitivo), si está tumabada es neolítico (moderno). El conjunto de piezas se dispone en una mesa rectangular. El lado derecho corresponde al Mediterráneo Oriental y el izquierdo al Occidental. Si empujamos una ficha en el lado oriental, ¿qué condiciones deben cumplirse para que caigan todas las fichas hasta el lado occidental? (nótese que en este modelo la información, ficha caída, se transmite sin traslación de los componentes que transmiten esa información, únicamente con un cambio en su estado). Es evidente, que debe haber un número de fichas y disposición geométrica adecuadas de las mismas: si las fichas están muy separadas unas de otras, la caída de alguna de ellas no alterará a las demás. Cuando se dan las condiciones, todas las fichas pueden caer, el efecto dominó es completo; se dice que *el sistema ha percolado*. La percolación (Grassberger, 1991) estudia *fenómenos umbral*, que funcionan bajo las leyes de todo o nada. O se transmite información o no se transmite. Existen unas determinadas condiciones, el *umbral de percolación*, bajo las cuales toda la información se transmite.

La percolación se encuadra en el marco de la *criticalidad autoorganizada* (Bak, 1991), teoría que asegura que los sistemas se autoorganizan hasta llegar a un estado crítico. Los grandes sistemas se organizan perpetuamente a sí mismos, hasta llegar a ese estado crítico, en el que un acontecimiento cualquiera, da lugar a una *reacción en cadena*, capaz de producir un *cambio en todo el sistema* (se dice que el sistema ha percolado). La criticalidad autoorganizada es la base matemática en la que se apoya el "efecto dominó".

Las estructuras fractales vendrían a ser *instantáneas de procesos críticos autoorganizados*; los fractales constituirían las "huellas" espaciales y temporales de la criticalidad autoorganizada.

Haciendo uso de la teoría anterior, el proceso de difusión de los usos neolíticos se ha considerado como un proceso de este tipo: la información se transmite entre asentamientos vecinos. Ampliando la escala espacial, se tiene el mismo tipo de transmisión: *grupos de asentamientos, transmiten información a grupos de asentamientos*. El proceso se repite a escalas espaciales más amplias, hasta cubrir el conjunto total de asentamientos, el Mediterráneo entero. El *modo de transmisión de información es caótico*: la información se transmite entre asentamientos vecinos sin orden aparente, pero subyace una *estructura fractal*.

Se ha aplicado este procedimiento al conjunto de asentamientos reales a lo largo del Mediterráneo; la figura 2 muestra esta distribución; el mediterráneo oriental corresponde a la derecha de la figura; y el occidental a la izquierda. Se ha calculado la dimensión fractal aplicando la técnica del *box-counting* descrita anteriormente. Se obtiene un buen ajuste lineal; la dimensión fractal resulta ser de 0.189. La figura 3 ofrece el resultado, que parece corroborar que la difusión del Neolítico en el Mediterráneo puede entenderse como un proceso percolativo y la distribución resultante de asentamientos puede entenderse haciendo uso de la geometría fractal. Estos resultados han sido presentados en el *I Congreso de Neolítico en la Península Ibérica, celebrado en Gavá (Barcelona), en Marzo de 1995*. (Alcalde, 1995).

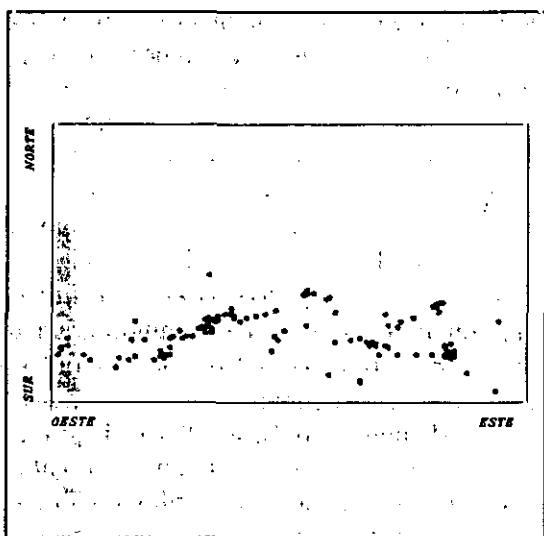


Figura 2 - Distribución de asentamientos neolíticos en el Mediterráneo.

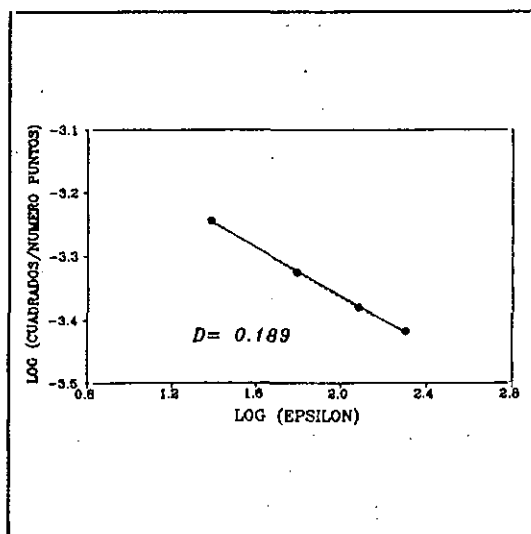


Figura 3 - Cálculo de la dimensión fractal por el método *box-counting*.

Caos en el ámbito cuántico

¿Existe caos en mecánica cuántica? La pregunta parece difícil de contestar a la luz de las últimas investigaciones.

La mecánica cuántica es otra de las ramas de la física en que el concepto de *incertidumbre* es fundamental (Galindo, 1978). Las primeras investigaciones parecen apuntar a que la mecánica cuántica parece "menos caótica" que la mecánica clásica; en la evolución de una partícula "cuántica" no hay nada parecido a la deriva de la partícula clásica hacia trayectorias imprevisibles. Ambas mecánicas parecen irreconciliables. Aparentemente, si un sistema clásico es caótico, su correspondiente sistema cuántico no lo es (Casati, 1991).

Otras investigaciones, por el contrario, parecen afirmar lo contrario: el caos aparecería en el

mundo cuántico (Gutzwiller, 1992). Lo caótico aparecería de forma clara en las representaciones energéticas de los niveles energéticos de los llamados átomos de Rydberg; este tipo de átomos excitados constituyen un puente entre la mecánica cuántica y la clásica: los niveles permitidos de alta energía están tan juntos que casi forman un continuo, por lo que se pueden aplicar, hasta cierto punto, las reglas de la mecánica clásica.

Caos en la física

Sería prolijo hacer un repaso de todos aquellos campos de la física en los que se ha observado un comportamiento caótico. Hasta hace poco, el estudio del caos en la física se basaba en el *estudio de modelos* a los que se dotaba de las características adecuadas para exhibir caos. Después, se *intentaba diseñar el sistema físico real* que se adecuara a ese comportamiento. Por ejemplo, se encuentra caos en el sistema siguiente: una partícula de masa unidad se mueve en el plano x-y, bajo la aplicación de una fuerza externa, la fricción a que se ve sometida y la fuerza derivada de un potencial $V(x,y)$ dado (Sommerer, 1993). Para cierta forma del potencial, el movimiento de la partícula es caótico. Un modelo como este puede aplicarse a la conducción de partículas cargadas.

La investigación numérica de base continua, encontrándose comportamientos cada vez más complejos. Por ejemplo, en un artículo aparecido en *Physical Review Letters* (Ott, 1993), se propone la existencia de *atractores dentro de atractores*.

No obstante, los investigadores tienden su atención *hacia sistemas físicos reales* que exhiban caos. La manera de encontrarlos no es sencilla. Suelen venir de la mano de *inestabilidades* (Moon, 1993).

Existen muchas cuestiones aún no resueltas. Algunos investigadores (Bergé, 1992) afirman que el caos aparecerá en sistemas con tres grados de libertad como mínimo, esto es, cuando el sistema quede descrito por, al menos, tres ecuaciones diferenciales de primer orden. La cuestión no está clara y la discusión abierta. Lanchares y colaboradores (Lanchares, 1994) afirman que los *sistemas dinámicos no conservativos de un grado de libertad* pueden considerarse como sistemas de $3/2$ grados de libertad, asumiendo que el tiempo t es portador de medio grado de libertad, de modo que al tratarse de sistemas de más de un grado de libertad, puede presentarse el comportamiento caótico.

Se afirma usualmente que el caos aparece en *sistemas disipativos*. Esta cuestión tampoco está totalmente clarificada. El teorema KAM, debido a Kolmogorov, Arnold y Moser, afirma que bajo ciertas condiciones, el movimiento de n cuerpos que se muevan de acuerdo con las leyes de Newton, *pueden exhibir órbitas estables en ausencia de leyes de conservación*. Este teorema es aplicable a todo sistema no disipativo (Hubbard, 1995). Parece que la aparición del caos, en sistemas hamiltonianos, está limitada por el teorema KAM, dado que, según éste, aparecerían órbitas estables, periódicas. Sin embargo, se sabe que en sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad, como por ejemplo dos osciladores no lineales acoplados, aparecen soluciones caóticas (Green, 1979).

En el campo del *magnetismo*, también se presenta el caos. Se han encontrado *bifurcaciones subcríticas* con duplicación de período en la deformación magnetostrictiva de una cinta amorfa $\text{Fe}_{78}\text{B}_{13}\text{S}_9$ (Metglas 2605-S2), inducida mediante la aplicación de un campo magnético paralelo al eje de la cinta. La deformación se mide gracias al concurso de una fibra óptica Mach-Zehnder (Vohra, 1993).

Se ha encontrado caos también en experimentos de resonancia magnetoelástica en cintas amorfas ricas en hierro (Barandiarán, 1994).

Un experimento típico en magnetismo fue propuesto por Savage y Adler (Savage, 1986). Una cinta amorfa (Metglas 2605C) es situada verticalmente en el interior de unos carretes Helmholtz, de forma que el campo magnético aplicado es paralelo al eje de la cinta, la cual se mantiene fija por su extremo inferior, quedando libre el superior. La cinta se mantendrá perfectamente vertical si su longitud es menor que una dada. Si es mayor que ésta, la cinta se combará y no se mantendrá vertical. La aplicación del campo magnético variará el módulo de Young de la cinta, por lo que cambian sus propiedades elásticas y comienza a combarse: el movimiento de la cinta está inducido por el campo magnético. Colocando un fotosensor que siga el movimiento de la cinta, puede apreciarse que éste es caótico (Ditto, 1989) para frecuencias dadas del campo excitador.

¿Para qué sirve el caos?

A causa de su aparente falta de predicibilidad, el caos parece únicamente un modo nuevo de enfocar el estudio de la Naturaleza pero sin posibilidades de aplicaciones técnicas. Nada más lejos de la realidad. El caos se ha aplicado ya para aumentar la potencia de láseres, para sincronizar la salida de dispositivos electrónicos, para controlar las oscilaciones de reacciones químicas, para estabilizar el errático latir del corazón en animales enfermos y para codificar mensajes electrónicos (Ditto, 1993).

El caos presenta una serie de ventajas para ser usado. Se puede aprovechar el hecho de que la conducta de un sistema caótico resulta de la agregación de muchas conductas ordenadas, ninguna de las cuales prevalece en circunstancias ordinarias. Se ha demostrado que estimulando un sistema caótico adecuadamente, éste puede seguir uno de los muchos comportamientos regulares de que consta. Se puede disponer de flexibilidad suficiente para conmutar rápidamente entre varios comportamientos distintos. Es útil también dado su carácter determinista, aunque impredecible: si dos sistemas caóticos casi idénticos son excitados con una misma señal de entrada, la de salida será idéntica, aunque no se pueda asegurar previamente cómo será.

Se puede lograr que dos sistemas caóticos desfasados *operen en fase si son excitados mediante señales caóticas*. Esta técnica se ha aplicado en el dominio de la biología: se indujeron contracciones rápidas en el músculo cardíaco del corazón de un conejo mediante la inyección de una droga llamada "ouabain" en las arterias coronarias. En cuanto se inició la arritmia, se estimuló el corazón con señales caóticas generadas mediante un circuito eléctrico. Las señales, aparentemente aleatorias, bastaron para restablecer el ritmo regular de los latidos. Se comprobó que ni las señales aleatorias ni las periódicas conseguían detener la arritmia, agravándola en ocasiones (Ditto, 1993).

Caos determinista y complejidad

El caos determinista tiende un puente entre el determinismo y la aleatoriedad. Una descripción macroscópica de un sistema físico en términos de ecuaciones diferenciales, que parece encarnar el determinismo causal ya que relaciona la variación de un sistema en un momento dado con el estado del sistema en ese momento, genera un comportamiento observable de tipo aleatorio. Esta extraña simbiosis entre causalidad y aleatoriedad se encuadra en un marco más amplio que analiza la *complejidad* del comportamiento de sistemas físicos, biológicos y sociales en función de la estabilidad de las soluciones que exhiben esos sistemas (Nicolis, 1994).

En la evolución de un sistema resulta básica la noción de atractor. Los ejemplos son variados: el péndulo que se va inmovilizando progresivamente alcanza su estado atractor; un líquido caliente

cuya temperatura se iguala paulatinamente con la de su entorno adquiere su estado atractor. Allí donde hay estabilidad y reproducibilidad se han identificado los atractores y las evoluciones que conducen a ellos. La estabilidad supone un olvido de las *perturbaciones*, y ello da consistencia a la idea de *reproducibilidad*: las fluctuaciones son despreciables con respecto a la solución estable. Un cambio en el sistema, inducido por un agente externo, puede ampliar las fluctuaciones de la solución estable, hasta conseguir que sea *inestable*, de forma que el sistema cambia hasta acoplarse a otra solución distinta que sea estable: se dice que ha tenido lugar una bifurcación. La existencia de varias soluciones proviene de la *no linealidad* que debe exhibir el sistema en su respuesta ante un estímulo externo.

La termodinámica no lineal se ha ocupado ampliamente de estas situaciones. Analiza las situaciones de no equilibrio permanente determinadas por flujos de materia o energía que mantienen los procesos disipativos en el interior del sistema y le impiden alcanzar su estado atractor, su estado de equilibrio (Prigogine, 1994). Cerca del equilibrio, el estado estacionario correspondiente a la producción de mínima entropía permite definir un estado atractor, análogo al estado de equilibrio. Lejos de éste, pueden aparecer otros tipos de atractores correspondientes a comportamientos temporales periódicos adoptados de forma espontánea por el sistema. Más allá de cierto punto crítico que marca la *inestabilidad de los estados estacionarios*, aparecen las *estructuras disipativas* (Prigogine, 1993), fluctuaciones del sistema que invaden la totalidad de éste y propician la creación de estructuras espacio- temporales en su interior. Las estructuras disipativas surgen como una totalidad, con dimensiones impuestas por sus propios mecanismos, como son el intercambio de energía y/o materia con el entorno que la rodea. Las dimensiones del sistema juegan un papel importante en la generación de estructuras disipativas. Un sistema lo bastante pequeño siempre estará determinado por las condiciones de sus límites. Para que la no linealidad puede optar por varias soluciones posibles es necesario rebasar ciertas dimensiones espaciales críticas. Sólo entonces el sistema adquiere un grado de autonomía suficiente respecto del mundo externo. Las estructuras disipativas han propiciado el descubrimiento de nuevos tipos de atractores que recrudecen la polémica entre lo aleatorio y lo regular. Una estructura disipativa de comportamiento periódico se caracteriza por un comportamiento regular. Su génesis remite a la inestabilidad de un estado estacionario y a la amplificación de una fluctuación hasta dimensiones macroscópicas pero, una vez creadas, su comportamiento es regular y previsible en relación a las fluctuaciones.

¿Qué aporta el caos determinista? Reclama la existencia de atractores que no implican un comportamiento regular. Dichos atractores no corresponden a un punto, como en el estado de equilibrio, o a una línea, como en el ciclo límite, sino a un *conjunto denso de puntos*, lo bastante denso como para que sea posible encontrar puntos en cualquier zona del mismo, por pequeña que esta sea. A este conjunto de puntos le se puede atribuir una dimensión fractal. Se llaman *atractores extraños*, y se caracterizan por su sensibilidad a las condiciones iniciales. Toda pequeña variación llevará el sistema de un estado a otro muy diferente. Dado que esas pequeñas variaciones son inevitables, el sistema vagará de un estado a otro, explorando el conjunto del espacio de fases, es decir, el espacio recubierto de manera fractal por sus posibles estados atractores (Prigogine, 1994).

El análisis de los sistemas dinámicos permite determinar si una secuencia temporal aparentemente aleatoria que caracteriza el estado de un sistema puede o no corresponder a un comportamiento caótico *generado por un sistema de ecuaciones deterministas*. Es posible determinar el número de variables independientes que pondría en juego ese conjunto de ecuaciones desconocidas. Aplicando estas técnicas a la variación a largo plazo del clima, se ha llegado a la conclusión de que las variaciones climáticas podrían ser generadas por un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden (Nicolis, 1984). Toda la complejidad, variabilidad e inestabilidad del clima podría ser entendida a partir del comportamiento caótico que exhibe la solución de un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales, de la evolución temporal de cuatro variables independientes. Esto es el caos. Otro problema, y es el mayor, consiste en identificar esas variables.



En los párrafos anteriores se ha intentado poner de manifiesto las características principales del caos en sistemas dinámicos; poniendo de manifiesto su presencia en numerosos campos de la ciencia y en la posibilidad de extraer información útil, dado el comportamiento determinista de este tipo de dinámica. Las últimas investigaciones muestran que el caos no es un fenómeno aislado y curioso, sino que es un *comportamiento general en la Naturaleza* (Lorentz, 1995). Incluso es posible que los místicos reclamen algunos de estos conceptos para sí; el concepto fractal parece subyacer en el segundo de los siete principios herméticos (Anónimo, 1980) formulados por el sacerdote egipcio Hermes Trimegistos, contemporáneo de Abraham; este principio afirma: "como es arriba es abajo". Todo es cuestión de escala.

ANÁLISIS DEL CAOS

En los párrafos anteriores se ha dado una descripción de las características fundamentales de los regímenes dinámicos caóticos y de su presencia en casi todos los campos de la ciencia.

Este apartado se dedica a detallar las características básicas del régimen caótico y a mostrar la forma de abordar su estudio cualitativo y cuantitativo. Se revisan los siguientes puntos:

- 1 -. Concepto de bifurcación.
- 2 -. Definición operativa de caos.
- 3 -. Análisis del espectro de frecuencias:
 - Transformada de Fourier.
 - Espectro de potencia.
 - Función de autocorrelación.
- 4 -. Tipos de señales temporales.
- 5 -. Sección de Poincaré.
- 6 -. Características de los atractores extraños o caóticos.
- 7 -. Rutas hacia el caos.
- 8 -. Reconstrucción del espacio de fases a partir de una señal temporal.
- 9 -. Cálculo de la dimensión fractal a partir de la señal temporal.
- 10 -. Ejemplos de atractores extraños.

Bifurcaciones

El concepto de bifurcación es básico en el análisis del caos. Se dice que existe una bifurcación siempre que el comportamiento dinámico del sistema cambie cualitativamente al modificar algún *parámetro de control*, es decir alguna magnitud (temperatura, intensidad de corriente, peso, ect) que caracterice el sistema y que, una vez fijado, determine la evolución temporal. Los sistemas estables son capaces de desarrollar mecanismos que los hacen inmunes a las perturbaciones, pero si se lleva el sistema lo bastante lejos del equilibrio, *entra en estado inestable en relación a la perturbación*. El punto exacto en que esto sucede se denomina *punto de bifurcación*. Al hacerse inestable la solución primitiva, se producen nuevas soluciones que pueden corresponder a un comportamiento muy distinto (Prigogine, 1993). La representación de alguna característica de la evolución temporal (como, por ejemplo, las frecuencias involucradas en la dinámica), frente al parámetro de control constituyen un *diagrama de bifurcación*. Existen varios tipos de bifurcaciones, siendo las *subcríticas* y las *supercríticas* los grupos principales, caracterizándose *por si la no linealidad facilita o no la*

inestabilidad que induce el cambio cualitativo de sistema.

Variando adecuadamente un parámetro, o un conjunto de ellos, puede lograrse que un sistema deje de operar en un régimen periódico, para hacerlo en otro caótico. Existen varios modos de transición al caos: son las llamadas *rutas hacia el caos*.

Definición operativa del caos

Una condición *necesaria* para que un régimen dinámico sea caótico es que el *espectro de frecuencias presente una banda continua*, independientemente de la presencia eventual de algunas líneas más altas que la banda (Bergé, 1992). Para tener realmente caos debe haber un orden interno; debe tener *estructura fractal*.

Análisis del espectro de frecuencias

El espectro de frecuencias se analiza aplicando la *transformación de Fourier* a la señal temporal $x(t)$, siendo x la magnitud que caracteriza al sistema. Se obtiene información sobre las frecuencias que concurren en la señal temporal. La transformada de Fourier equivale a un valor medio de los diferentes valores de $x(t)$ ponderados con exponenciales complejas; si se toma el módulo cuadrado, con lo cual se desprecia la información sobre la fase de la transformada, se obtiene el *espectro de potencia*.

Una magnitud relacionada con el espectro de potencia es la llamada *función de autocorrelación*, $C(\tau)$, que representa al valor medio del producto de valores de la señal en un tiempo dado t , $x(t)$, y en un tiempo posterior $t+\tau$, $x(t+\tau)$, siendo τ un intervalo de tiempo dado. Esta función permite diferenciar claramente las funciones periódicas o cuasiperiódicas de las caóticas. Una función periódica guarda cierta similitud consigo misma, es decir, si se conoce la señal durante cierto tiempo, se puede predecir cómo será en un instante posterior. Las señales caóticas pierden toda similitud consigo mismas para tiempos suficientemente separados uno de otro. La función de autocorrelación cuantifica esa similitud, y viene dada por:

$$C(\tau) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (1)$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos entre los que se efectúa la medida.

La función de autocorrelación y el espectro de potencia están relacionados. El *teorema de Wiener-Khintchine* (Bergé, 1992) permite asegurar el *espectro de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación*.

Tipos de señales temporales

Existen tres tipos de señales temporales:

a) *Periódicas* -. Implican una única frecuencia. Su espectro presenta líneas situadas en las frecuencias $1/T, 2/T, 3/T, \dots, n/T$, donde T es el período de la señal, es decir, aparece la frecuencia principal y sus armónicos. Un ejemplo de este tipo de señal lo constituye el movimiento de un péndulo simple.

b) *Cuasiperiódicas* -. En ellas concurren varias frecuencias. Si suponemos que existen, por ejemplo, dos frecuencias principales, f_1 y f_2 , su espectro está formado por líneas situadas en las posiciones dadas por $m_1 f_1 + m_2 f_2$, siendo m_1 y m_2 números enteros positivos. Si la relación f_1/f_2 es irracional, las frecuencias aparecen formando una *banda* (matemáticamente hablando forman un conjunto denso sobre los reales positivos), mientras que si la relación es racional, se aprecian picos separados los unos de los otros. Exhibe cuasiperiodicidad un péndulo doble.

c) *Aperiódicas* -. Implican un espectro continuo y no se puede establecer, para su identificación, ninguna relación matemática, como en el caso de la cuasiperiodicidad. Un ejemplo de señal aperiódica lo constituye el ruido (el ruido blanco, por ejemplo); éste presenta un espectro continuo, pero no es caótico porque no es fractal.

Sección de Poincaré

Una forma sencilla de estudiar el régimen dinámico en que opera un sistema consiste en hallar la sección de Poincaré. Supóngase que el sistema posee más de tres grados de libertad, por lo es difícil visualizar la *trayectoria de fases*, esto es, la evolución del punto que representa el estado dinámico del sistema. *La sección de Poincaré es el conjunto de puntos que se obtienen cuando la trayectoria de fases intersecta un plano dado.* Cuando la trayectoria de fases conforma un atractor, se pueden obtener distintas secciones de Poincaré de éste variando el plano de corte. La sección de Poincaré tiene un interés práctico que descansa en dos hechos:

a) Se reduce la *dimensionalidad* del problema. Es más fácil visualizar geométricamente la dinámica.

b) Equivale a una *discretización del tiempo*: los puntos P_k, P_{k+1} que intersectan la trayectoria de fases con el plano de corte están relacionados mediante una aplicación continua T , de forma que $P_{k+1} = T(P_k)$; ello permite sustituir las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica por *ecuaciones en diferencias*, que son algebraicas (Bergé, 1992).

Puede identificarse perfectamente el tipo de señal: i) si es periódica, la sección de Poincaré ofrecerá un único punto, ii) si es cuasiperiódica ofrecerá un conjunto de puntos o una línea continua cerrada, dependiendo si el cociente de frecuencias principales f_1/f_2 es racional o irracional y iii) si es aperiódica los puntos de corte aparecen conformando una cierta figura, no se acumulan en un línea.

Características de los atractores extraños

Los atractores extraños o caóticos tienen las siguientes propiedades:

a) Están relacionados con *sistemas disipativos*, que tienen la capacidad de *atraer* las trayectorias de fase hacia una zona del espacio de fases (aunque no es la regla general ya que existen sistemas hamiltonianos que presentan caos).

b) Son *invariantes* por la acción de la dinámica del sistema: si se toma el atractor como conjunto de condiciones iniciales y se hacen evolucionar según las ecuaciones diferenciales de movimiento, la solución obtenida será el propio atractor.

c) En el seno del atractor, dos trayectorias de fases correspondientes a condiciones iniciales arbitrariamente próximas divergen exponencialmente; esta divergencia se cuantifica mediante los *exponentes de Lyapunov*.

d) Tienen *volumen nulo* en el espacio de fases. Ello se debe a que el teorema de Liouville no es aplicable en sistemas disipativos y los volúmenes del espacio de fases no se conservan: si un conjunto de puntos iniciales ocupan un volumen determinado en el espacio de fases, al evolucionar el sistema, estos mismos puntos ocupan un volumen nulo.

e) En el atractor extraño *las trayectorias de fases no intersectan entre sí*. Ello es consecuencia del carácter determinista de las ecuaciones de movimiento; si las trayectorias intersectasen, el punto de intersección sería la misma condición inicial para dos trayectorias diferentes.

f) La dimensión del atractor es siempre *inferior a la del espacio de fases*, y es *fraccionaria*. La dimensión mínima del espacio de fases necesaria para la presencia de un atractor extraño es tres. Esta dimensión es conocida como *envolvente* (Abarbanel, 1993).

g) Son *fractales*. Su estructura topológica puede entenderse como generada por pliegues y estiramientos de espacio de fases en diferentes escalas.

Rutas hacia el caos

Con este nombre se designan los *modos de transición desde un régimen periódico hacia otro caótico*. La transición aparece como consecuencia de una pérdida de la estabilidad lineal de las soluciones periódicas. Las no linealidad puede contribuir a disminuir o aumentar la estabilidad.

La transición al caos puede darse mediante tres fenómenos fundamentales:

i) *Por cuasiperiodicidad* -. En este punto es interesante mencionar el *teorema de Ruelle-Takens*, que asegura que únicamente la concurrencia de tres frecuencias independientes posibilita un régimen caótico, a través de la desestabilización de un toro T^3 , que sería el atractor correspondiente a la presencia de tres frecuencias independientes en el sistema físico considerado. Un toro T^3 se "rompe" fácilmente ya que es *inestable*, mientras que un T^2 (correspondiente a dos frecuencias) es más estable.

La transición, desde un régimen periódico, al caos, inducida por la variación de cierto parámetro de control (por ejemplo, en un fluido, el número de Reynolds), atraviesa las siguientes etapas: a) régimen periódico, \rightarrow b) cuasiperiodicidad a dos frecuencias, \rightarrow c) cuasiperiodicidad a tres frecuencias, \rightarrow d) rotura del toro T^3 , \rightarrow e) caos.

También puede existir una transición al caos a partir de dos frecuencias, gracias a la inestabilización de un toro T^2 (Bergé, 1992).

ii) *Por cascada de subarmónicos* -. La variación del parámetro de control permite la generación de inestabilidades en la señal de período T , permitiendo la aparición de señales de períodos $2T$, $4T$, $8T$, ..., ect. El período de las señales se va duplicando sucesivamente hasta que todas ellas, en el régimen caótico, forman un continuo.

iii) *Por intermitencias* -. Reciben el nombre de intermitencias las variaciones localizadas en el tiempo y de gran amplitud que sufre una señal temporal. Variando el parámetro de control, el régimen dinámico puede pasar de ser completamente regular a presentar unas *fluctuaciones* de corta duración y gran amplitud que conducen al régimen caótico.

Reconstrucción del espacio de fases a partir de la señal temporal experimental

Un atractor puede representarse fácilmente en el espacio de fases si se conoce previamente cuál es ese espacio de fases, es decir, si se conocen con precisión cuales son los grados de libertad implicados en la descripción total del sistema. Ello siempre es posible si se obtiene la trayectoria de fases a través de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema. Resolviéndolas numéricamente es posible obtener la evolución temporal de todos los grados de libertad implicados así como de sus velocidades asociadas.

En un montaje experimental se obtienen únicamente señales temporales $x(t)$, que representan la evolución temporal de alguna propiedad medida en el sistema sujeto a estudio. En la mayoría de los casos no se conocen todos los grados de libertad implicados. ¿Cómo reconstruir el atractor entonces? Se recurre a la llamada *técnica del retardo o desplazamiento temporal*. Esta técnica fue introducida por Crutchfield y colaboradores (Crutchfield, 1987) y posibilita la reconstrucción del espacio de fases para buscar atractores caóticos. La idea básica consiste en la suposición de que la evolución de cualquier componente singular de un sistema está determinada por los demás con los que interactúa. Para reconstruir un espacio de fases "equivalente" basta con observar un componente, la magnitud $x(t)$, y tratar los valores medidos a *intervalos de tiempo fijos* como si fueran dimensiones nuevas. Estos valores retrasados pueden considerarse como nuevas coordenadas que definen un punto en un espacio multidimensional. Para reconstruir un sistema de coordenadas en el que poder "capturar" la estructura de las órbitas en el espacio de fases no es necesario recurrir a las derivadas de la señal temporal, sino a la propia señal retardada en diferentes intervalos temporales (Abarbanel, 1993).

A partir de la señal $x(t)$, se crea un vector p -dimensional de la forma:

$$y(t) = [x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), x(t+3\tau), \dots, x(t+(p-1)\tau)]$$

donde τ es un tiempo a determinar a partir de la expresión $\tau = 2 \cdot d \cdot \tau_0$, siendo τ_0 el tiempo en que se anula la función de autocorrelación y d la dimensión mínima en donde puede existir el atractor (Abarbanel, 1993), es decir, la dimensión envolvente. Si se toma el τ adecuado, puede obtenerse el atractor en un espacio de fases semejante al real. Si se toman otros τ , se pueden obtener *distintas perspectivas del atractor*; en algunas de ellas puede parecer que, por ejemplo, las trayectorias de fases se corten, aunque no lo hagan realmente sino que se ve la proyección de trayectorias vecinas sobre un plano que no es el adecuado y de la impresión que se cortan cuando en realidad no lo hacen.

En un sistema que tuviese tres grados de libertad, $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ el atractor podría verse (manifestando todas sus características) en el espacio tridimensional (x, y, z) . La técnica de reconstrucción descrita permite visualizarlo en el espacio $x(t+\tau)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$.

Podría pensarse que la técnica de reconstrucción del atractor es similar a considerar la señal temporal $x(t)$ y su derivada $x'(t)$, y representarlas una frente a otra. La imagen que se obtiene presenta las *mismas propiedades topológicas que el atractor*, pero no es el atractor mismo (Bergé, 1992).

Cálculo de la dimensión fractal de un atractor a partir de la señal temporal

Para medir la dimensión de un atractor se usa el concepto de *medida de Hausdorff-Besicovitch* (Guzmán, 1993), consistente en el recubrimiento del objeto sujeto a estudio mediante hipercubos de lado ϵ .

Usando este tipo de medida, se puede calcular la dimensión fractal de la siguiente forma. Sea $N(\epsilon)$ el número de hipercubos de lado ϵ necesarios para recubrir el objeto. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch o dimensión fractal está representada por el número:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln (1/\epsilon)} \quad (2)$$

Es decir, el número mínimo de hipercubos recubridores varía con ϵ^{-D} . Este concepto se usa para medir la dimensión fractal del atractor.

A partir de la señal temporal $x(t)$, se crea un vector p -dimensional, donde p es un número entero positivo suficientemente grande; este vector tendrá por componentes: $x(t)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$, $x(t+3\tau)$, ..., $x(t+(p-1)\tau)$. Cada vector p -dimensional está caracterizado por el tiempo t . Se puede generar un conjunto de vectores para distintos valores de t . Estos vectores quedarán representados por un conjunto de puntos, los cuales determinan la trayectoria del sistema dinámico en este espacio de fases reconstruido (Bergé, 1992). Supóngase que hay m de estos puntos. En un régimen caótico, las posiciones dos puntos cualesquiera no estarán correlacionadas entre ellas. Pero sí que existe correlación espacial entre los puntos que están situados sobre un atractor. Esta correlación puede caracterizarse mediante una función adecuada:

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \{n^{\circ} \text{ pares } i, j \text{ tales que } |y_i - y_j| < r\} \quad (3)$$

donde y_i es un vector p -dimensional como el escrito anteriormente. Esta función tiene una dependencia con r del tipo:

$$C(r) \sim r^D \quad (4)$$

donde D es la dimensión fractal del atractor (Bergé, 1992).

Calculando $C(r)$ para valores de p suficientemente altos ($p > 3$) y representando $\log C(r)$ frente a $\log r$ se puede obtener la dimensión fractal como la pendiente de la recta obtenida.

Ejemplos

A fin de ilustrar algunas de las propiedades descritas anteriormente, vamos a considerar dos de los atractores más famosos, el de *Lorentz* y el de *Rössler*. Como se dijo anteriormente, el atractor de Lorentz fue el primer atractor extraño, que resultó de la resolución de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, que modelizaban de forma simple el movimiento de un fluido sujeto a convección (Lorentz, 1995). El de Rössler también se obtiene a partir de la resolución de tres ecuaciones diferenciales de primer orden que describen las oscilaciones observadas en reacciones químicas (Gleik, 1988).

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden se resuelven numéricamente mediante el método numérico de *Runge-Kutta de cuarto orden* (Burden, 1985). En ambos casos se obtienen unas funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$. La representación de unas frente a otras ofrece diferentes perspectivas del atractor correspondiente. Se representan también las funciones temporales frente a sus derivadas para poner de manifiesto que ésta técnica no reconstruye el atractor real sino uno "deformado". Se calcula las transformadas de Fourier y el espectro de potencia para evidenciar el espectro continuo que caracteriza a las dinámicas descritas por las ecuaciones de Lorentz y Rössler. Finalmente, se obtiene la dimensión fractal para el atractor de Lorentz.

Atractor de Lorentz

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es el siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= ay - ax \\ y' &= -xy + rx - y \\ z' &= xy - bz \end{aligned}$$

donde los parámetros son $a=10$, $b=8/3$, $r=28$. Hay que hacer notar que para otros valores de los parámetros, la solución obtenida no es caótica.

Las figuras 1a, 1b y 1c ofrecen el atractor de Lorentz desde distintas perspectivas, representando y frente a x , z frente a x y z frente a y . (todas las variables están normalizadas y son adimensionales)

Se han usado las condiciones iniciales $x(0)=y(0)=z(0)=1$. El intervalo temporal se divide

en 4000 partes. La **figura 2** muestra el aspecto de la señal temporal $x(t)$. Obsérvese la ausencia de regularidad.

La **figura 3** ofrece el resultado de representar $x'(t)$ frente a $x(t)$: el atractor aparece similar al obtenido en las figuras 1a, 1b y 1c, pero *está deformado*.

En las **figuras 4a y 4b** se representa la transformada de Fourier y el espectro de potencia para la señal $x(t)$ presentada en la figura 1. La información aportada acerca de las frecuencias presentes en la señal $x(t)$ es similar en ambos casos.

La **figura 5** muestra el resultado de calcular la dimensión fractal a partir de la señal temporal, siguiendo el método descrito anteriormente. Se ha tomado un valor de $p=5$ y $\tau=0.3$ seg. Se obtiene un valor de la dimensión fractal $d=2,103$, muy cercano al que se obtiene por otros métodos, $d=2,060$ (Bergé, 1992).

Atractor de Rössler

Se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}x' &= -y - z \\ y' &= x + ay \\ z' &= b + xz - cz\end{aligned}$$

Se han usado las mismas condiciones iniciales y número de puntos en que se discretiza el intervalo temporal que en el caso del atractor de Lorentz. Los parámetros para los que se obtiene comportamiento caótico son: $a=b=0.2$ y $c=5.7$

La **figura 6** muestra el resultado obtenido para la función $x(t)$. Las **figuras 7a, 7b y 7c** muestran distintas perspectivas del atractor. Las **figuras 8a y 8b** muestran la transformada de Fourier y el espectro de potencia para $x(t)$.

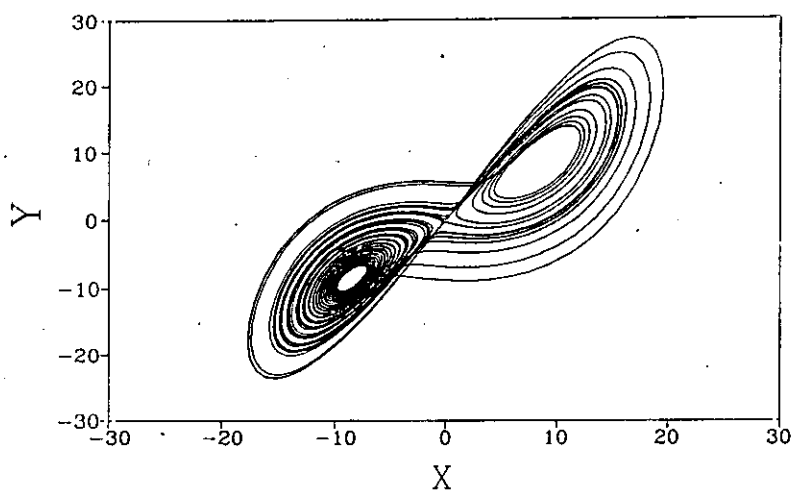


Figura 1a -. Atractor de Lorentz: $y(t)$ frente a $x(t)$.

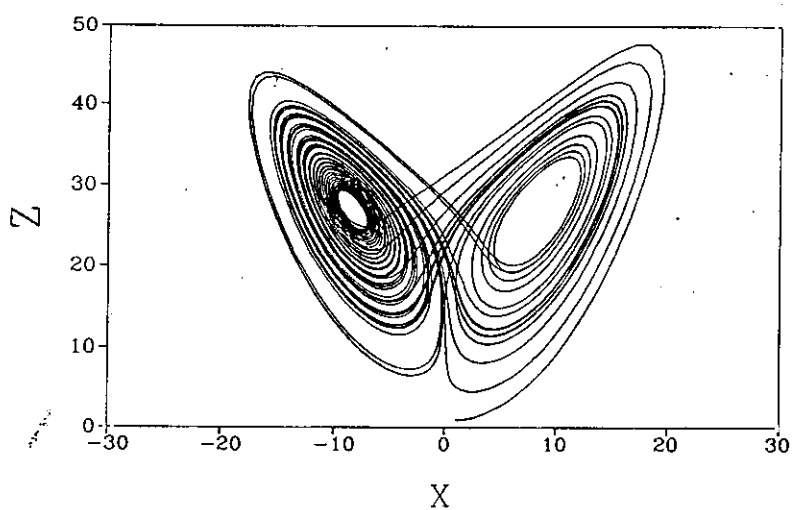


Figura 1b -. Atractor de Lorentz: $z(t)$ frente a $x(t)$.

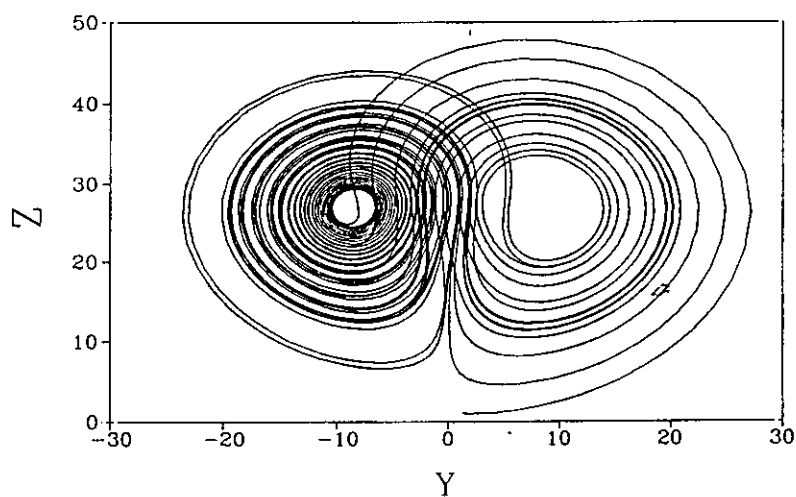


Figura 1c -. Atractor de Lorentz: $z(t)$ frente a $y(t)$.

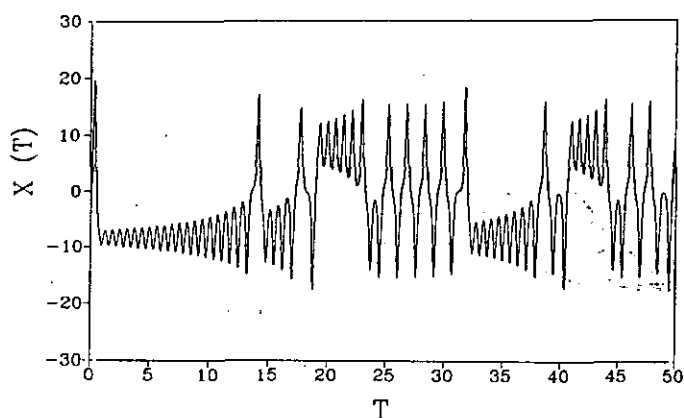


Figura 2 -. Dependencia temporal de la variable x

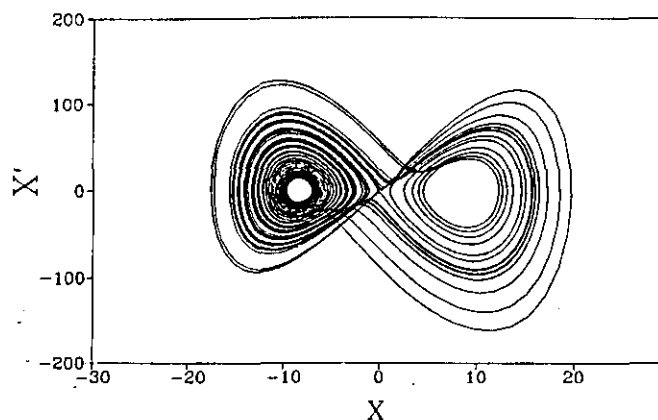


Figura 3 -. Atractor de Lorentz: $x(t)$ frente a $x'(t)$.

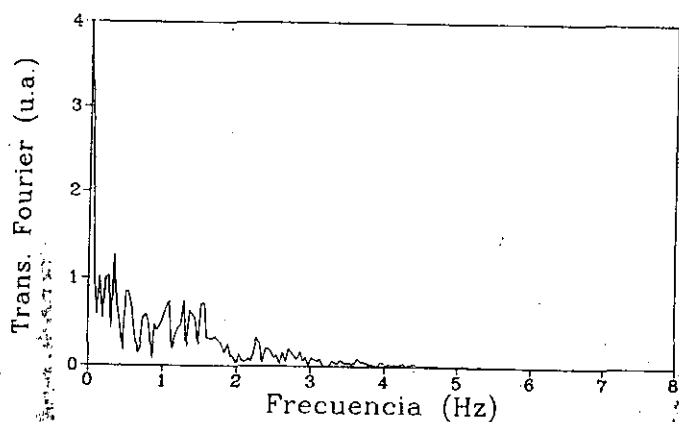


Figura 4a -. Espectro de Fourier de $x(t)$.

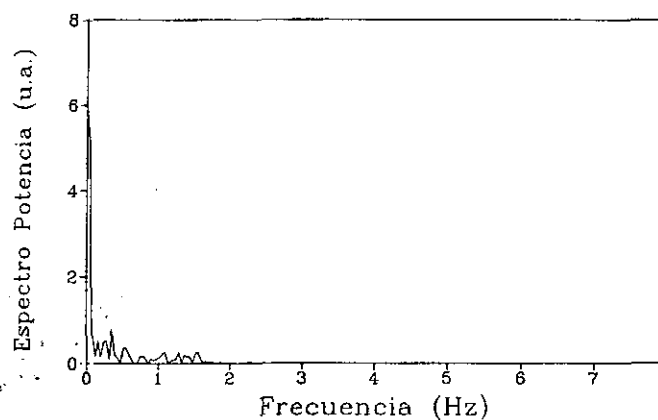


Figura 4b -. Espectro de potencia para $x(t)$.

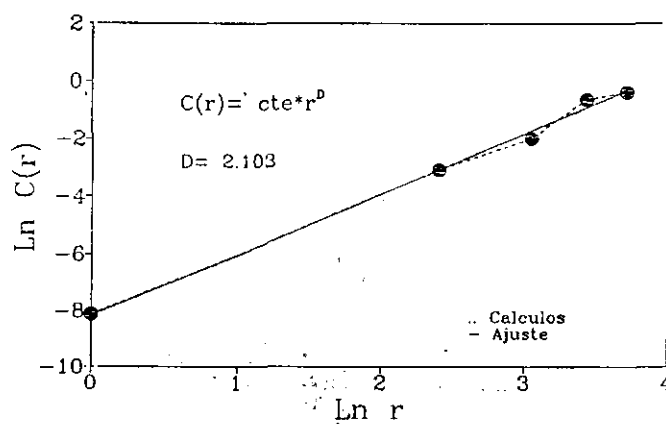


Figura 5 -. Cálculo de dimensión fractal para $x(t)$

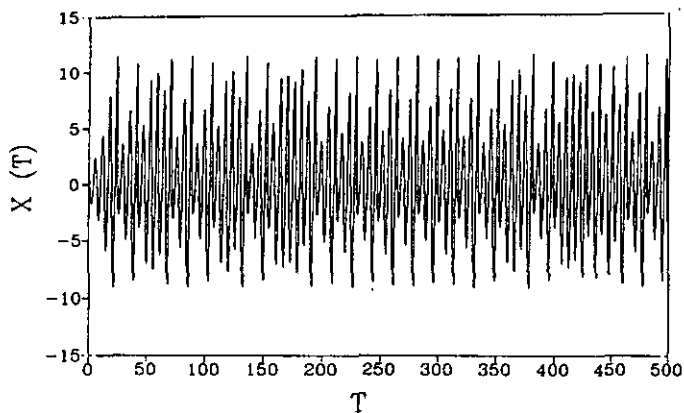


Figura 6 -. Atractor de Rossler: dependencia temporal de $x(t)$.

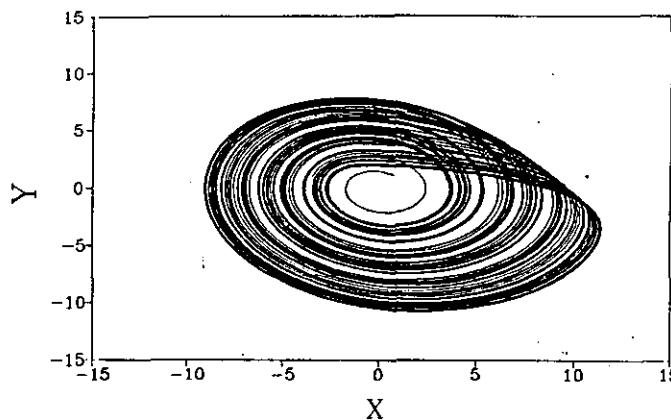


Figura 7a -. Atractor de Rossler: $y(t)$ frente a $x(t)$.

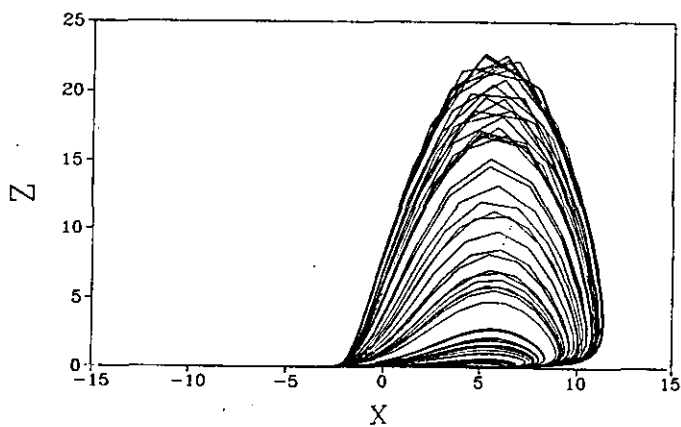


Figura 7b -. Atractor de Rossler: $z(t)$ frente a $x(t)$.

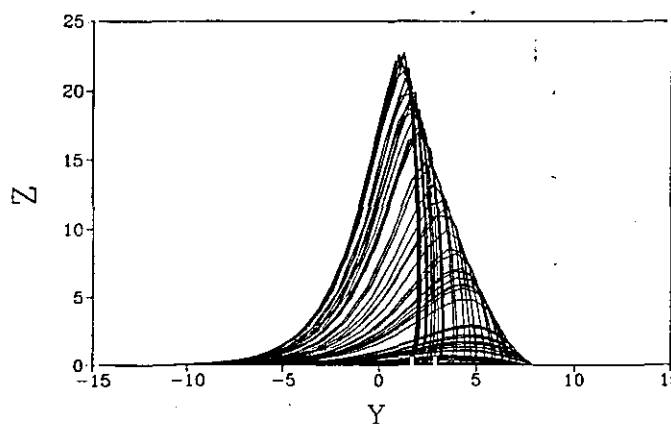


Figura 7c -. Atractor de Rossler: $z(t)$ frente a $y(t)$.

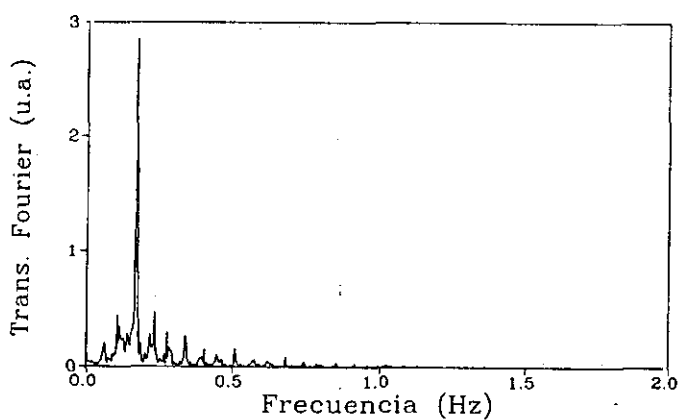


Figura 8a -. Espectro de Fourier para $x(t)$ (figura 6)

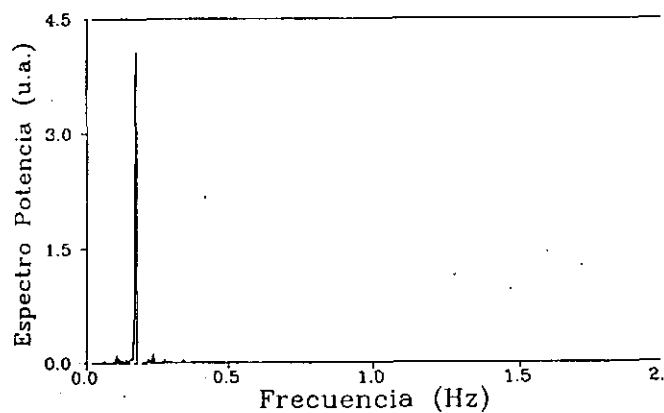


Figura 8b -. Espectro de Potencia para $x(t)$ (figura 6)

DINAMICA DE LA IMANACION

Introducción

Si se somete a un material magnético magnetostrictivo con forma de cilindro a la acción simultánea de una corriente eléctrica y de un campo magnético paralelo a su eje, se provoca una torsión en el espécimen (Chikazumi, 1964). Es el llamado *efecto Wiedemann*. Si los extremos del cilindro están libres, es posible inducir un movimiento mecánico en el mismo.

Aprovechando la citada propiedad, se ha construido un péndulo de torsión constituido por un hilo amorfo (de composición $\text{Fe}_{77.3}\text{Si}_{7.3}\text{B}_{15}$), fijo el extremo superior y un pequeño disco de aluminio solidario a su extremo inferior. Las dimensiones y peso del disco determinan la frecuencia de resonancia mecánica, que es de 12.9 Hz. Un delgado hilo de cobre, de 0.05 mm de diámetro, soldado con pintura de plata al hilo amorfo por su extremo inferior permite el paso de una corriente eléctrica alterna (pudiéndose despreciar su influencia en el movimiento mecánico del péndulo) mientras que unos carretes Helmholtz aplican un campo magnético, H_z , constante, vertical y coaxial al hilo.

La corriente eléctrica provoca la aparición de un campo magnético circular H_ϕ , cuyo magnitud puede obtenerse a partir de la tercera ecuación de Maxwell y del teorema de Stokes; su valor (Feynman, 1987) es:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (1)$$

donde I es la intensidad de corriente a través del hilo, R el radio de éste y r la distancia desde el eje hasta un punto interior del hilo. Nótese que el campo H_ϕ es nulo en el eje y máximo en la superficie. El campo magnético axial H_z tiene una dirección perpendicular a H_ϕ . La composición vectorial de ambos determina el campo resultante, que tendrá una *dirección helicoidal*: formará cierto ángulo con la dirección axial y circular y será perpendicular a la dirección radial.

La imanación seguirá la dirección del campo para minimizar la energía magnética Zeeman. Dado que el hilo tiene una magnetostricción alta ($\lambda_s = 3 \cdot 10^{-5}$), este movimiento de la imanación conlleva la acumulación de energía elástica que provoca el giro del péndulo. El comportamiento mecánico del péndulo se estudia gracias a la luz, procedente de un láser de He-Ne, reflejada en un pequeño espejo solidario al disco fijado en el extremo inferior del péndulo (Velázquez, 1995). Para ciertos valores de frecuencia, intensidad de corriente y campo magnético axial, el movimiento deviene complejo. Dado que éste depende del comportamiento de la imanación, *¿se mueve ésta también de forma caótica?*. Para estudiarlo, se sitúa una pequeña bobina, de doscientas vueltas de hilo de cobre, en torno al hilo y en su parte media. Mediante ella, es posible medir la variación temporal de la componente axial de la imanación gracias al voltaje inducido en la bobina en virtud de la ley de Faraday. La señal temporal es registrada mediante un osciloscopio digital PM 3335 Philips. Analizado su espectro de frecuencias, se comprueba el concurso de multitud de frecuencias, condición necesaria

para la presencia de caos. Pero, ¿cómo puede generar caos este sistema? Para entenderlo, se considera un *modelo simple*.

Modelo

Considérese una anisotropía magnética uniaxial cuya densidad de energía por unidad de volumen toma el valor de K . Paralela a ella se aplica un campo magnético constante H_z y perpendicular a ambos un campo magnético alterno H_y . El ángulo θ determina la posición de la imanación respecto de la dirección de anisotropía (figura 1).

El modelo constituye una tímida aproximación a la realidad dado que la anisotropía magnetoelástica en los hilos amorfos es variable tanto en magnitud como en orientación. No obstante, puede aportar una idea acerca de la generación de complejidad en el movimiento de la imanación.

Ecuación Dinámica

El movimiento de la imanación bajo la aplicación de campos magnéticos se estudia mediante la ecuación de Landau-Lifshitz (Chikazumi, 1964):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\nu [\vec{M} \times \vec{H}] - \eta [\vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H})] \quad (2)$$

El primer término representa el movimiento de precesión de la imanación, siendo ν la constante giromagnética. El segundo término indica que una fuerza de rozamiento, que actúa sobre el movimiento de precesión, da lugar a un movimiento en la dirección perpendicular a \vec{M} .

En el modelo planteado, la imanación se moverá en el plano determinado por los campos H_z y H_y , es decir, no se considera la precesión, por lo que la ecuación dinámica se reduce a:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\eta [\vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H})] \quad (3)$$

donde el parámetro η da cuenta del rozamiento que se opone al movimiento de la imanación. Pero la ecuación (3) no parece adecuada ya que no aparece el valor de la anisotropía K en el segundo término. Para introducir éste, se podría considerar la presencia de un campo efectivo H_{ef} , en la ecuación (3), del tipo (Jaroszewicz, 1992):

$$\vec{H}_{ef} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E}{\partial \vec{M}} \quad (4)$$

donde E es la energía (por unidad de volumen), del sistema y \vec{M} la imanación. La energía es de la forma:

$$E = -\mu_0 Ms Hz \cos\theta - \mu_0 Ms Hy \sin\theta + K \sin^2\theta \quad (5)$$

siendo μ_0 la permeabilidad del vacío y Ms la imanación de saturación. Obtener el valor del campo efectivo es complicado, ya que la relación (4) es vectorial, equivalente a tres relaciones escalares, y habría que expresar la energía en función de las componentes de la imanación. Se puede encontrar una ecuación adecuada de forma más simple, y que reproduzca las características básicas del movimiento de la imanación. Los argumentos que se dan a continuación no pretenden tanto la justificación como la plausibilidad y simplicidad de la ecuación.

Considérese la forma de la ecuación (3) para el caso de anisotropía nula. La componente z verifica:

$$\frac{dM_z}{dt} = -\eta [M_y M_z H_y - M_y M_y H_z] \quad (6)$$

donde los vectores, en notación de componentes, son:

$$\vec{H} = (0, H_y, H_z) \quad \text{y} \quad \vec{M} = (0, M_y, M_z) \quad (7)$$

Por otro lado $M_z = Ms \cos\theta$, $M_y = Ms \sin\theta$, por lo que

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{dM_z}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\theta' Ms \sin\theta \quad (8)$$

siendo θ' la derivada temporal de θ . Igualando (6) y (8) se obtiene:

$$\theta' = \eta Ms [H_y \cos\theta - H_z \sin\theta] \quad (9)$$

El valor de la cantidad $\partial E / \partial \theta$, obtenido a partir de la ecuación (5), para $K=0$, es:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = \mu_0 Ms Hz \sin\theta - \mu_0 Ms Hy \cos\theta \quad (10)$$

Comparando (9) y (10) se obtiene:

$$\theta' = -\eta_1 \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad (11)$$

donde $\eta_1 = \eta \cdot Ms \cdot \mu_0$

Dada la validez de (11) en el caso en que la anisotropía es nula, usamos una ecuación del mismo tipo *para el caso general*:

$$\theta' = -\eta \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad (12)$$

donde $E = E(H_z, H_y, \theta, K)$, según la ecuación (5)

Esta ecuación diferencial, fenomenológica, de primer orden presenta soluciones de equilibrio dadas por la condición $\partial E / \partial \theta = 0$, es decir, cuando los campos se mantengan constantes, o el valor de la anisotropía sea grande en comparación con ellos, se tenderá hacia el equilibrio dado por la condición de extremo de $E(\theta)$. Este equilibrio verifica $\theta' = 0$, el movimiento de la imanación cesa y ésta se sitúa en la posición en la que se minimiza la energía total del sistema.

Análisis Dinámico

Para estudiar las diferentes soluciones de la ecuación se fija el valor de los campos y se modifica el valor de la anisotropía K . Los valores concretos son los siguientes:

$$\begin{aligned} H_z &= 10 \text{ A/m} \\ H_y &= 20 \text{ A/m} \\ \nu_y &= 10 \text{ Hz} \end{aligned}$$

donde ν_y es la frecuencia de la intensidad de corriente. La forma de la onda es sinusoidal. El parámetro de rozamiento $\eta = 100 \text{ J}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ m}^3$. Este valor numérico proporciona un comportamiento razonable de $\theta(t)$ para frecuencia del campo y anisotropía nulas: si el ángulo θ inicial es de 180° (sentido contrario al campo H_z), se alcanza el valor nulo (igual sentido al campo H_z) bruscamente. La ecuación se resuelve numéricamente por el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Burden, 1985). El intervalo de tiempo considerado va de 0 de 3 segundos y se divide en 3000 partes. El ángulo inicial $\theta(0) = 0.1^\circ$. Como imanación de saturación se toma una del orden de la de los hilos de magnetostricción positiva, $\mu_0 M_s = 1.6 \text{ T}$, con lo que el campo H_y involucra una densidad de energía máxima de 32 Jm^{-3} y el H_z , 16 Jm^{-3} .

Las figuras 2a, 2b y 2c representan los resultados obtenidos para el caso de anisotropía nula donde m_z es la componente reducida de la imanación según el eje de anisotropía K y m_z' representa la variación temporal de m_z . Es decir:

$$m_z = \cos \theta \quad m_z' = -\theta' \sin \theta$$

Las figuras 2a y 2b representan la variación temporal de m_z y m_z' . La figura 2c representa el *espacio de fases*, en este caso bidimensional. La representación en el espacio de fases ofrece un *atractor simple*: una elipse. ¿Qué significa?. El comportamiento es totalmente periódico, con una frecuencia característica. Un punto en el espacio de fases representa el estado dinámico del sistema.

Cada punto de este espacio representa el valor de m_z y m_z' en un instante de tiempo determinado. Si, en la evolución temporal, este punto recorre siempre la misma figura, quiere decir que el comportamiento periódico. Nótese que en este caso, la anisotropía nula (ver figura 2a), la imanación oscila en torno al campo H_z , formando con éste ángulos menores de 90° ($m_z = \cos\theta$ es positivo y cercano a 1).

Si se aumenta el valor de la anisotropía $K = 10 \text{ Jm}^{-3}$ se obtienen los resultados representados en las figuras 3a y 3b.

La imanación forma ángulos más pequeños con la anisotropía (m_z es más próximo a uno). El espacio de fases sigue mostrando una elipse (comportamiento periódico), pero el atractor ha contraído sus dimensiones. La contracción del atractor es característica de sistemas disipativos y es condición necesaria para encontrar comportamiento caótico (Bergé, 1992).

Si se incrementa el valor de la anisotropía a $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, el atractor se desdobra en varios bucles, indicando la concurrencia de varias frecuencias (figura 4b). La figura 4a muestra que la imanación sigue moviéndose en las cercanías del eje de anisotropía. El valor de m_z' aumenta: la imanación se mueve más rápido.

Las figuras 5a y 5b muestran el comportamiento para $K = 30 \text{ Jm}^{-3}$. El espacio de fases vuelve a distorsionarse y la imanación sigue moviéndose cerca del campo H_z . Sigue aumentando m_z' .

El valor de $K = 40 \text{ Jm}^{-3}$ marca el tránsito a un comportamiento diferente. El espacio de fases se distorsiona y la imanación forma ángulos mayores de 90° con el sentido del campo, y muy próximos a 180° .

Dado que en presencia de una anisotropía uniaxial impone una *dirección* preferencial (en la cual se minimiza la densidad energía magnetoelástica $K \cdot \sin^2\theta$), siendo ambos *sentidos* igualmente óptimos, la imanación opta por invertir éste si el valor de K es suficientemente alto.

La figura 6a muestra que la variación de m_z es periódica: la imanación sigue teniendo una relación con el ritmo de variación temporal de los campos. La figura 6b muestra un atractor simple con dos bucles lo cual indica que la imanación oscila en dos frecuencias principales.

El incremento a $K = 50 \text{ Jm}^{-3}$ rompe la periodicidad y se introduce una componente aparentemente aleatoria en el movimiento. El atractor correspondiente revela que *más zonas del espacio de fases son visitadas por el sistema* (el atractor comienza a "romperse"). Esta rotura indica que, en el transcurso de su evolución temporal, el punto representativo del estado dinámico no vuelve exactamente a los puntos en los que ya había estado. El sistema deja de ser periódico, como queda patente en la señal temporal $m_z(t)$. Las figuras 7a y 7b muestran el resultado. Los valores de m_z y m_z' son negativos. La imanación forma ángulos mayores de 90° con el campo H_z .

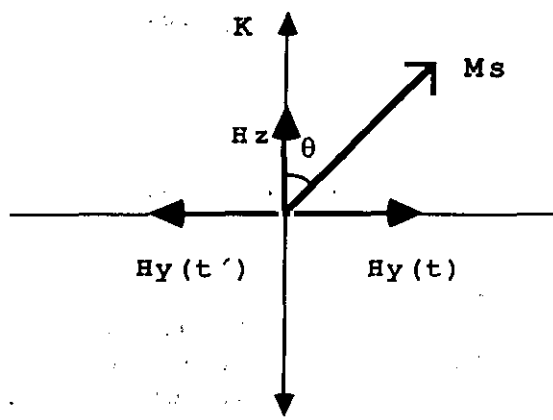


Figura 1 -. Modelo

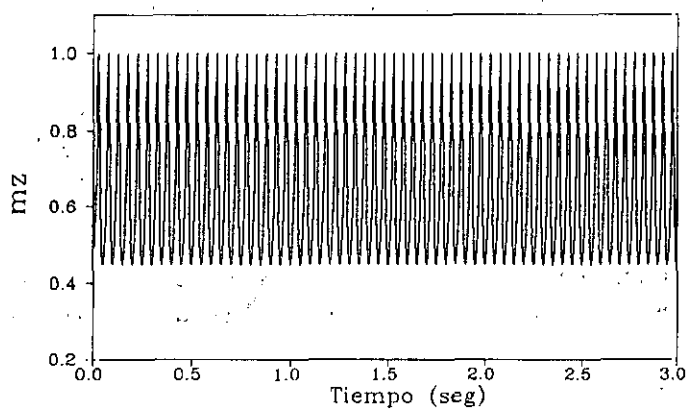


Figura 2a -. Dependencia temporal de mz para $K=0$

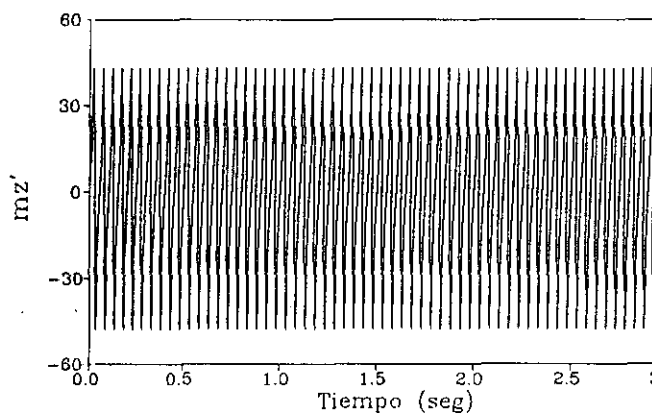


Figura 2b -. Dependencia temporal de mz' para $K=0$

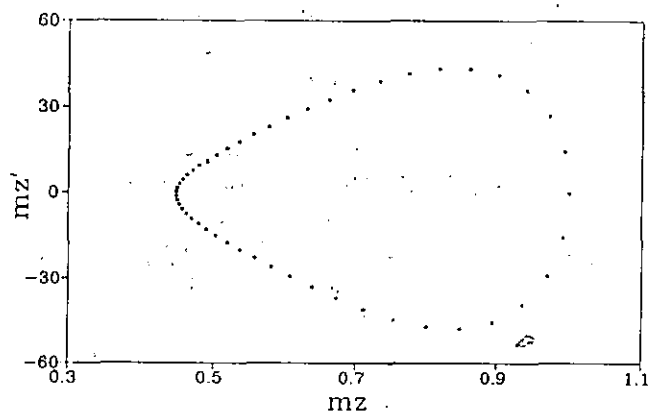


Figura 2c -. Espacio de fases para $K=0$

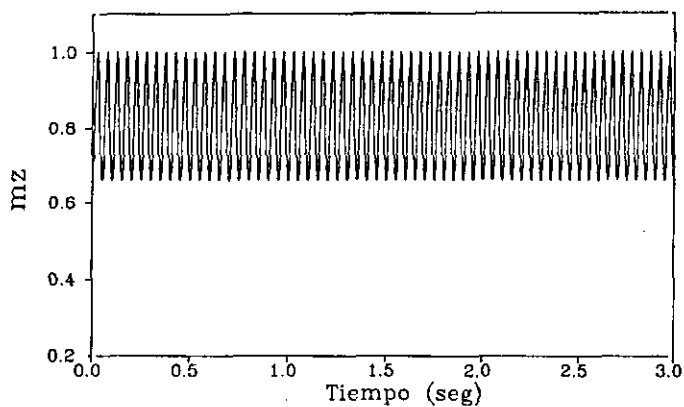


Figura 3a -. Dependencia temporal de mz para $K= 10 \text{ Jm}^{-3}$

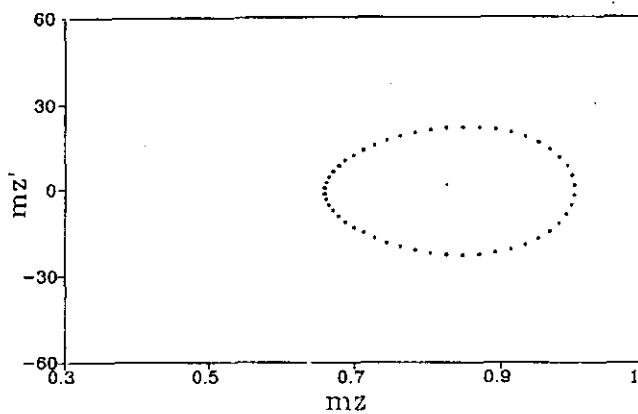


Figura 3b -. Espacio de fases para $K= 10 \text{ Jm}^{-3}$

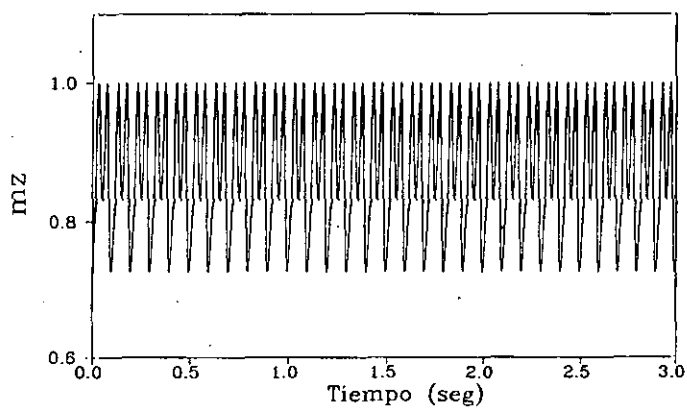


Figura 4a -. Dependencia temporal de mz para $K= 20 \text{ Jm}^{-3}$

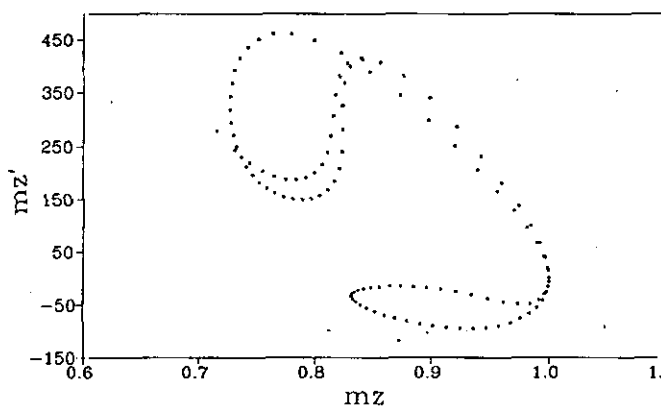


Figura 4b -. Espacio de fases para $K= 20 \text{ Jm}^{-3}$

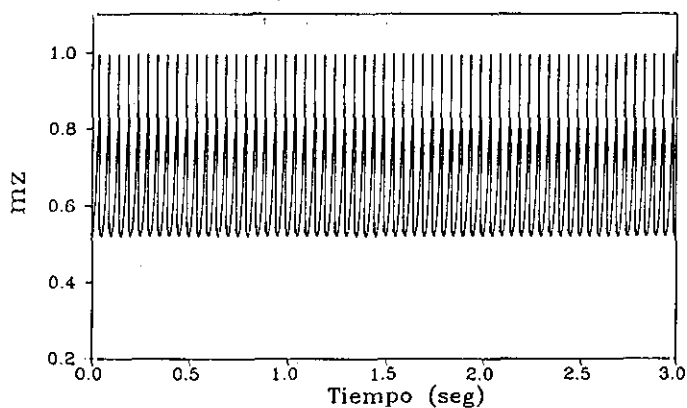


Figura 5a -. Dependencia temporal de mz para $K= 30 \text{ Jm}^{-3}$

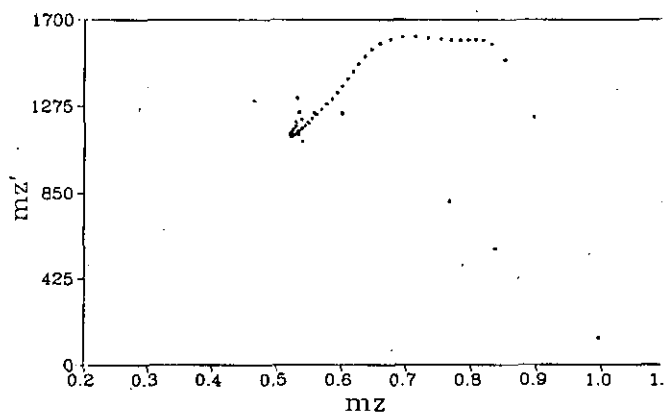


Figura 5b -. Espacio de fases para $K= 30 \text{ Jm}^{-3}$

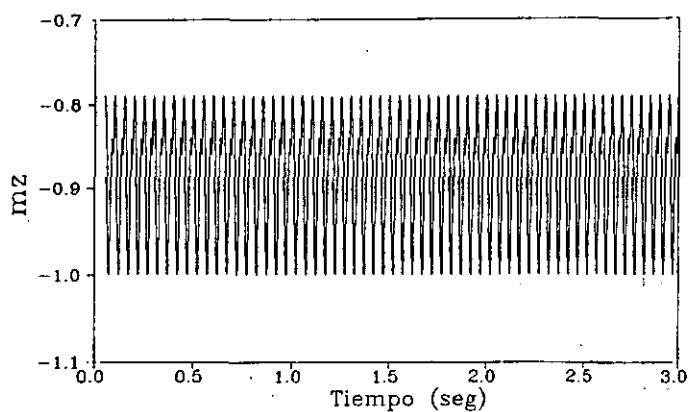


Figura 6a -. Dependencia temporal de mz para $K= 40 \text{ Jm}^{-3}$

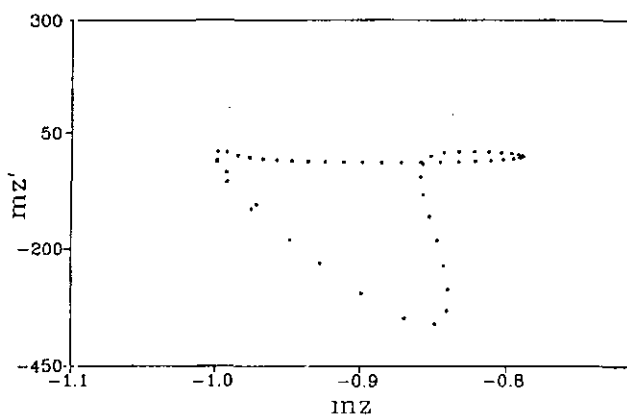


Figura 6b -. Espacio de fases para $K= 40 \text{ Jm}^{-3}$

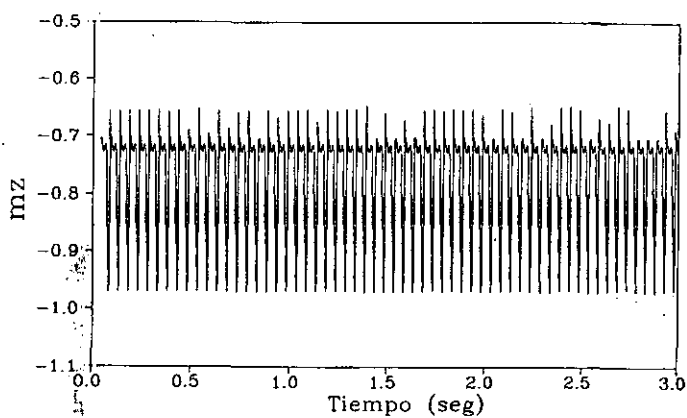


Figura 7a -. Dependencia temporal de mz para $K= 50 \text{ Jm}^{-3}$

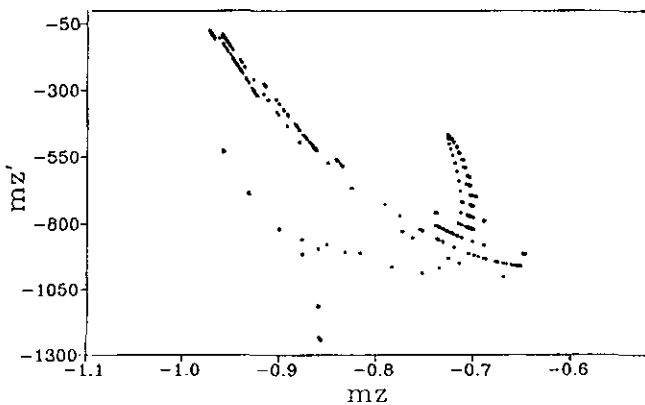


Figura 7b -. Espacio de fases para $K= 50 \text{ Jm}^{-3}$

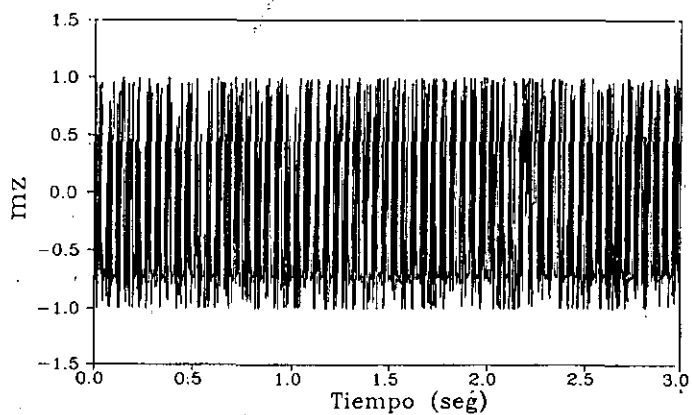


Figura 8a -. Dependencia temporal de mz para $K= 60 \text{ Jm}^{-3}$

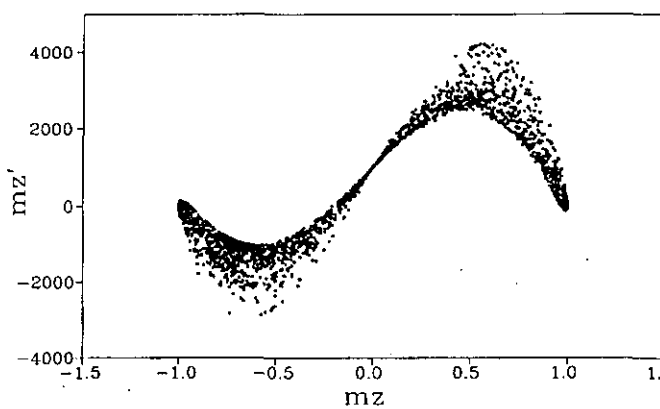


Figura 8b -. Espacio de fases para $K= 60 \text{ Jm}^{-3}$

El valor de $K = 60 \text{ Jm}^{-3}$ conduce a un movimiento totalmente desordenado: la imanación se mueve de forma *aparentemente aleatoria* (figura 8a) entre los dos sentidos marcados por la dirección de la anisotropia (es decir, formando ángulos con H_z comprendidos entre 0° y 180°). La velocidad m_z' aumenta. El espacio de fases (figura 8b) muestra un *atractor extraño*.

Si se sigue incrementando el valor de la anisotropia K , el comportamiento no cambia cualitativamente. Para valores muy altos de K , en comparación con los campos, el movimiento cesa, obteniéndose la solución constante $m_z = 1$, que viene dada por la condición $\partial E / \partial \theta = 0$. Ello es debido a que si el valor de la anisotropia es muy alto, el segundo miembro de la ecuación (12) puede considerarse independiente del tiempo, y la solución tiende a un equilibrio dado por la anulación de la derivada primera de la energía (la ecuación (12) se hace autónoma (Ross, 1981)).

La secuencia de figuras 9a-9j muestran la evolución del *espectro de frecuencias* al incrementar el valor de K .

Para el valor de $K=0$ (figura 9a), aparece una frecuencia situada en 20 Hz, el doble de la frecuencia de excitación ν_y . Puede entenderse la aparición de la frecuencia doble si se tiene en cuenta que, para $K=0$ y con un campo $H_y(t)$ variable, el ángulo θ verifica:

$$\cos \theta = \frac{H_z}{\sqrt{H_z^2 + H_y^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{H_y^2(t)}{H_z^2}}} \quad (13)$$

Si $H_y(t)$ varía con el tiempo, a la frecuencia angular ω , de la forma $\sin \omega t$, entonces se puede poner:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + A \sin^2 \omega t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A}{2}(1 - \cos 2\omega t)}} \quad (14)$$

donde A es la relación entre las amplitudes de los campos H_y y H_z . Queda clara la dependencia de $m_z(t) = \cos \theta(t)$ con el doble de la frecuencia de $H_y(t)$

Aparecen también tres armónicos de la frecuencia principal, situados en 40 Hz, 60 Hz y 80 Hz. La mayor altura del pico de 20 Hz indica que ésta es la frecuencia principal de oscilación.

Para $K = 10 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 9b), se aprecia una disminución del valor de los picos de frecuencia, llegando a desaparecer los armónicos de 60 Hz y 80 Hz.

Si $K = 20 \text{ Jm}^{-3}$, el pico principal de 20 Hz disminuye su valor respecto del obtenido para $K = 10 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 9c). El armónico de 40 Hz mantiene su magnitud. Reaparece el pico de 60 Hz además

de presentarse picos en 10 Hz, 30 Hz, 70 Hz y 90 Hz. El sistema oscila a la frecuencia del campo H_y , 10 Hz. Podría considerarse como una *bifurcación* (Bergé, 1992) de la frecuencia de 20 Hz: *se duplica el período de oscilación*. Representaría una transición a un comportamiento diferente.

Al aumentar a $K = 30 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 9d) se retoma la situación de $K=0$, pero los armónicos son ahora más grandes en comparación con la frecuencia principal de 20 Hz.

Las anisotropías de $K = 40 \text{ Jm}^{-3}$ y $K = 50 \text{ Jm}^{-3}$ provocan variaciones en los picos de la frecuencia principal y sus armónicos (figuras 9e y 9f).

El valor de $K = 60 \text{ Jm}^{-3}$ ofrece un aspecto cualitativamente diferente (figura 9g). Se siguen apreciando la frecuencia fundamental y sus armónicos, pero aparece además un *fondo continuo*. La imitación todavía oscila periódicamente (el pico de 20 Hz y sus armónicos son más altos que el fondo) pero también dispone de un conjunto continuo de frecuencias para oscilar.

Si $K = 65 \text{ Jm}^{-3}$, varían la magnitud de los picos principales pero el fondo se mantiene (figura 9h).

Para $K = 70 \text{ Jm}^{-3}$ sólo se aprecia el pico principal de 20 Hz (los armónicos desaparecen) además del fondo continuo (figura 9i).

El valor de $K = 100 \text{ Jm}^{-3}$ ofrece únicamente el *fondo continuo* (figura 9j). Se ha perdido todo vestigio de periodicidad. El sistema puede oscilar en cualquier frecuencia.

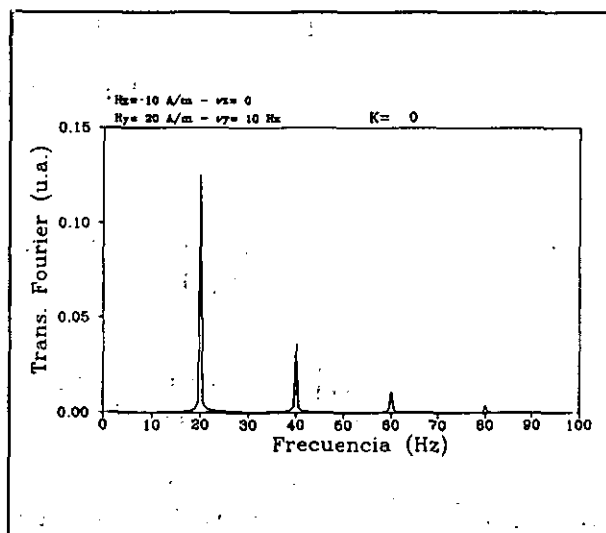


Figura 9a -. Espectro de frecuencias para $K=0$.

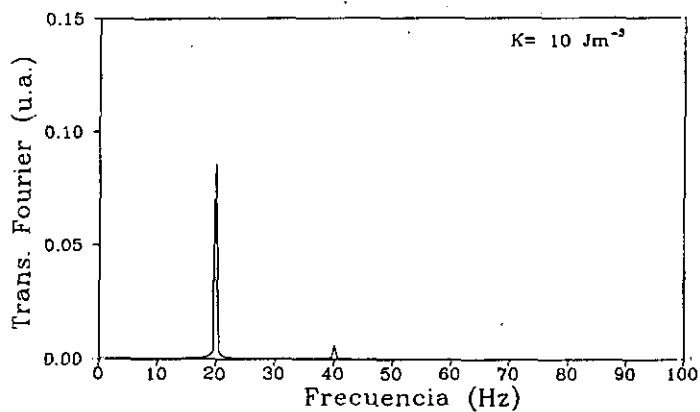


Figura 9b -. Espectro de frecuencias para $K= 10 \text{ Jm}^{-3}$

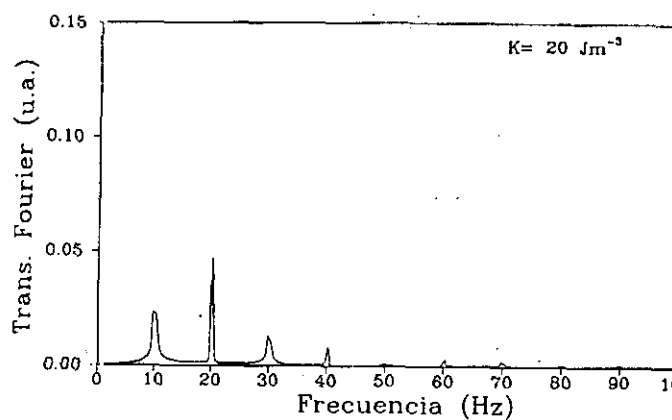


Figura 9c -. Espectro de frecuencias para $K= 20 \text{ Jm}^{-3}$

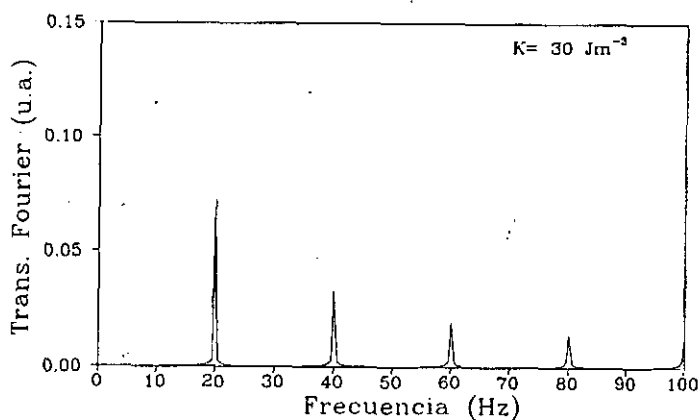


Figura 9d -. Espectro de frecuencias para $K= 30 \text{ Jm}^{-3}$

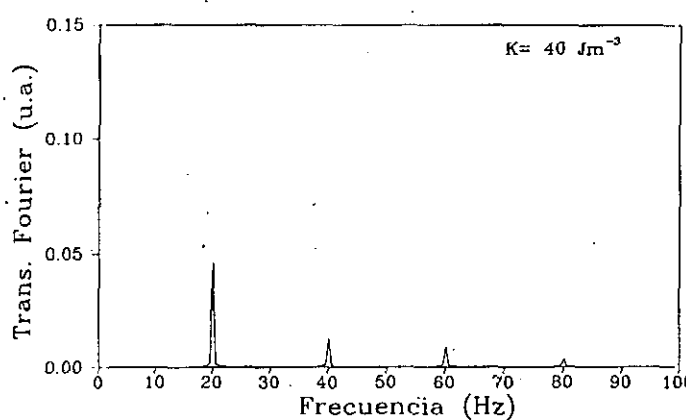


Figura 9e -. Espectro de frecuencias para $K= 40 \text{ Jm}^{-3}$

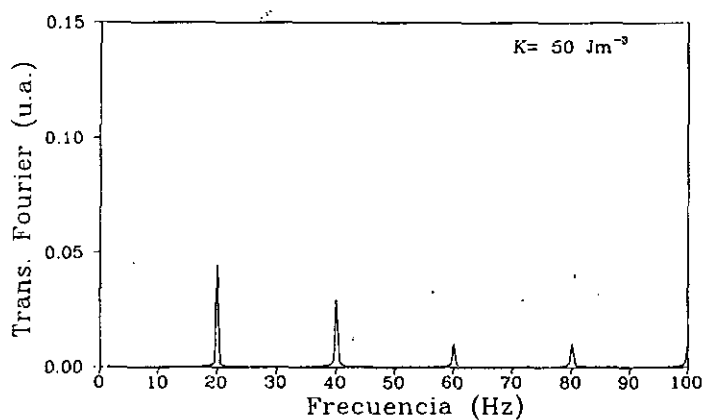


Figura 9f -. Espectro de frecuencias para $K= 50 \text{ Jm}^{-3}$

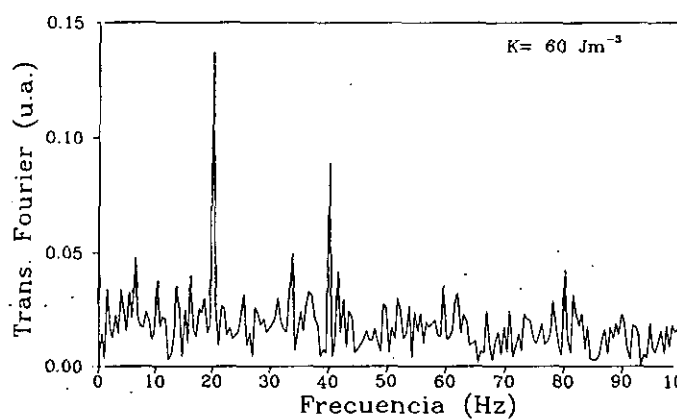


Figura 9g -. Espectro de frecuencias para $K= 60 \text{ Jm}^{-3}$

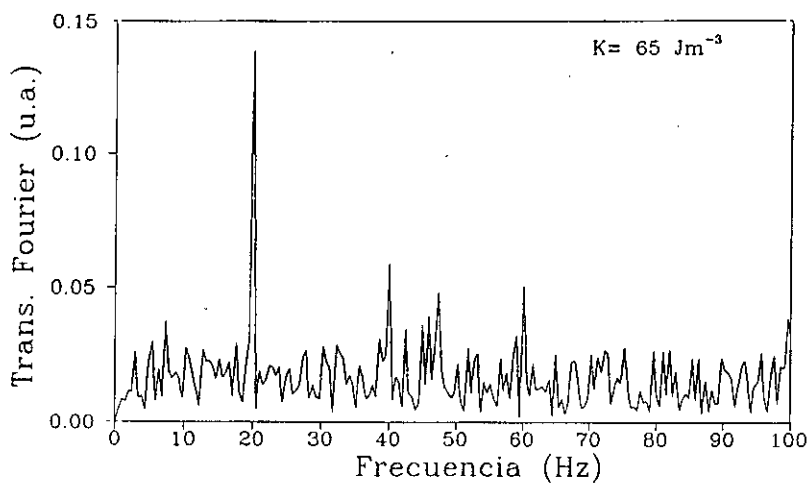


Figura 9h -. Espectro de frecuencias para $K= 65 \text{ Jm}^{-3}$

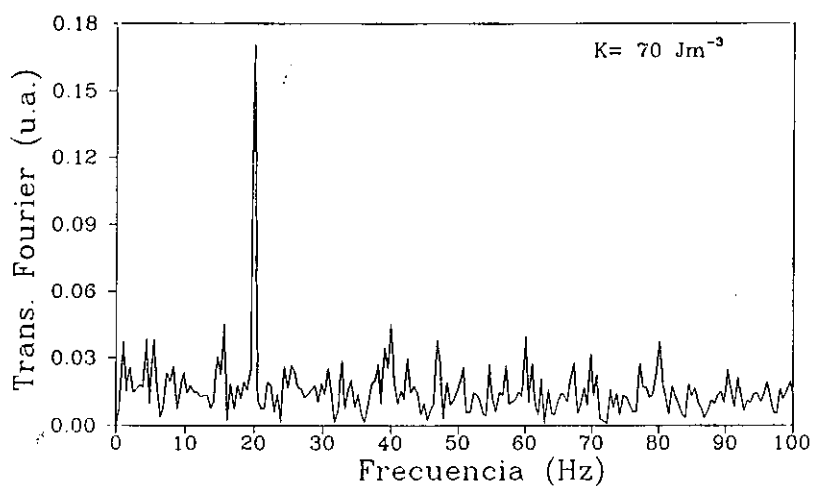


Figura 9i -. Espectro de frecuencias para $K= 70 \text{ Jm}^{-3}$

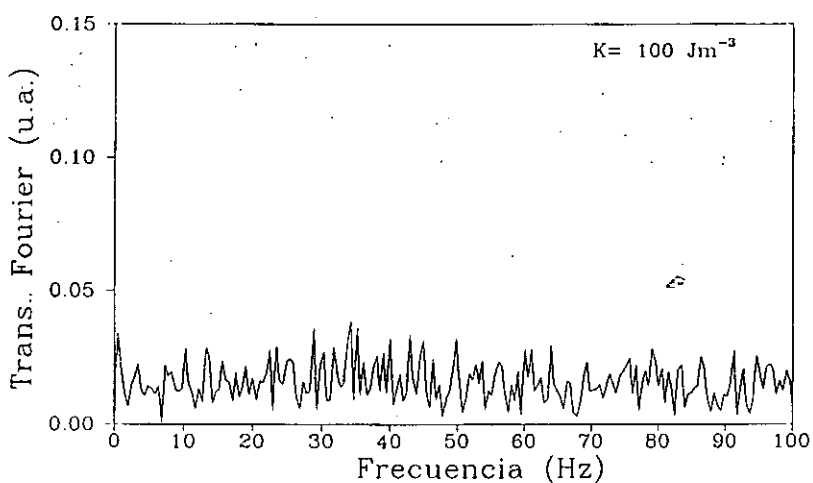


Figura 9j -. Espectro de frecuencias para $K= 100 \text{ Jm}^{-3}$

La figura 10 muestra las frecuencias, menores de 50 Hz, presentes en el espectro, frente al valor de la anisotropía, que es el parámetro de control (Bergé, 1992) del sistema dinámico, ya que determina la calidad del movimiento. La figura muestra claramente la aparición de frecuencias conforme el valor de K va incrementándose.

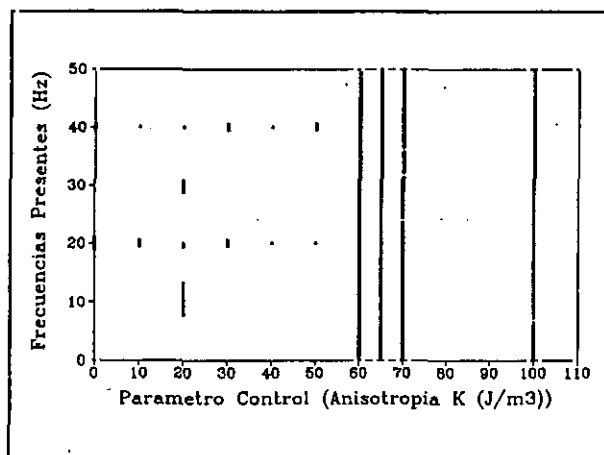


Figura 10 -. Frecuencias de oscilación, menores de 50 Hz, en función del valor de la anisotropía K.

Hasta ahora se ha puesto de manifiesto la complejidad del movimiento de la imanación en el sistema magnético estudiado. Para atribuirle el calificativo de *caótico* es preciso un análisis desde el punto de vista de la *Teoría del Caos*.

Análisis del Caos

La complejidad encontrada en la dinámica de multitud de sistemas deterministas ha propiciado la aparición de la Teoría del Caos en sistemas deterministas (Gleick, 1988). En primer lugar hay que destacar que *caos*, en sentido técnico, no es sinónimo de desorden. Existe un orden, pero distinto al encontrado habitualmente en sistemas clásicos. Si éstos se definen por magnitudes como energía, posición y momento, aquellos lo hacen por conceptos como *atractor extraño*, *exponentes de Lyapunov*, *cuenas de atracción*, *bifurcaciones*, *estructura fractal*, etc.

Un sistema físico *aperiódico* puede ser caótico o aleatorio. El caos implica un espectro continuo de frecuencias además de cierto orden. En palabras de Edward Lorentz, pionero del caos, éste es *orden disfrazado de casualidad* (Lorentz, 1995). Existe un orden subyacente.

El sistema magnético estudiado ha perdido todo rastro de periodicidad, circunstancia revelada por el espectro continuo de frecuencias: *la oscilación puede producirse en cualquier frecuencia*. Pero, ¿existe orden? Se analiza la dinámica desde el punto de vista de la teoría del Caos, presentando algunas de sus características.

El análisis del caos pasa por el uso de varias técnicas: i) *Dependencia sensitiva de las condiciones iniciales*, ii) *Secciones de Poincaré*, iii) *Función de autocorrelación*, iv) *Correlación de valores en diferentes intervalos temporales: estructura fractal*.

Se aplica cada una de ellas a la *señal temporal* obtenida para el caso en que anisotropía $K = 100 \text{ Jm}^{-3}$. La **figura 11** muestra la señal $m_z(t)$ entre 0 y 0.3 segundos. Como puede constatarse, no se aprecia rastro alguno de periodicidad.

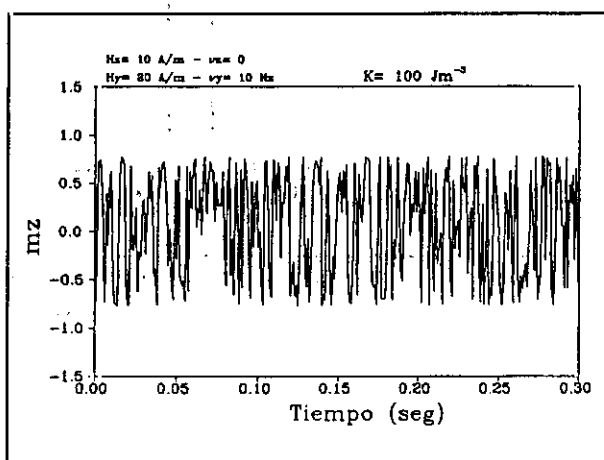


Figura 11 -. Variación temporal de m_z para $K = 100 \text{ Jm}^{-3}$.

Mediante las técnicas arriba indicadas puede inferirse el carácter aperiódico de la señal temporal, esto es, si es aleatoria o si posee algún orden intrínseco. El análisis de la señal temporal descansa en la relación que existe entre los valores de $m_z(t)$ diferentes instantes. Un comportamiento puramente aleatorio carecería de cualquier interrelación en la señal. Si $m_z(t)$ evoluciona de forma caótica, debe tener un *espectro continuo de frecuencias y poseer estructura fractal*. Ambas condiciones deben verificarse (Lorentz, 1995). El término *fractal* fué introducido por Benoit Mandelbrot y designa aquella figura geométrica que posee una *dimensión fraccionaria* y que se construye por la *aplicación de las mismas reglas de construcción en distintas escalas espaciales y temporales*. Se ha comprobado que los atractores extraños, indicadores del caos, son fractales.

A continuación se detalla cada técnica

A -. Dependencia sensitiva de condiciones iniciales

Se toman cuatro valores de $m_z(t)$ en el instante inicial $t=0$; se diferencian únicamente en la cuarta cifra decimal (ver figura 12): 0.69999999, 0.6999734, 0.6998934, y 0.6997601. Se calcula el valor de $m_z(t)$ en $t=3$ segundos. En el transcurso del tiempo, las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales se amplían. Es el llamado *efecto mariposa*: el sistema pierde todo recuerdo de su estado inicial, no es determinista en sentido estricto. El efecto mariposa es consecuencia de las características topológicas de los atractores extraños (Bergé, 1992), que pueden entenderse como el resultado de dilataciones y compresiones en el espacio de fases. Por ejemplo, si se somete a un rectángulo a sucesivos estiramientos y plegamientos sobre si mismo, dos puntos en el rectángulo que inicialmente estuviesen juntos se situarán muy alejados el uno del otro.

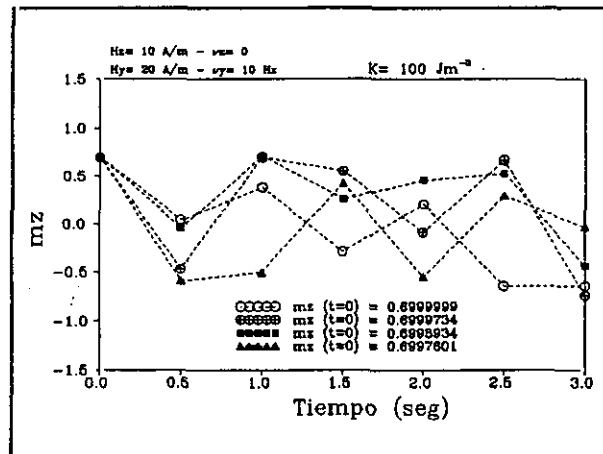


Figura 12 -. Dependencia sensitiva de las condiciones iniciales para $K=100 \text{ Jm}^3$.

B -. Sección de Poicaré

Esta técnica, desarrollada por Henri Poincaré para estudiar la dinámica planetaria, consiste básicamente en estudiar las proyecciones del espacio de fases sobre determinados planos, lo que reduce el número de dimensiones a considerar; por ejemplo, si el espacio de fases fuese tridimensional, la sección de Poincaré tendría dos dimensiones. Se obtendría la misma información topológica, pero el problema se simplifica.

En el caso de la señal temporal $m_z(t)$, se consideran aquellos valores que están separados por un mismo intervalo temporal T : se toman los puntos $m_z(0), m_z(T), m_z(2T), m_z(3T)$, ect. Idéntico proceso con $m_z'(t)$. Para una señal perfectamente periódica, (sinusoidal, por ejemplo) se obtendría siempre el mismo valor: la representación en el plano (m_z, m_z') ofrecería un *único punto*. La figura 13 muestra el resultado para el caso estudiado, considerando un intervalo de $T=0.1 \text{ seg}$. La sección de Poincaré obtenida recuerda al atractor extraño. Nótese que los puntos obtenidos guardan una cierta ordenación, no se distribuyen aleatoriamente.

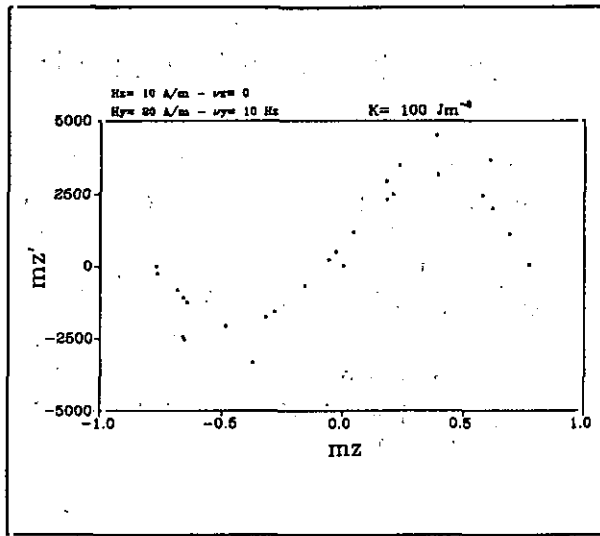


Figura 13 -. Sección de Poincaré para $K = 100 \text{ Jm}^{-4}$

C -. Función de autocorrelación

Se define la función de autocorrelación, $C(\tau)$, como el valor medio temporal de los productos $m_z(t) \cdot m_z(t+\tau)$, donde τ es un cierto intervalo temporal y t_1, t_2 los tiempos entre los que se realiza la observación de $m_z(t)$.

$$C(\tau) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} m_z(t) m_z(t+\tau) dt \quad (15)$$

Esta función informa sobre la relación que existe entre el valor de $m_z(t)$ en un instante determinado y un instante posterior. Si $C(\tau)$ toma valores nulos a partir de cierto T , se ha perdido toda relación con el comportamiento en instantes anteriores.

La función de autocorrelación es la transformada de Fourier del *espectro de potencia* de la señal (Bergé, 1992), siendo éste último el resultado de tomar el valor absoluto de la transformada de Fourier de la señal temporal. La función de autocorrelación informa acerca de la complejidad de la señal temporal.

Por ejemplo, la función de autocorrelación de una señal periódica ($\sin \omega t$) es periódica a su vez:

$$C(\tau) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t \sin \omega(t+\tau) dt \quad (16)$$

por lo que se anulará únicamente en algunos puntos.

La **figura 14** muestra la función de autocorrelación para la señal $m_z(t)$. Se anula para tiempos superiores a 0.08 segundos.

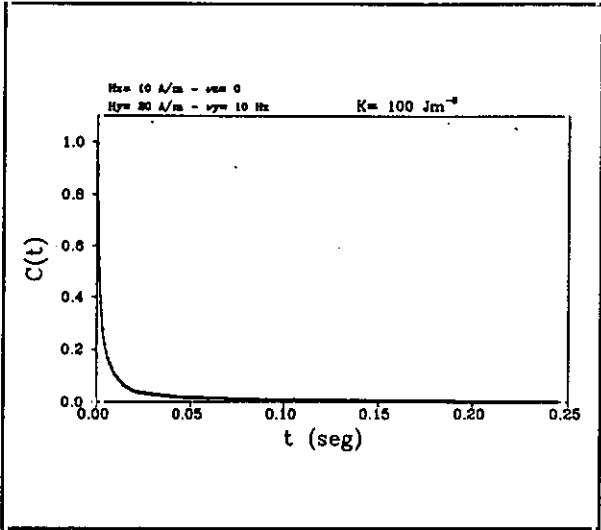


Figura 14 -. Función de autocorrelación de la señal temporal $m_z(t)$ correspondiente a $K= 100 \text{ Jm}^{-3}$.

D -. Correlación en diferentes intervalos temporales

Esta técnica (Abarbanel, 1993) consiste en obtener, a partir de la señal temporal $m_z(t)$, una serie de señales temporales desfasadas con ésta, de la forma $m_z(t+T)$. La composición de ambas informa sobre el grado de ordenación de la señal.

Por ejemplo, si hubiese una ausencia absoluta de orden, la composición de $m_z(t)$ con $m_z(t+T)$ ofrecería un conjunto aleatorio de puntos. Las **figuras 15a y 15b** ofrecen la composición de $m_z(t)$ con $m_z(t+T)$ y de $m_z(t)$ con $m_z(t+5T)$, respectivamente, para $T= 0.01$ segundos. Obsérvese que la estructura es similar: hay una acumulación de puntos en los vértices del cuadrado, independientemente del desfase. La señal parece ser *fractal*, es decir autosemejante a distintas escalas temporales.

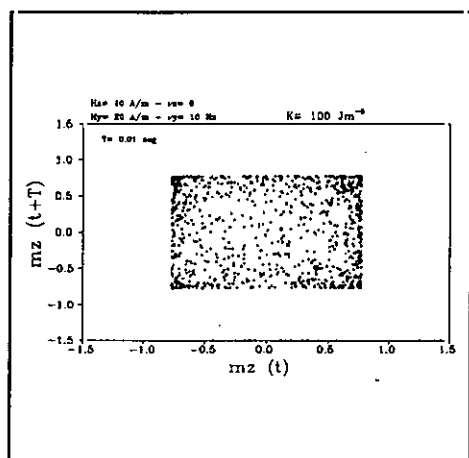


Figura 15a -. Representación de $m_z(t+T)$ frente a $m_z(t)$, con $T=0.01$ segundos, para $K=100 \text{ Jm}^{-3}$.

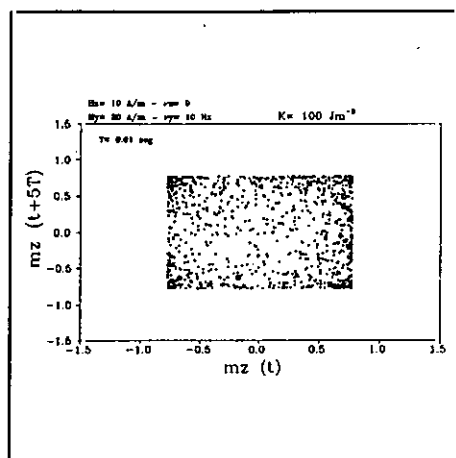


Figura 15b -. Representación de $m_z(t+5T)$ frente a $m_z(t)$, con $T=0.01$ segundos, para $K=100 \text{ Jm}^{-3}$.

Conclusiones

El análisis de la señal temporal $m_z(t)$, esto es, de la componente de la imanación en la dirección de la anisotropía, ofrece resultados que permiten atribuir el calificativo de caótico al movimiento de la imanación, ya que dispone de un *continuo* de frecuencias posibles de movimiento, *no existe correlación* entre las distintas posiciones de la imanación a partir del tiempo en que se anula la función de autocorrelación (la posición en un instante dado no influye en la ocupada en uno posterior), las señales temporales *desfasadas* se ajustan entre sí (existe orden) y está presente la *dependencia sensitiva de las condiciones iniciales*, reflejo de la topología característica de los atractores extraños (Crutchfield, 1987).

Se ha estudiado el movimiento de la imanación en un sistema magnético extremadamente sencillo: una anisotropía uniaxial K , un campo magnético constante H_z paralelo a ella y otro alterno H_y perpendicular a la misma. Para valores fijos de los campos, el aumento en la magnitud de K determina el comportamiento dinámico.

Para valores pequeños de K , el movimiento de la imanación, debido a la variación temporal de H_y , se restringe a las cercanías del campo H_z , esto es, no invierte su sentido. Valores suficientemente altos de K *hacen saltar la imanación entre los dos sentidos fáciles*, determinados por la anisotropía. Si ésta sigue aumentando, la transición entre los dos sentidos se realiza de forma caótica. Si K es muy grande, el efecto del campo variable H_y es despreciable y el movimiento cesa, situándose la imanación en la dirección indicada por la anisotropía y en el sentido marcado por el campo H_z .

En los hilos amorfos, el valores de las anisotropias no es homogéneo: existe una dependencia con la dirección radial (Velázquez, 1991). Dependiendo del valor concreto de K en cada punto del hilo, habrá zonas en las que la imanación se mueve periódicamente, otras en las que lo haga caóticamente y en algunas no se moverá.

El sistema magnético, muy simple, es estudiado con una ecuación fenomenológica muy sencilla, que está lejos de describir la dinámica real del sistema, pero es capaz de generar la complejidad suficiente como para esperar un *comportamiento complejo* tanto en la señal magnética registrada experimentalmente como en el movimiento mecánico del péndulo.

ANALISIS DE RESULTADOS EXPERIMENTALES

Una vez conocidos los elementos esenciales de la teoría del caos, vamos a tratar de analizar los resultados experimentales obtenidos desde su punto de vista. Vamos a usar las series temporales mostradas en las figuras 10a-10l del apartado del estudio experimental del efecto Wiedemann, y que representan la variación temporal de la componente axial de la imanación, inducida por la circulación de la corriente, de intensidad I , a través del hilo. Cada serie temporal ha sido obtenida aplicando un campo axial diferente. Se analizarán los espectros de frecuencias de cada una de ellas.

Para una de esas series temporales, de apariencia menos regular, se calculará la función de correlación, se reconstruirá el atractor y se calculará la dimensión fractal.

Espectros de frecuencia

Las series temporales mencionadas anteriormente fueron obtenidas aplicando una corriente sinusoidal de 80.2 Hz de frecuencia y 48.7 mA de intensidad (valor eficaz). Las figuras 28, 29, 30 y 31 (retomamos la numeración de las gráficas de la sección anterior al estudio del caos) muestran los espectros de frecuencia obtenidos para distintos valores el campo axial continuo H_z . Se miden las frecuencias situadas entre 0 y 8 KHz.

Cuando el campo magnético axial es nulo, el espectro consiste en un conjunto de picos espaciados entre si y unidos por una banda (figura 28a). Los picos son más altos a frecuencias bajas, menores de 2 KHz. Para frecuencias mayores de 4 KHz, los picos son prácticamente nulos.

Conforme se aumenta el campo H_z a 4.32 A/m y 12.50 A/m (figuras 28b y 28c) se observa una progresiva disminución de los picos de frecuencias más altos (situados en frecuencias bajas) y un aumento de los picos más bajos (situados en las frecuencias más altas).

Para $H_z = 22.73$ A/m (figura 29a) se tiene un espectro consistente en un conjunto de picos de casi la misma altura, hasta frecuencias del orden de 4 KHz, disminuyendo progresivamente para frecuencias superiores. La serie temporal correspondiente a este campo (figura 10d del estudio del efecto Wiedemann) es la que se parece más a la que se obtendría al hacer un ciclo Wiedemann inverso manteniendo el hilo fijo por sus extremos

Si se aumenta el campo hasta $H_z = 42.05$ A/m, el espectro tiene el mismo aspecto general (figura 29b), pero cambia la altura relativa de los picos con respecto al caso anterior reflejado en la figura 29a.

Un aumento del campo H_z hasta el valor 51.59 A/m (figura 29c) provoca el aumento de los picos de frecuencias menores de 2 KHz. El conjunto de frecuencias, en este rango, se hace *más denso*, poniendo de manifiesto la aparición de más frecuencias.

El aumento del campo H_z hasta 120.69 A/m (figuras 30a, 30b y 30c) propicia la progresiva disminución y desaparición de los picos correspondientes a frecuencias altas y un aumento de los picos situados en frecuencias bajas.

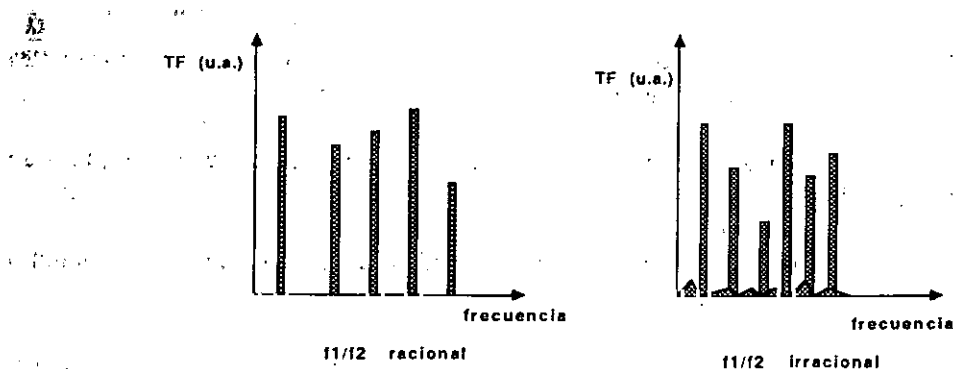
Cuando el campo axial alcanza valores de 156.15 A/m, 163.43 A/m y 175.93 A/m (figuras

31a, 31b y 31c) se aprecia un comportamiento cualitativamente diferente al constatado para campos más bajos: desaparecen prácticamente los picos de frecuencias altas y los correspondientes a frecuencias bajas están superpuestos a un fondo continuo, que es tanto mayor cuanto menor es la frecuencia. Estos tres espectros corresponden a las series temporales mostradas en las figuras 10j, 10k y 10l del apartado correspondiente al estudio experimental del efecto Wiedemann; estas series temporales tienen la apariencia más irregular.

La irregularidad de las series temporales está asociada a la presencia de un fondo continuo, mientras que en las que se aprecia una regularidad (o periodicidad) este fondo no existe y los picos de frecuencia se asientan perfectamente sobre el eje de abscisas. La presencia del fondo anuncia la concurrencia de un posible comportamiento caótico. Si se compara el tipo de espectro encontrado con el obtenido para la función $x(t)$ del sistema de ecuaciones de Lorentz (ver figura 4a del apartado dedicado al análisis del caos) se encuentra un comportamiento similar.

Interpretación de resultados

En el apartado dedicado al análisis del caos se analizaron los tipos de señales temporales que se pueden obtener de un sistema dinámico. Una de estas señales son las llamadas *cuasiperiódicas*, que se caracterizan por que su espectro de frecuencias está formado por picos que ocupan posiciones dadas por *combinaciones lineales de unas frecuencias principales*; estas combinaciones son del tipo $m_1 f_1 + m_2 f_2$, siendo m_1 y m_2 números enteros positivos y donde f_1 y f_2 son las frecuencias principales. Si el cociente f_1/f_2 es irracional, los picos están conectados mediante una pequeña banda, y si es racional los picos están perfectamente separados unos de otros. No hay que confundir esta banda con el fondo continuo encontrado en las figuras 31. En el caso de la cuasiperiodicidad, si el cociente es racional, entre cada pico de frecuencia no hay ningún otro pico, mientras que si es irracional, entre cada par de picos de altura importante, hay otros picos de menor altura.



En el caso de una señal aperiódica, los picos de frecuencias están superpuestos a una banda continua.

Los resultados obtenidos en las figuras 28, 29, 30 y 31 pueden interpretarse desde el punto de vista de una *transición al caos desde un comportamiento cuasiperiódico*.

Se ha analizado el espectro que aparece en la figura 29a, correspondiente a la aplicación de un campo axial $H_z = 22.73$ A/m, considerando relaciones del tipo $[m \cdot f_1 + n \cdot f_2] \cdot p = q \cdot f_3$. Se toman unas frecuencias principales, f_1 y f_2 y variando los parámetros m, n, p y q se busca si existe alguna frecuencia que cumpla la relación f_3 .

Se han encontrado frecuencias que verifican la relación anterior (y cuyo valor de pico es del orden del de las frecuencias principales consideradas) para prácticamente todos los valores de p , q , m y n considerados (variando éstos entre 1 y 10). Como frecuencias principales se han considerado aquellas que presentan los picos más altos en el espectro (al tener los picos más altos, son las que tienen más importancia en la oscilación).

Se ha intentado ajustar la señal desde el punto de vista de la presencia de *bifurcaciones* de una frecuencia dada. Los resultados no se ajustan a la relación $f=f_1/p$, donde f_1 sería la frecuencia que se bifurca y p un número entero positivo par: si $p=2,4,6,\dots$, aparecerían señales que duplican sucesivamente el período de la señal de frecuencia f_1 .

En el espectro estudiado, podría pensarse que los picos observados se deben fundamentalmente a armónicos de la frecuencia excitadora. Evidentemente existen estos armónicos, cuya altura de pico decrece al aumentar la frecuencia en la que están situados. Junto a ellos, existen otros picos de altura superior.

La señal cuyo espectro se muestra en la figura 29a parece ser, por consiguiente, *cuasiperiódica*. ¿De dónde vienen las frecuencias principales?. Si consideramos el modelo de hilo amorfo, constituido por dos zonas, el núcleo y la corteza, donde la imanación está dirigida según las direcciones axial y radial respectivamente, y que responden de forma distinta a los campos excitadores, *propiciando la existencia de dos frecuencias de resonancia distintas*, podemos atribuir las frecuencias principales a aquellas relacionadas con la respuesta del núcleo y de la corteza. Cuando se aplica la corriente excitadora de 80.2 Hz, cada parte del hilo tenderá a responder en esa misma frecuencia; sobrepuesta a esa oscilación forzada aparecerá aquella propia de cada parte del hilo. Todas las frecuencias que aparecen en la señal temporal, devienen de la combinación línea de éstas. Ello explicaría la concurrencia de frecuencias mucho más altas (del orden de KHz) que la de excitación y las propias de oscilación del péndulo, y cuya importancia (altura de picos) depende de la magnitud del campo axial continuo H_z .

Los espectros mostrados en la figura 31 muestran características caóticas: la banda continua propicia la presencia de frecuencias cuyo valor de pico es importante, para toda frecuencia comprendida entre 0 y 2 KHz. La evolución temporal aún *no es totalmente caótica*, ya que para ello, no debería haber picos superpuestos al fondo continuo. La presencia de éstos involucra la existencia de cierto grado de periodicidad.

A modo de conclusión se puede decir que las series temporales obtenidas recogiendo el voltaje inducido en la bobina situada en la parte media del hilo son cuasiperiódicas. Aumentando el campo axial, que es el *parámetro de control*, se induce una *transición hacia un comportamiento casi caótico* (sería caos total cuando todas los picos del espectro tuviesen la misma altura, lo cual indicaría que no hay frecuencias dominantes; en los espectros medidos, aún hay frecuencias dominantes).

Función de correlación

La función de correlación se define como la transformada de Fourier del espectro de potencia de la señal temporal estudiada. Su forma es:

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) V(t+\tau) dt \quad (1)$$

donde T es el tiempo de observación de la señal temporal y $V(t)$ el voltaje obtenido en el instante t .

La señal temporal es tanto más caótica cuanto antes se haga nula la función de correlación. Ello indica que las señales desfasadas un cierto tiempo, el de anulación de la función de correlación, no se parecen la una a la otra; han perdido su similitud.

Se ha calculado la función de correlación para la señal temporal correspondiente al campo axial $H_z = 163.43$ A/m (figura 32a). En este caso $T = 0.1$ segundos. La figura 32b muestra la función de correlación obtenida. Como se aprecia, cae rápidamente desde su valor inicial 1 (está normalizada al valor en $\tau=0$) y toma valores próximos a cero, pero no totalmente nulos. Esto confirma la presencia de cierta periodicidad, o similitud de la señal consigo misma, para desfases τ pequeños. Al aumentar τ la función $C(\tau)$ va tomando valores cada vez más próximos a cero.

Reconstrucción del atractor

Usando la técnica descrita en un apartado anterior, vamos a reconstruir el atractor a partir de la señal temporal que aparece en la figura 32a.

Esta técnica consiste en representar la señal temporal frente a ella misma desfasada en ciertos intervalos temporales. Para poder comparar, se ha hecho este tipo de representación para una señal periódica: una señal sinusoidal de frecuencia 80.2 Hz. El intervalo de desfase se ha tomado como $\tau = 0.000075$ segundos. La figura 33 muestra el resultado. Se aprecian formas perfectamente definidas y trayectorias claras.

Para reconstruir el atractor no basta con representar la señal temporal frente a su derivada, pero este tipo de gráficas, arroja información sobre las características topológicas del atractor.

La figura 34a muestra la representación de la señal temporal obtenida para el campo axial $H_z = 22.73$ A/m (figura 10d del apartado sobre medidas experimentales del efecto Wiedemann). La figura 34 a consta de 4000 puntos, y muestra dos bucles unidos entre sí, teniendo una estructura compleja el punto de unión. Hay que recordar que esta señal temporal era cuasiperiódica. Ello se refleja en la ordenación tienen los 4000 puntos representados.

La figura 34b muestra el mismo tipo de representación para la señal temporal que aparece en la figura 32a, cuyo espectro de frecuencias incorporaba un fondo continuo, y al que hemos atribuido un carácter casi caótico. Se observa una estructura más compleja que en el caso anterior. Existe una zona central de gran tamaño en la que los puntos se acumulan. Se constata también la presencia de algo parecido a bucles, rastro de la regularidad que aún mantiene la señal temporal.

Las figuras 35 y 36 muestran varias perspectivas el atractor reconstruido, usando distintos tiempos de desfase: $T = 1/12\nu$ (figura 35) y $T = 1/6\nu$ (figura 36), siendo $\nu = 80.2$ Hz.

Cada una de las figuras que aparecen en las gráficas hay que considerarlas como la proyección

del atractor en distintos planos: se muestra éste desde distintas perspectivas.

Para reconstruir el atractor no se ha usado el intervalo de tiempo adecuado (el que viene dado por el doble del producto del tiempo en el cual se anula la función de correlación y la dimensión envolvente del atractor), ya que no existe, en la literatura revisada, un método sencillo y unívoco para calcular la dimensión envolvente, por lo que para hallar ésta habría que proceder de forma tentativa. A efectos de mostrar lo extraño del atractor, se ha preferido mostrar éste en distintas proyecciones, aunque no sean las adecuadas.

Se aprecia una zona central, en donde se acumulan los puntos bucles alrededor: caos son algunos características de regularidad (los bucles anuncian la presencia de regularidad: el punto representativo del estado dinámico pasa por el mismo camino varias veces).

Cálculo de la dimensión fractal

La señal temporal que aparece en la figura 32a parece tener cierto grado de caoticidad en su comportamiento: espectro de frecuencias con componente continua y un atractor extraño. Para finalizar, se ha calculado, de forma aproximada, la dimensión fractal para la citada serie temporal.

La dimensión fractal se ha calculado siguiendo el método descrito en el apartado dedicado al análisis del caos. Dada la complicación de manipular la serie temporal entera (4000 puntos), se ha restringido ésta al tiempo comprendido entre 0.03 segundos y 0.05 segundos. Se han calculado cuatro puntos, que se ajustan más o menos a una recta (cuando más fractal sea la estructura mejor ajuste se encuentra). La figura 37a muestra la señal temporal y la figura 37b, el resultado del cálculo de la dimensión fractal. Se encuentra para ésta un valor $D=1.624$

Conclusiones

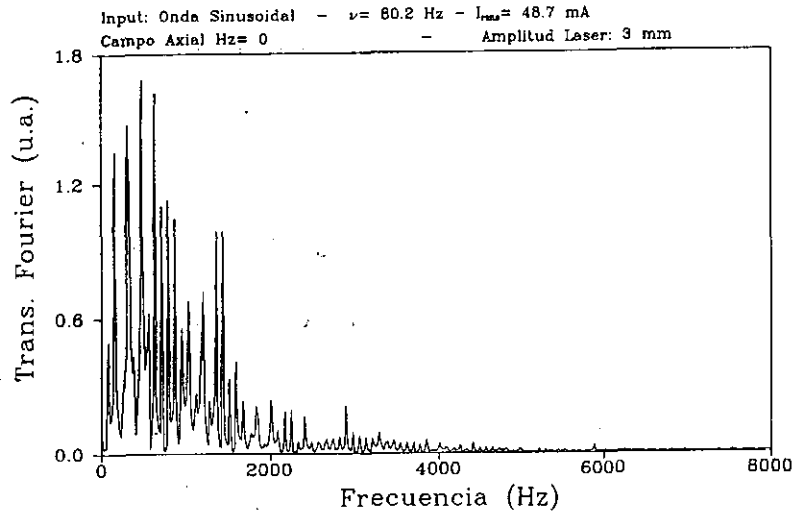
Se ha medido la variación temporal de la componente axial de la imanación de un hilo amorfo rico en hierro, de magnetostricción positiva, que forma parte de un péndulo de torsión. El movimiento es inducido por el flujo de una corriente eléctrica a través del hilo, y depende del valor de un campo magnético axial continuo que se aplica al hilo.

Las señales temporales obtenidas exhiben espectros de frecuencias complejos, pudiéndose caracterizar como señales cuasiperiódicas que transitan hacia el caos para valores suficientemente altos del campo magnético axial, pero conservando rastros de regularidad.

El atractor que muestran las señales con componente caótica pueden asimilarse a *toros que empiezan a romperse para constituir un atractor extraño*. La señal temporal estudiada muestra características fractales.

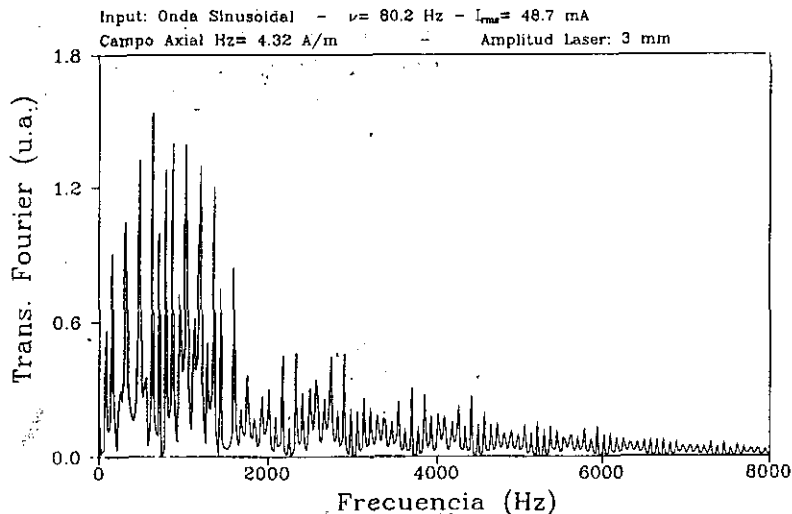
Figura 28 -. Espectros de frecuencia para varios campos axiales y corriente fija, de valor $I = 48.7 \text{ mA (r.m.s)}$ y frecuencia $\nu = 80.2 \text{ Hz}$: a) $H_z = 0$, b) $H_z = 4.32 \text{ A/m}$, c) $H_z = 12.50 \text{ A/m}$

Pendolo de Torsion



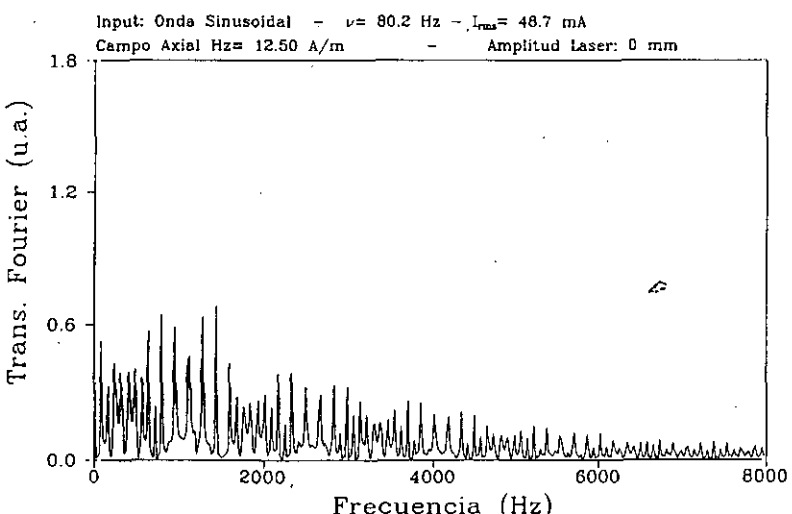
a)

Pendolo de Torsion



b)

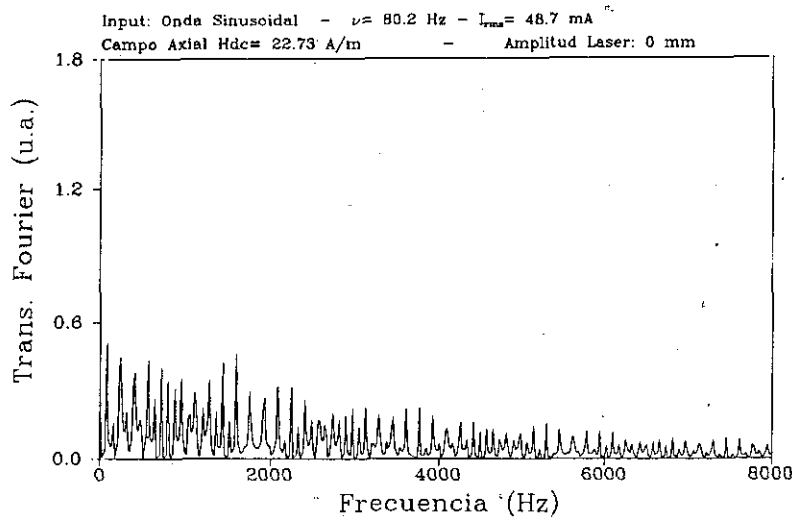
Pendolo de Torsion



c)

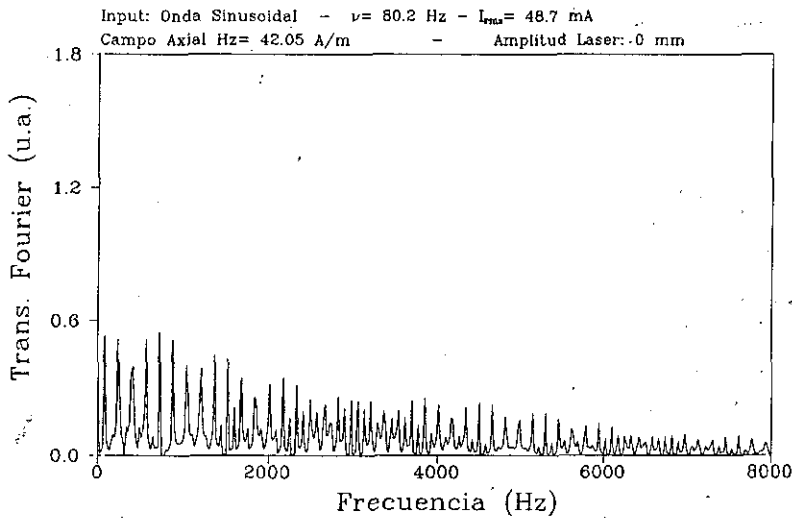
Figura 29 -. Espectros de frecuencia para varios campos axiales y corriente fija, de valor $I = 48.7 \text{ mA (r.m.s)}$ y frecuencia $\nu = 80.2 \text{ Hz}$.: a) $H_z = 22.73 \text{ A/m}$, b) $H_z = 42.05 \text{ A/m}$, c) $H_z = 51.59 \text{ A/m}$

Pendolo de Torsion



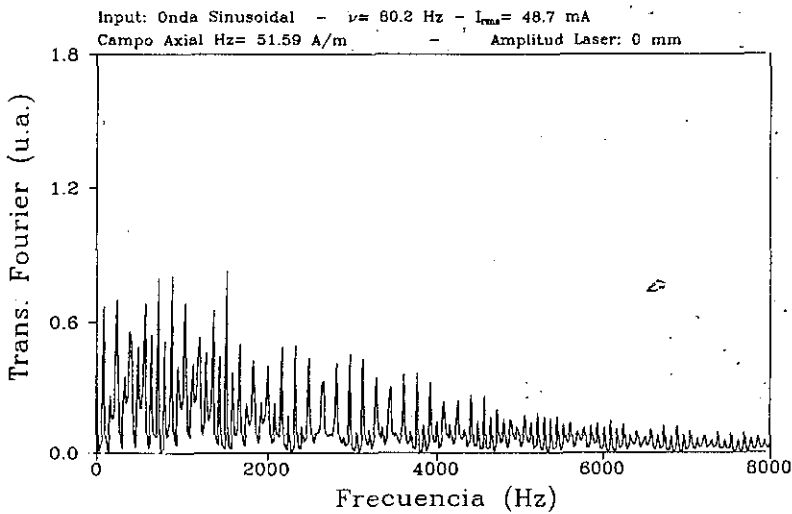
a)

Pendolo de Torsion



b)

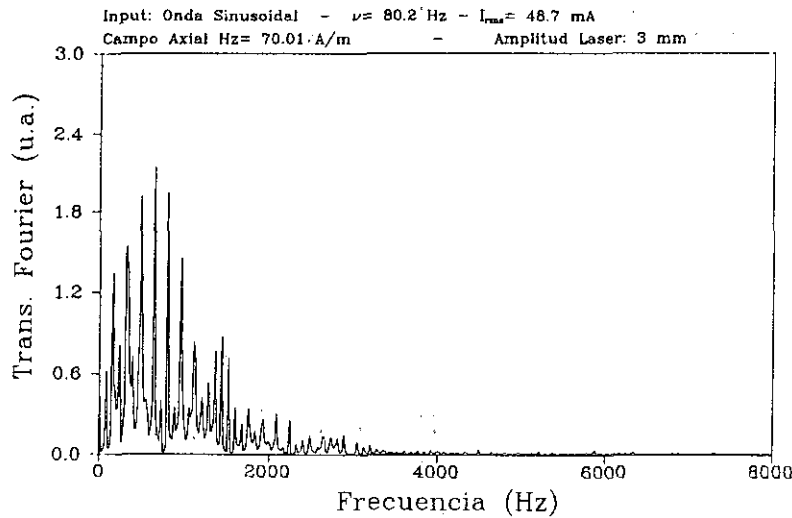
Pendolo de Torsion



c)

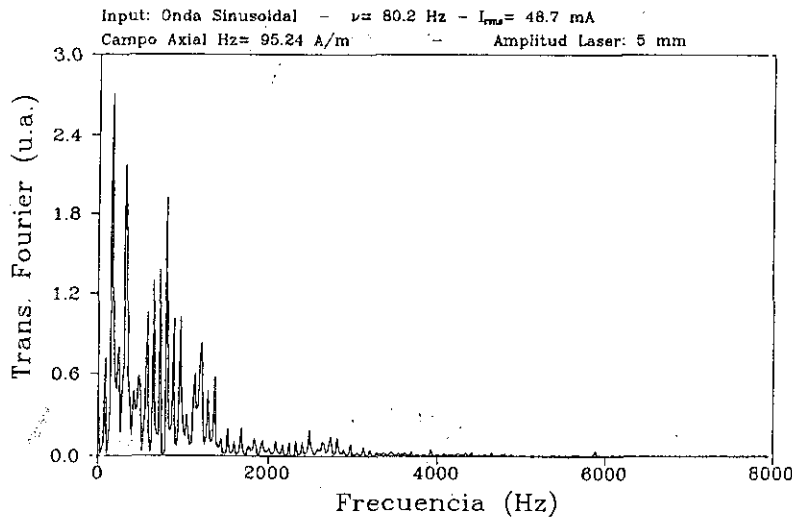
Figura 30 -. Espectros de frecuencia para varios campos axiales y corriente fija, de valor $I = 48.7 \text{ mA (r.m.s)}$ y frecuencia $\nu = 80.2 \text{ Hz}$.: a) $H_z = 70.01 \text{ A/m}$, b) $H_z = 95.24 \text{ A/m}$, c) $H_z = 120.69 \text{ A/m}$

Pendulo de Torsion



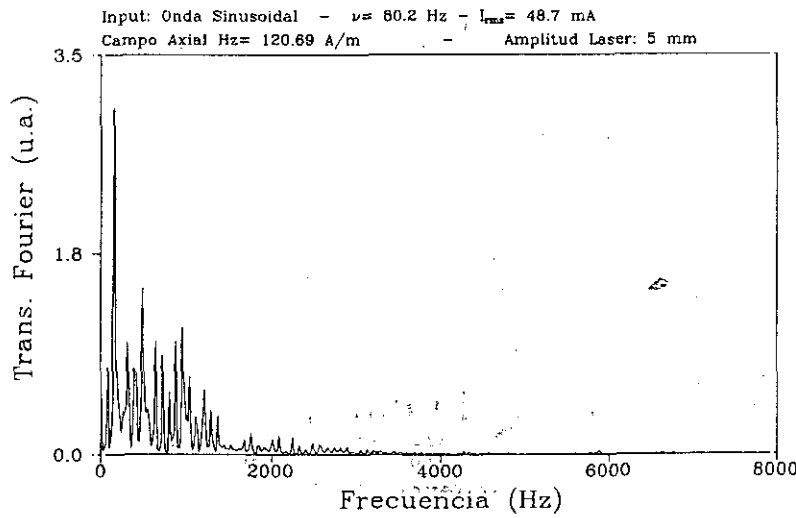
a)

Pendulo de Torsion



b)

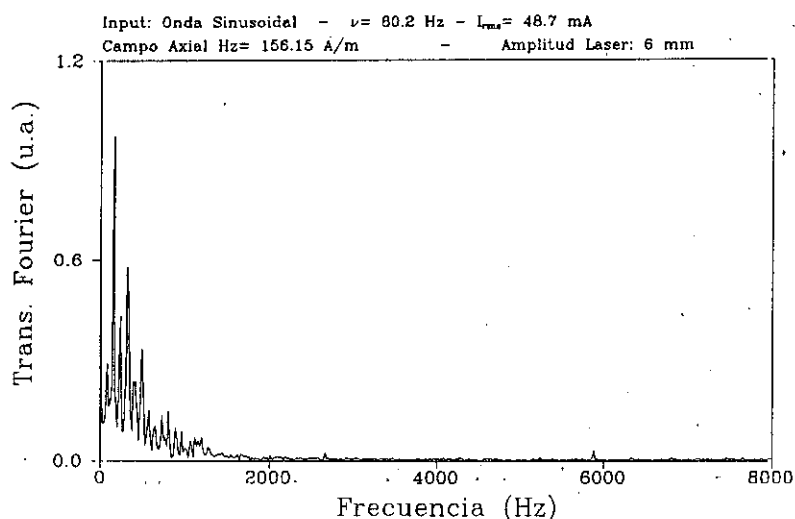
Pendulo de Torsion



c)

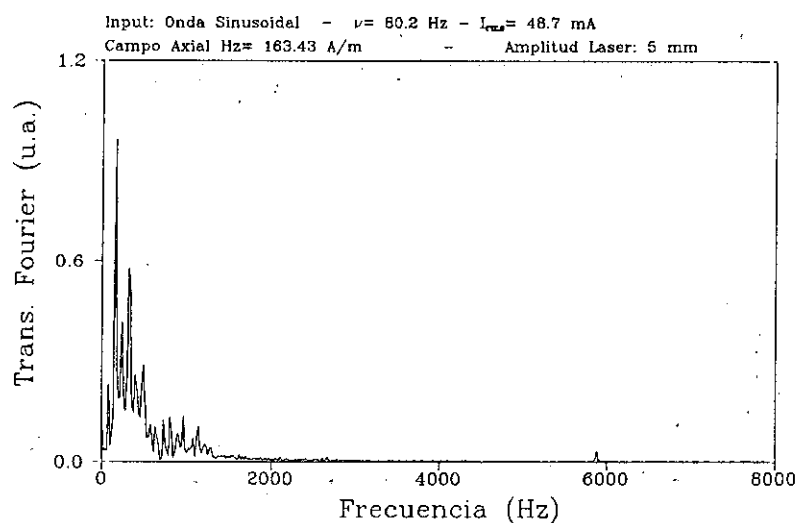
Figura 31 - . Espectros de frecuencia para varios campos axiales y corriente fija, de valor $I = 48.7$ mA (r.m.s) y frecuencia $\nu = 80.2$ Hz.: a) $H_z = 156.15$ A/m, b) $H_z = 163.43$ A/m, c) $H_z = 175.93$ A/m

Pendolo de Torsion



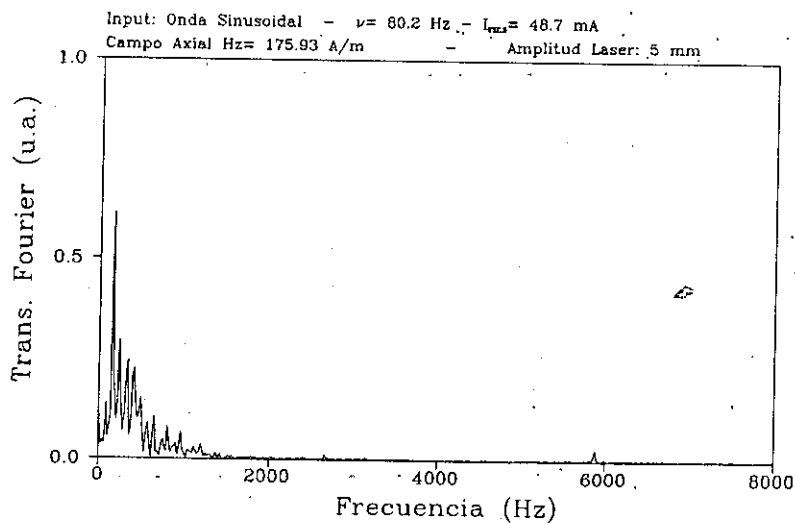
a)

Pendolo de Torsion



b)

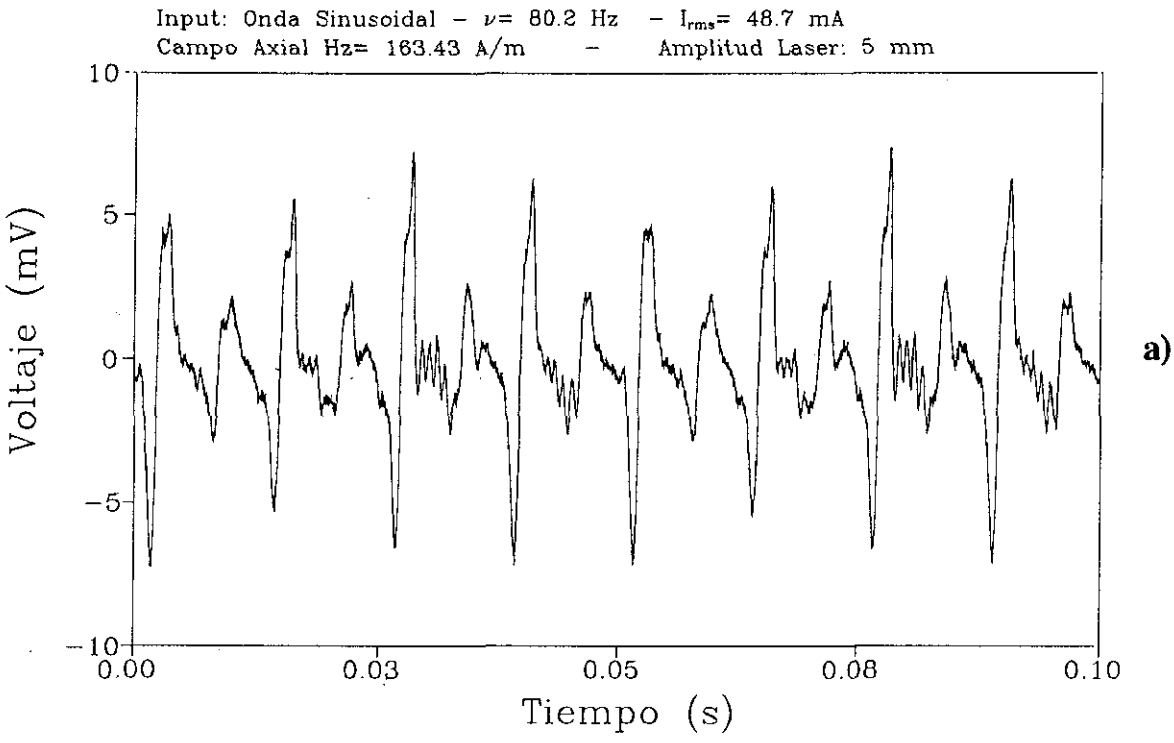
Pendolo de Torsion



c)

Figura 32 -. a) Señal temporal para $H_z = 163.43$ A/m, b) Función de correlación para la señal de $H_z = 163.43$ A/m

PENDULO



PENDULO - CORRELACION

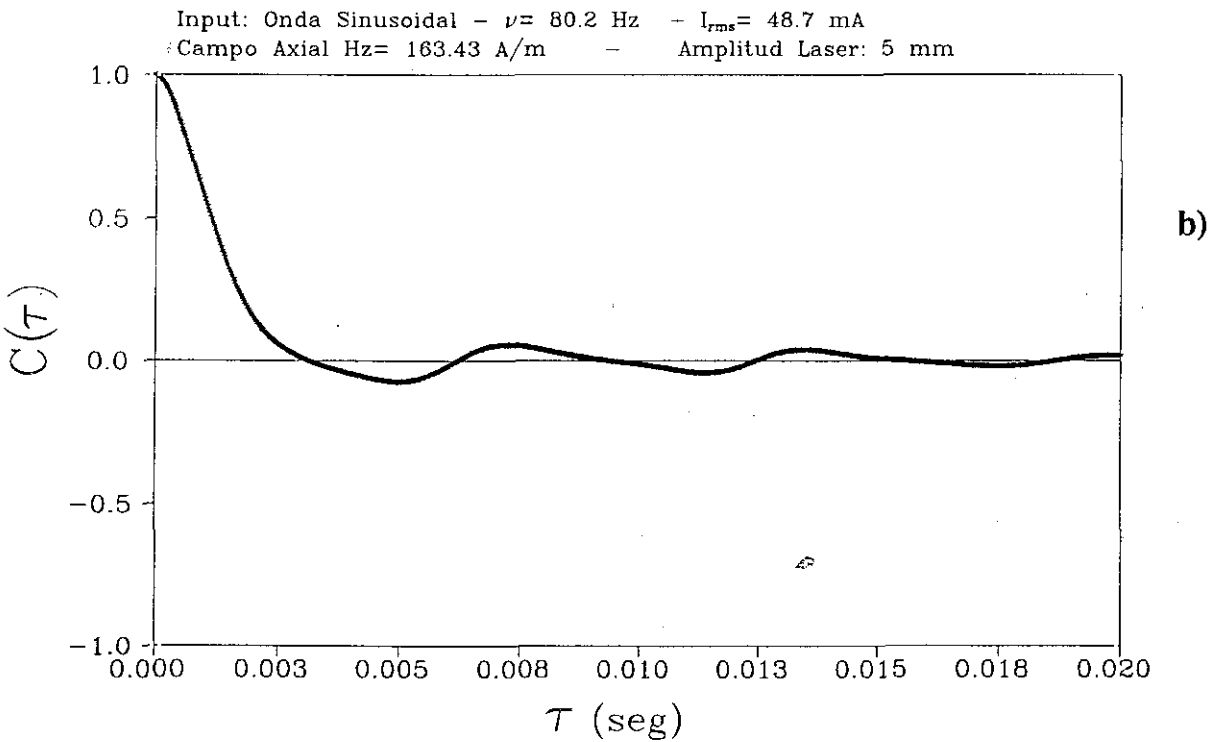


Figura 33 -. Representación de una señal temporal sinusoidal, $x(t)$, de frecuencia $\nu = 80.2 \text{ Hz}$, frente a ella misma desfasada un cierto intervalo temporal.:
a) $x(t+2T)$ frente a $x(t)$, b) $x(t+2T)$ frente a $x(t+T)$, siendo $T = 0.000075 \text{ seg}$.

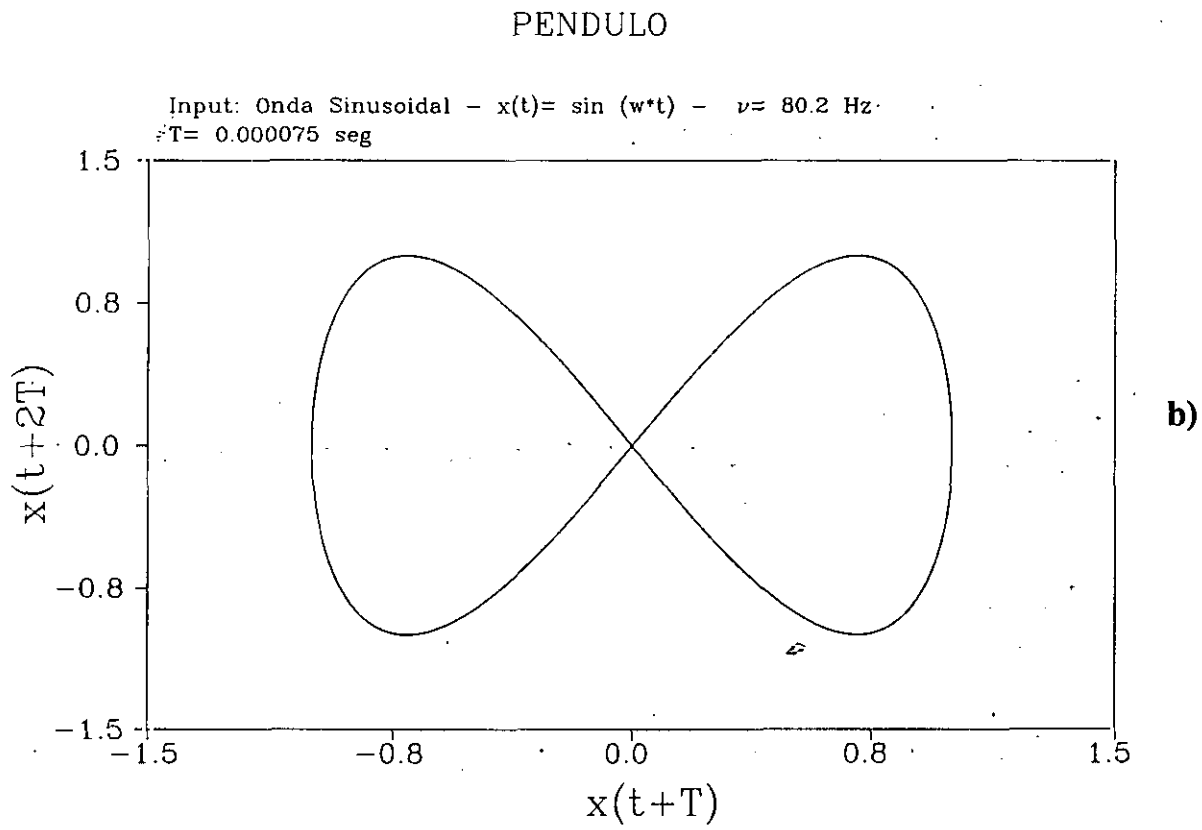
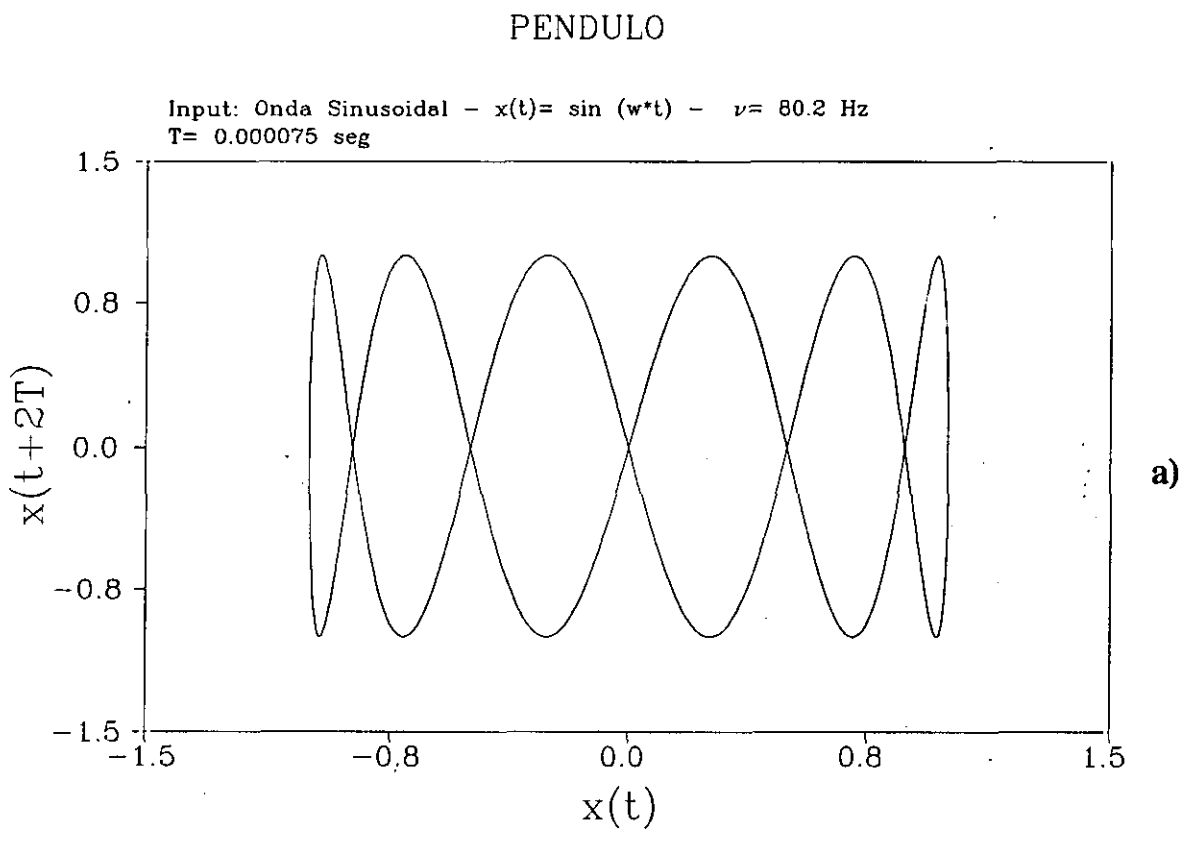
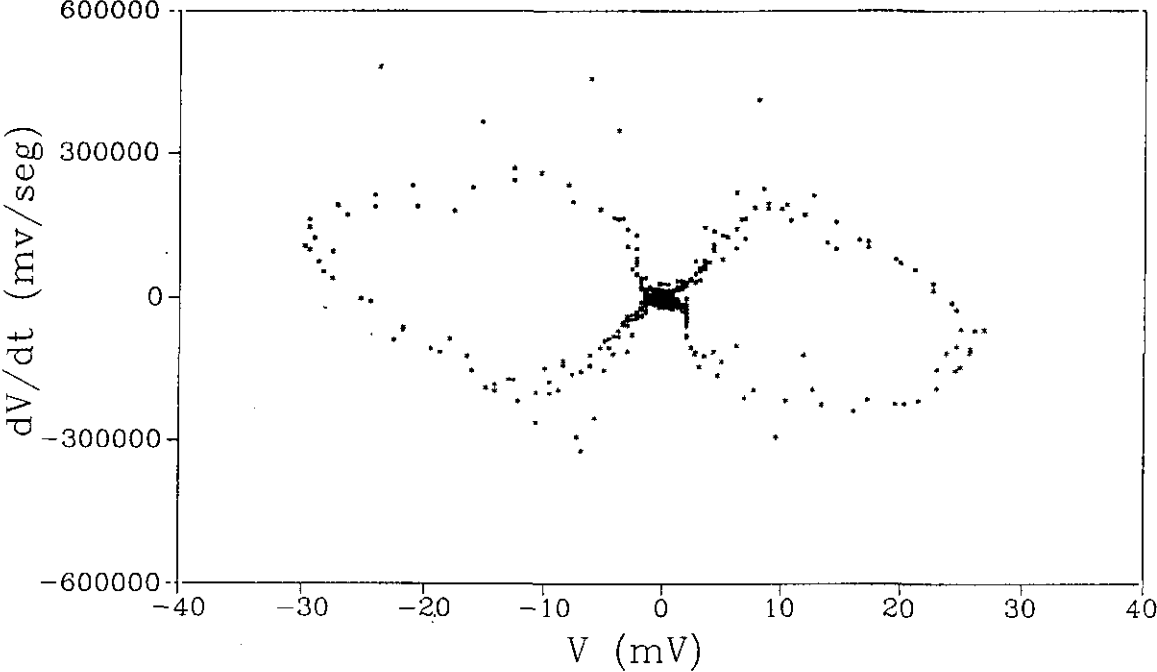


Figura 34 -. Representación de la derivada de la señal temporal frente a la señal temporal, para campos axiales: a) $H_z = 22.73 \text{ A/m}$, b) $H_z = 163.43 \text{ A/m}$.

PENDULO

Input: Onda Sinusoidal - $\nu = 80.2 \text{ Hz}$ - $I_{rms} = 48.7 \text{ mA}$
Campo Axial Hdc= 22.73 A/m - Amplitud Laser: 0 mm



PENDULO

Input: Onda Sinusoidal - $\nu = 80.2 \text{ Hz}$ - $I_{rms} = 48.7 \text{ mA}$
Campo Axial Hdc= 163.43 A/m - Amplitud Laser: 5 mm

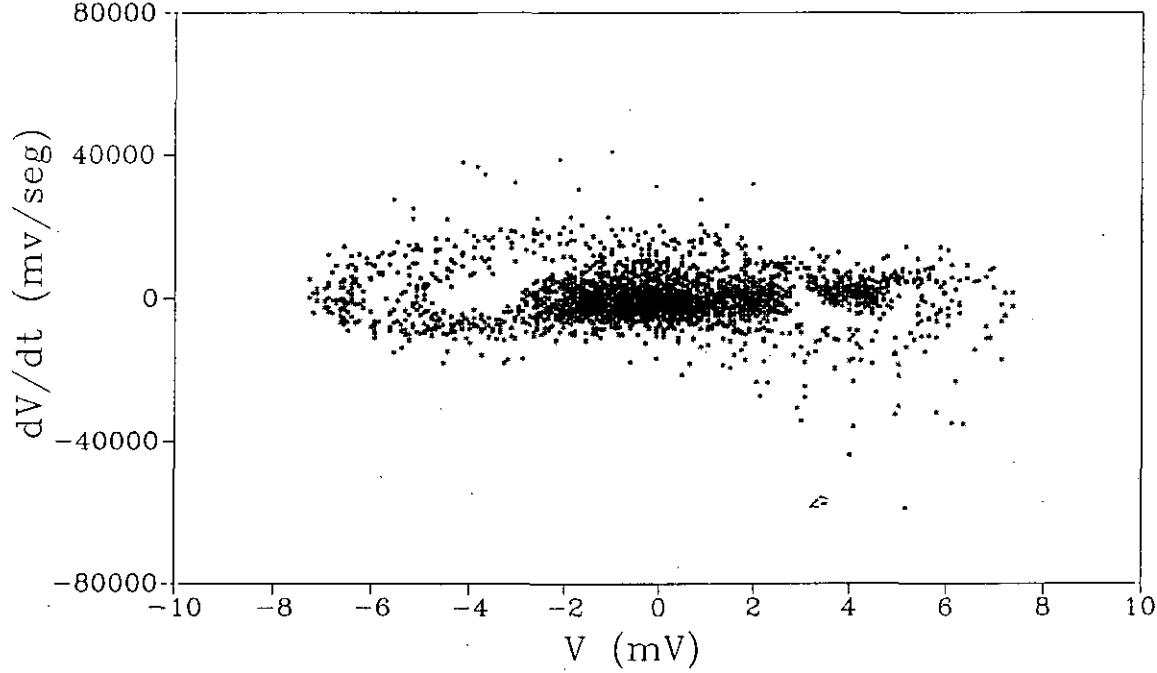
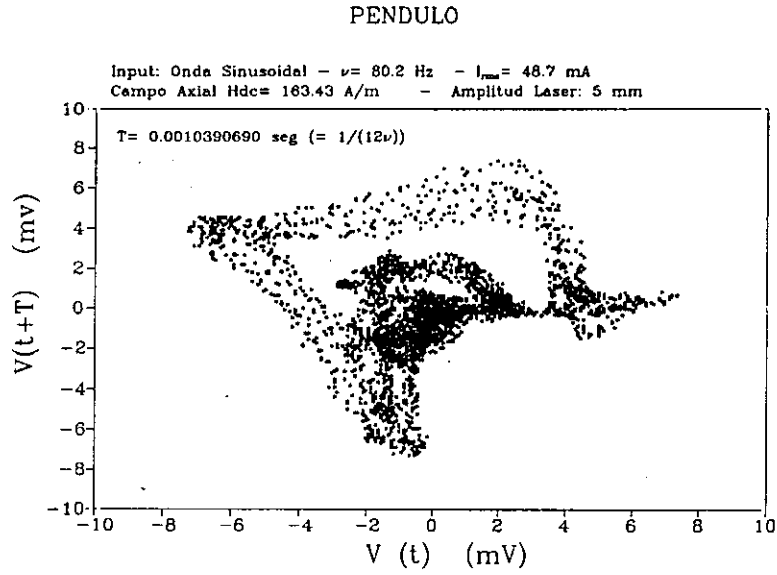
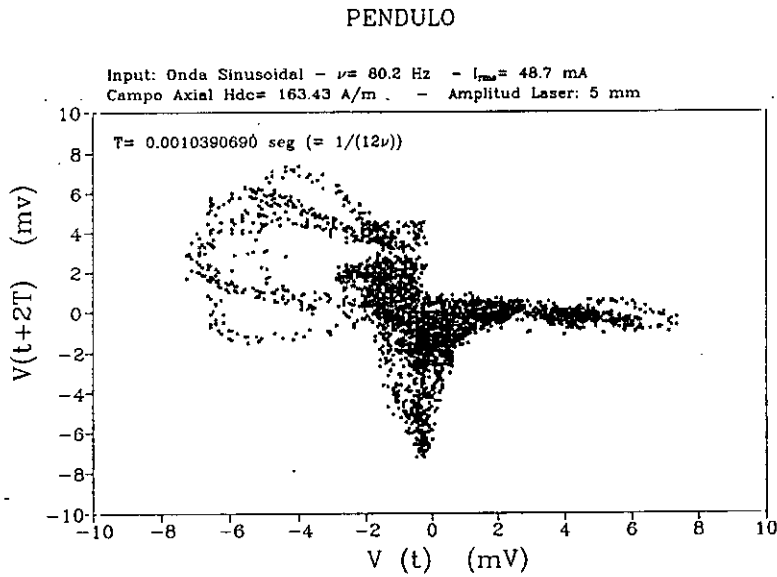


Figura 35 -. Reconstrucción del atractor para el desfase $T=1/12\nu$, siendo $\nu= 80.2$ Hz:

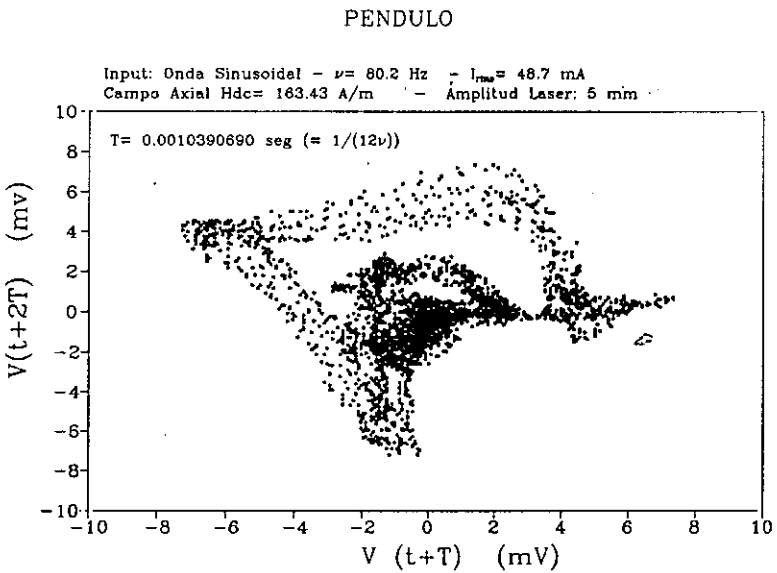
- a) Representación del voltaje $V(t+T)$ frente a $V(t)$, b) $V(t+2T)$ frente a $V(t)$, c) $V(t+2T)$ frente a $V(t+T)$**



a)



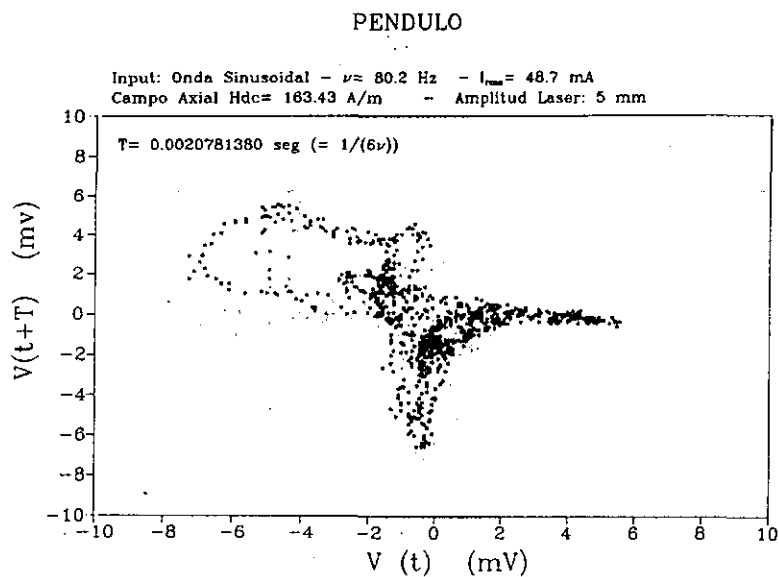
b)



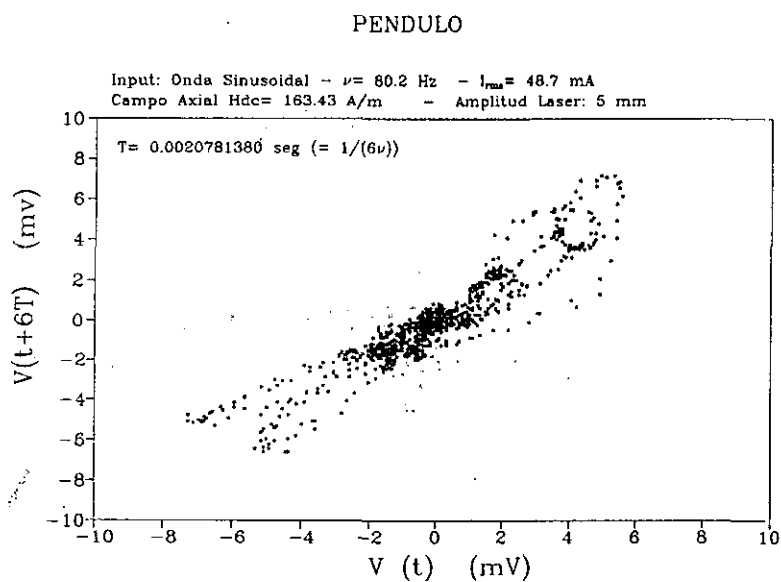
c)

Figura 36.-. Reconstrucción del atractor para el desfase $T=1/6\nu$, siendo $\nu=80.2$ Hz:

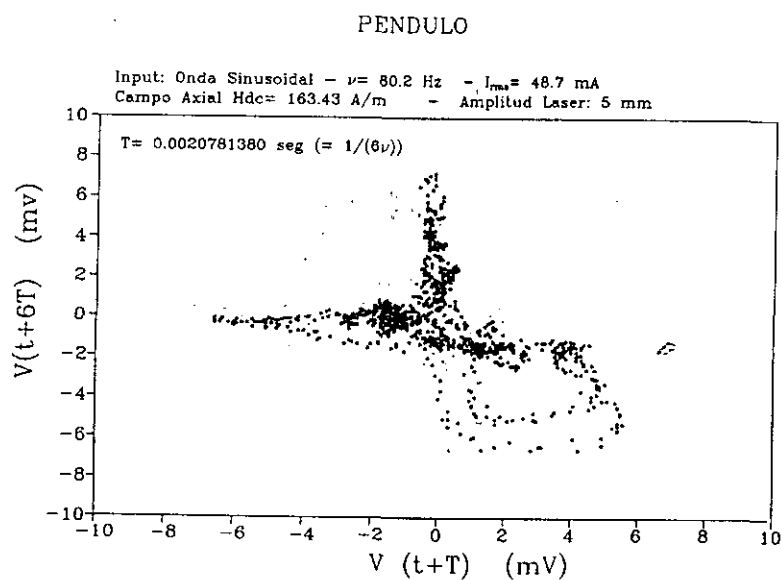
- a) Representación del voltaje $V(t)$ frente a $V(t+T)$, b) $V(t+6T)$ frente a $V(t)$, c) $V(t+6T)$ frente a $V(t+T)$**



a)

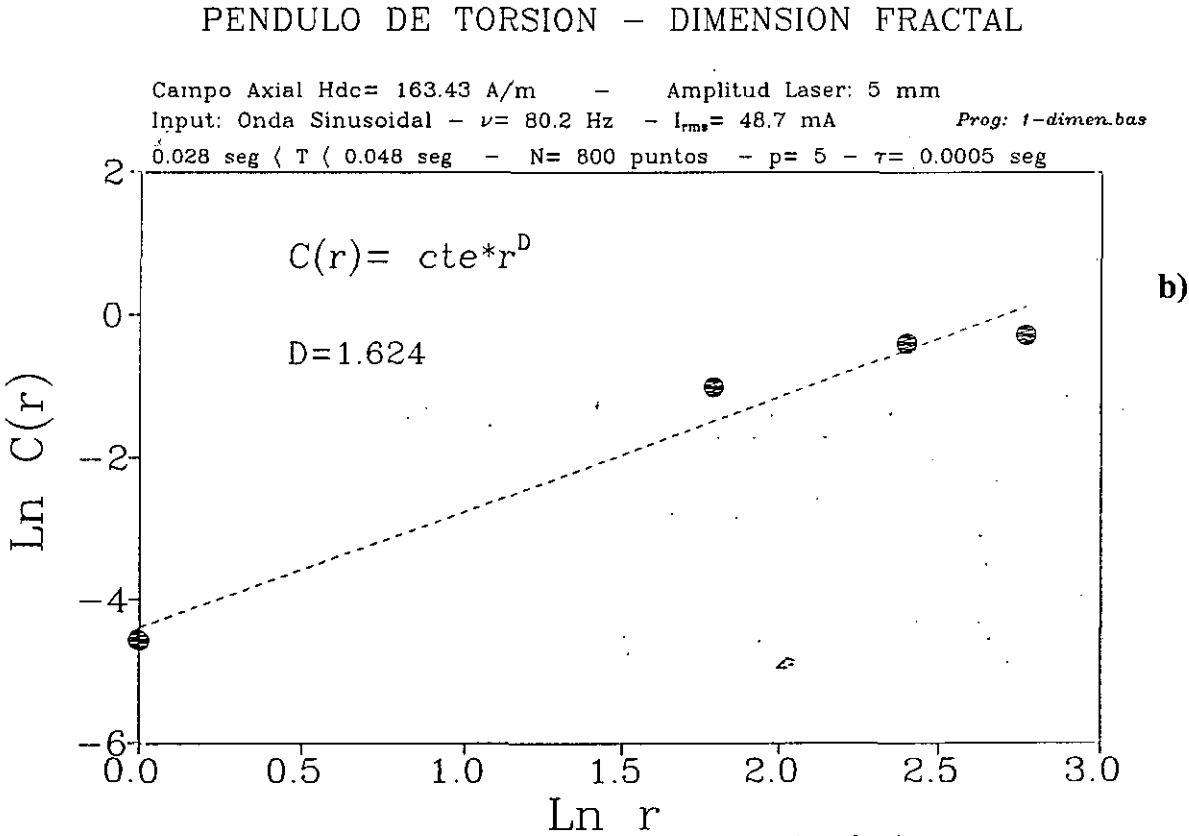
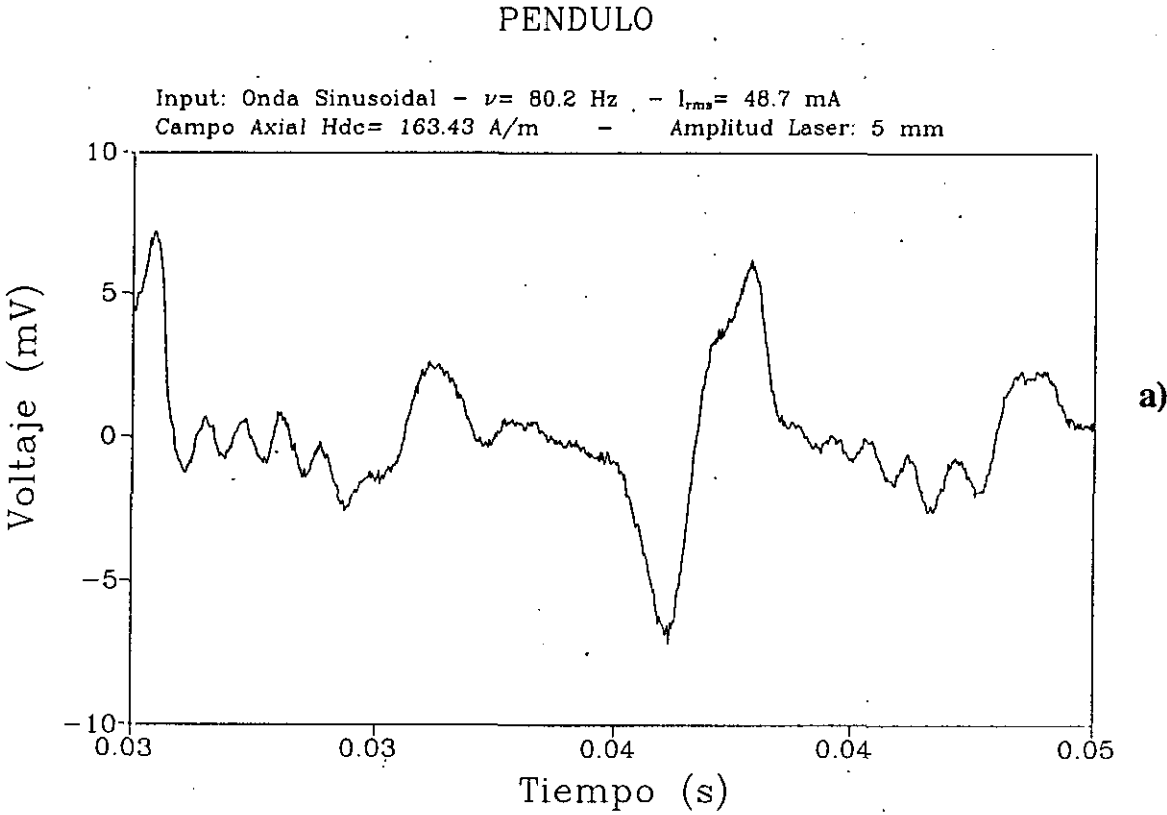


b)



c)

Figura 37 -. a) Señal temporal para $H_z = 163.43 \text{ A/m}$, entre 0.03 segundos y 0.05 segundos
b) Cálculo de la dimensión fractal para la señal mostrada en a)



COMPLEJIDAD DEL COMPORTAMIENTO MECANICO

El montaje experimental del péndulo de torsión permite obtener, de forma sencilla, información directa y registrable sobre el comportamiento magnético del sistema.

El movimiento mecánico se evidencia cualitativamente a partir de la luz láser reflejada en el espejo pegado al disco del péndulo. Para poder llevar a cabo un estudio cuantitativo profundo, se precisaría que un conjunto de fotodetectores adecuadamente dispuestos registrasen la luz reflejada. Dado que no se dispone de tales detectores, hay que contentarse con estudiar cualitativamente el movimiento mecánico.

Como ya se ha comentado anteriormente, la luz láser reflejada puede formar figuras simples como líneas o bucles, que revelan un movimiento regular. Variando adecuadamente los parámetros del sistema, pueden obtenerse figuras complejas, indicio de aperiodicidad. Encontrar las condiciones adecuadas para inducir un comportamiento caótico es complicado, dada la variedad de parámetros de que dispone el sistema, como son:

- i) Valor del campo magnético axial H_z
- ii) Valor de la intensidad de corriente I
- iii) Valor de la frecuencia ν de la corriente
- iv) Estructura magnética del hilo (variable según el recocido)

El estudio experimental se realiza variando un único parámetro y dejando fijos los demás. El caos aparecerá cuando el *conjunto de parámetros tome el valor adecuado*. Muchas combinaciones pueden hacerse.

Los resultados experimentales presentados en esta memoria han sido obtenidos con un hilo recocido durante 25 minutos. Otros tiempos de recocido conducen a estructuras magnéticas diferentes (Velázquez, 1995) en el sentido de que los valores de las anisotropías pueden cambiar, o aparecer unas y desaparecer otras. Con el hilo considerado, se obtiene un comportamiento *cercano al caótico, pero no totalmente caótico*. Es posible que recociendo en otras condiciones se obtengan resultados que puedan ser catalogados de totalmente caóticos. En este sentido, el estudio experimental está abierto.

El análisis del movimiento del péndulo puede abordarse desde la perspectiva teórica, considerando la influencia de los diferentes parámetros del sistema. El estudio puede abordarse de la siguiente forma:

1 -. Análisis de la influencia de la no linealidad del movimiento

La no linealidad aparece como consecuencia de la falta de proporcionalidad entre el ángulo de giro del péndulo y la tensión de torsión elástica que aparece como consecuencia del giro. Se evidencia esta característica en la no linealidad de la ecuación diferencial que describe el movimiento de deflexión torsional.

La no linealidad propicia la posibilidad de varias respuestas ante un mismo estímulo. La ecuación diferencial que describe el movimiento mecánico del péndulo exhibe un término no lineal en x^3 , pero el término lineal, en x , tiene una importancia; la contribución total de ambos es del tipo $c \cdot x + (2/3) \cdot c \cdot x^3$, siendo c una constante: el término lineal tiene bastante peso, y esto limita el grado de "caoticidad" que puede tener la solución de la ecuación. Como comparación, se puede decir que la ecuación $x'' + Bx' + x^3 = A \sin(\omega t)$ es absolutamente caótica para $A=2.5$ y $\omega=0.7$; en este caso el término no lineal trabaja sin oposición.

Para analizar la influencia de la no linealidad se estudia el caso en que las anisotropías en el hilo son nulas, es decir, cuando la posición de la imanación en cada punto, está determinada únicamente por el valor de los campos en cada punto. Se van a estudiar las soluciones de la ecuación diferencial de movimiento para diferentes valores de la frecuencia de la corriente, del valor de la intensidad y del valor del amortiguamiento. Se analizará también la forma de la corriente, esto es, si es sinusoidal o cuadrada. Téngase en cuenta que en la cuadrada, el cambio de sentido de la corriente es más brusco que en el caso de la sinusoidal; durante el intervalo de tiempo en que cambia de signo el sentido de la corriente, el valor de la intensidad es nulo, con lo que el péndulo se mueve libremente, durante ese tiempo, con su frecuencia de oscilación propia. Este efecto es claro a frecuencias bajas y se aprecia claramente en la luz láser reflejada. También hay que tener en cuenta que una señal cuadrada no es espectralmente pura, en comparación con una sinusoidal; una señal excitadora sinusoidal introduce una única frecuencia de excitación, mientras que una cuadrada excita con una frecuencia dada y varios armónicos de ésta. Ello es debido a que una onda cuadrada equivale a una suma infinita de señales sinusoidales cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental (Hernando, 1993, (2)).

2 - Análisis de la estructura magnética

Los resultados experimentales evidencian la presencia de dos frecuencias de resonancia. En un péndulo de torsión, la frecuencia de resonancia depende del valor del módulo de cizalladura, y éste cambiará en función de los campos magnéticos aplicados. La variación del módulo de cizalladura con el campo dependerá de la *orientación de la imanación*.

En un modelo magnético básico del hilo, dos dominios son considerados: uno central en que la imanación forma ángulos pequeños con el eje del hilo y otro externo en que forma ángulos mayores, cercanos a noventa grados. Se puede atribuir, en consecuencia, a cada zona un *módulo de cizalladura diferente*, por lo que cada una de ellas reaccionará con una *frecuencia de resonancia diferente*.

Para modelizar este comportamiento, se pueden usar las expresiones del módulo de cizalladura calculadas en el capítulo dedicado a los módulos elásticos y hallar su valor en función de la posición de la imanación, determinando el ángulo de imanación en cada punto del hilo a través de la minimización de las energías involucradas. Este tipo de cálculo es complejo. Para simplificar se plantea un *modelo mecánico*. Vamos a suponer el hilo formado por dos partes: un cilindro macizo (el núcleo) en el interior de otro cilindro (zona externa) con un agujero central (es decir, con un radio interno y otro externo). Ambos cilindros encajan perfectamente el uno en el interior de otro. Vamos a considerar que ambos cilindros están formados por materiales diferentes de forma que sus módulos de cizalladura elásticos (los que se obtendrán si cada material se saturase totalmente) son distintos; en ellos, se consideran las anisotropías intrínsecas nulas y la constante de magnetostricción es la misma para ambos.

Cada cilindro, junto con el disco fijo en su extremo, puede considerarse como un péndulo de torsión. Se tendría, por tanto, dos péndulos de torsión, de forma que si existe alguna interacción entre los cilindros, el movimiento de uno influirá en el otro. Se tendrá, pues, un sistema mecánico formado por *dos péndulos de torsión acoplados entre sí*.

El origen de la interacción está relacionado con la estructura magnética real de los hilos amorfos: la transición en la dirección de la imanación entre la corteza y el núcleo, no se hace de forma brusca, sino gradual. Ello es debido a la presencia de una *pared magnética* entre ambos dominios.

En el modelo mecánico descrito, cada péndulo tendrá una constante de amortiguamiento diferente (dado que cada cilindro es de un material diferente) y entre ellos existe una interacción. Ambos péndulos siguen ecuaciones de movimiento semejantes a la que define el movimiento de un único péndulo de torsión, pero añadiendo un término que de cuenta de la interacción entre ambos. Se usa un término típico en el estudio de péndulos acoplados, que depende de la diferencia de los desplazamientos de cada péndulo (Crawford, 1979). Las ecuaciones son:

$$I_n \alpha'' + w_1 \alpha' + c_1 \alpha + \frac{2}{3} c_1 \alpha^3 + \eta (\alpha - \beta) = M_1(t) \quad (1)$$

$$I_n \beta'' + w_2 \beta' + c_2 \beta + \frac{2}{3} c_2 \beta^3 + \eta (\beta - \alpha) = M_2(t) \quad (2)$$

donde α es el ángulo de giro del cilindro interior (core) y β el del cilindro exterior (shell). El parámetro η cuantifica la interacción entre ambos cilindros. Sus unidades son $[\eta] = \text{N}\cdot\text{m}$. Los símbolos c_1 , w_1 y c_2 , w_2 denotan las constantes elásticas y el factor de amortiguamiento del cilindro interno y externo, respectivamente. Se toma para ambos péndulos el mismo momento de inercia I_n . Los momentos torsores exteriores son distintos para cada péndulo, ya que dependen de las dimensiones de cada cilindro. Su valor es:

Cilindro interno (core):

$$M_1(t) = 3 \pi \lambda G_1 \int_0^{R_o} dr r^2 \sin 2\theta(r) \quad (3)$$

Cilindro externo (shell):

$$M_2(t) = 3 \pi \lambda G_2 \int_{R_o}^R dr r^2 \sin 2\theta(r) \quad (4)$$

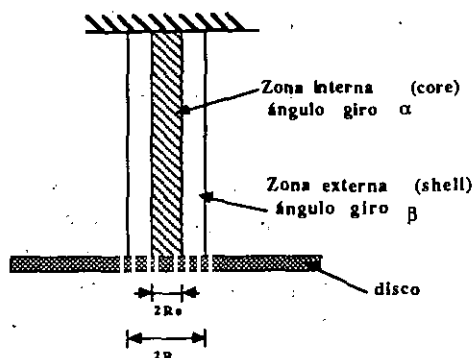
donde G_1 y G_2 son los módulos de cizalladura de cada cilindro. También se tiene que:

$$c_1 = \frac{\pi G_1 R_o^4}{2L} \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{\pi G_2 (R^4 - R_o^4)}{2L} \quad (6)$$

siendo R_o el radio del cilindro interno y R el radio mayor del cilindro externo (radio del hilo) y L la longitud de cada cilindro.

Para mayor claridad, la figura siguiente muestra un esquema del sistema.



Dado que se está considerando el caso de anisotropías nulas, el ángulo que forma la imanación con el eje del hilo verifica la relación:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H_{\phi}}{H_z} \quad (7)$$

que, introducida en (3) y (4), permite calcular los momentos torsores exteriores que actúan sobre cada zona en que se supone dividido el hilo en el modelo propuesto.

A continuación se detallan los resultados obtenidos.

1 -. Análisis de la no linealidad

En el apartado dedicado al análisis del caos, se ha mencionado que los regímenes caóticos aparecen, en general, en sistemas dotados de tres grados de libertad, lo cual, expresado matemáticamente, equivale a que cada uno de esos tres grados de libertad verifica una ecuación diferencial de primer orden. El péndulo, puede ser tratado como un sistema de este tipo.

La ecuación diferencial que describe el movimiento de deflexión de péndulo de torsión es de segundo orden:

$$I_n \alpha'' + \beta \alpha' + c \alpha + \frac{2}{3} c \alpha^3 = M(t) \quad (8)$$

donde α es el ángulo de deflexión del disco del péndulo, I_n el momento de inercia del péndulo (al que contribuye mayoritariamente el disco), β la constante de amortiguamiento, $M(t)$ el momento torsor exterior dependiente de los campos magnéticos aplicados y la constante elástica dada por $c = \pi \cdot R^4 \cdot G / 2 \cdot L$, siendo R el radio del hilo, L su longitud y G su módulo de cizalladura.

Esta ecuación diferencial no autónoma de segundo orden es equivalente a un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden (Bergé, 1992).

Considérese las variables x, y, z definidas por:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha', \quad z = t \quad (9)$$

donde t representa la variable tiempo. A partir de (8) se puede poner:

$$I_n \alpha'' + \beta \alpha' + c \alpha + \frac{2}{3} c \alpha^3 = M(t) \rightarrow I_n y' + \beta y + c x + \frac{2}{3} x^3 = M(z) \quad (10)$$

con lo que la ecuación equivale al sistema:

$$y' = [M(z) - \beta y - c x - \frac{2}{3} x^3] \quad (11)$$

$$x' = y \quad (12)$$

$$z' = 1 \quad (13)$$

con lo cual, el péndulo de torsión puede ser considerado como un sistema con tres grados de libertad, pudiendo exhibir soluciones caóticas.

Los resultados que se muestran a continuación, sobre todo los espectros de frecuencia, conviene compararlos con los correspondientes a las ecuaciones de Lorentz y Rössler, que se muestran en la sección dedicada al análisis del caos; hay que tener en cuenta, a efectos de comparación, que esos dos sistemas constituyen ejemplos de dinámica perfectamente caótica.

En la ecuación (8), el parámetro que da cuenta del amortiguamiento se denota, en esta sección como $WTA = \beta/I_n$, que se mide en seg^{-1} .

El amortiguamiento depende del material del que está constituido el hilo, en el sentido de hilos de diferentes materiales permitirán construir péndulos de torsión con distintos amortiguamientos.

Vamos a analizar las soluciones de la ecuación diferencial (8) correspondientes a los siguientes casos:

- 1 -. Onda sinusoidal, frecuencia variable.
- 2 -. Onda sinusoidal, campo axial variable.
- 3 -. Onda sinusoidal, intensidad de corriente variable.
- 4 -. Onda cuadrada, frecuencia variable.
- 5 -. Onda cuadrada, amortiguamiento variable.

La ecuación se resuelve por el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El intervalo temporal va de 0 a 10 segundos y se divide en 3000 partes. Las condiciones iniciales son $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$.

1 -. Onda sinusoidal. Frecuencia variable

Se consideran los siguientes parámetros:

- Intensidad de corriente: $I = 50 \text{ mA}$ (pico a pico)
- Forma de onda de corriente: sinusoidal
- Campo axial: $H_z = 120 \text{ A/m}$
- Amortiguamiento: $WTA = 0.5 \text{ seg}^{-1}$

Se varia la frecuencia ν de la corriente.

La **figura 1** muestra el resultado para $\nu = 0.8 \text{ Hz}$. La **figura 1a** muestra la dependencia temporal del ángulo de deflexión. La **figura 1b** ofrece el mapa de fases y la **figura 1c** el espectro de frecuencias.

En la **figura 1a** se aprecia perfectamente la frecuencia de oscilación propia del péndulo, superpuesta a la excitadora. En el mapa de fases, se aprecian varios bucles correspondientes cada uno de ellos a frecuencias de oscilación del péndulo. Se observa una conexión compleja entre los bucles, lo que denuncia la presencia de muchas frecuencias. Como norma general, la dinámica será tanto más compleja cuanto más lleno esté el espacio de fases, es decir, cuanto más "denso" sea el dibujo correspondiente.

El espectro de frecuencias (**figura 1c**) confirma la presencia de una estructura compleja de frecuencias. Se aprecia un pico en torno a los 0.8 Hz (frecuencia de excitación) y otro en torno a la frecuencia de oscilación propia del péndulo (en torno a los 13 Hz). Ambos picos están conectados por una *banda continua*. Ello se debe al efecto de la no linealidad. Si la ecuación (8) fuese lineal, debería apreciarse un *pico estrecho* en cada una de las frecuencias mencionadas.

La **figura 2** muestra el resultado para $\nu = 1.2 \text{ Hz}$ y la **figura 3** para $\nu = 1.4 \text{ Hz}$. Nótese la modificación del espacio de fases y de la banda que conecta la frecuencia de excitación y la propia, y alterando la presencia de picos en el entorno de la frecuencia de oscilación propia.

2 -. Onda sinusoidal. Campo axial variable

Se consideran los siguientes parámetros:

- Intensidad de corriente: $I = 50 \text{ mA}$
- Forma de onda de la corriente: sinusoidal
- Frecuencia de la corriente: $\nu = 0.8 \text{ Hz}$
- Amortiguamiento: $WTA = 0.5 \text{ seg}^{-1}$

Se varia el campo axial H_z .

La **figura 4** muestra los resultados obtenidos para $H_z = 2 \text{ A/m}$. El mapa de fases revela formas complejas, bucles intersectados entre si. El espectro de frecuencias indica la presencia de muchos picos de frecuencia, superpuestos a un fondo continuo; la altura de los picos de frecuencia va incrementandose conforme la frecuencia se acerca a la propia del sistema.

La **figura 5** muestra cómo se mantiene la misma estructura que en el caso anterior, pero aumenta la altura de los picos de frecuencia al aumentar el campo axial hasta $H_z = 10 \text{ A/m}$. El mapa

de fases revela un aumento del tamaño del atractor; éste cubre una superficie más amplia del espacio de fases, debido al aumento de la importancia de las frecuencias menores de 13 Hz.

3 -. Onda sinusoidal. Intensidad de corriente variable

En este caso, el parámetro que se varia es la intensidad de corriente I . Se toman los siguientes valores para el resto de los parámetros.

- Frecuencia de la corriente: $\nu = 0.8$ Hz.
- Forma de onda de corriente: sinusoidal
- Campo axial: $H_z = 10$ A/m
- Amortiguamiento: $WTA = 0.5 \text{ seg}^{-1}$

Las figuras 6 a 14 muestran los resultados obtenidos para las intensidades de corriente $I = 1$ mA, 5 mA, 10 mA, 15 mA, 20 mA, 25 mA, 30 mA, 90 mA y 100 mA.

La figura 6, para $I = 1$ mA, muestra la presencia de picos en la banda continua que conecta la frecuencia de excitación con la propia. Ello quiere decir que el péndulo oscila también en esas frecuencias intermedias. El aumento a $I = 5$ mA, hace desaparecer esos picos intermedios (figura 7). El aumento a 10 mA (figura 8) provoca su reaparición, siendo los picos tanto más altos cuanto más cercana es la frecuencia a los 0.8 Hz. Si se sigue aumentando la intensidad, más picos van apareciendo y se incrementa la altura de los ya existentes (figuras 9). Para $I = 20$ mA (figura 10), el pico correspondiente a la frecuencia propia disminuido su tamaño respecto de los demás: el péndulo prefiere no oscilar a su frecuencia propia. Para $I = 25$ mA (figura 11), la altura de ese pico vuelve a aumentar. El mapa de fases correspondiente ofrece la visión de varios bucles conectados entre sí. Estos bucles se mezclan y aumentan de tamaño cuando $I = 30$ mA (figura 12). Sigue aumentando de tamaño del pico correspondiente a la frecuencia propia. Para $I = 90$ mA (figura 13), los bucles se funden en un solo y el tamaño del pico correspondiente a la frecuencia de oscilación propia se hace mayor que los demás. La situación no se altera si se incrementa la intensidad a $I = 100$ mA (figura 14).

Estos resultados pueden ser interpretados como oscilaciones cuasiperiódicas; las figuras correspondientes en el espacio de fases son toros, que aumentan, disminuyen o se mezclan entre sí en función de la intensidad de corriente.

4 -. Onda cuadrada. Frecuencia variable

Los resultados que se ofrecen a continuación son cualitativamente distintos a los anteriores ya que en ellos se ha considerado una onda de excitación cuadrada.

Se han considerado los siguientes parámetros:

- Intensidad de corriente: $I = 50$ mA
- Forma de onda de corriente: cuadrada
- Campo axial $H_z = 120$ A/m
- Amortiguamiento: $WTA = 0.5 \text{ seg}^{-1}$

Se varia la frecuencia ν de la corriente.

La figura 15 muestra el resultado obtenido para $\nu = 20$ Hz. Visualmente, la dependencia del ángulo de deflexión con el tiempo (figura 15a) muestra una gran complejidad. El espacio de fases (figura 15b) y el espectro de frecuencias (figura 15c) ratifican la complejidad implicada. El espacio de fases ofrece un atractor denso y el espectro de frecuencias presenta una estructura compleja entre los picos de frecuencias principales (excitadora y propia). El pico de la frecuencia excitadora es más alto que la de la frecuencia propia.

La figura 16 ofrece el resultado para $\nu = 25$ Hz. Se aprecia un aumento de la complejidad. Los picos de frecuencia correspondientes a la oscilación propia y a la excitadora de 25 Hz adquieren la misma altura.

La figura 17 muestra los resultados para $\nu = 30$ Hz. Se aprecia un menor tamaño del pico de la frecuencia excitadora con respecto a la frecuencia propia. En torno a esta última sigue observándose una banda continua.

La figura 18 corresponde a los resultados obtenidos para $\nu = 100$ Hz. El espacio de fases muestra un aspecto complicado, adivinándose la presencia de muchos bucles interconectados de formas complejas. El espectro de frecuencias que se presenta en la gráfica ofrece únicamente las frecuencias próximas a la oscilación propia.

5 -. Onda cuadrada. Intensidad de corriente variable.

La figura 19 muestra el resultado obtenido para los mismos parámetros que en el caso anterior, pero con una intensidad de corriente menor, $I = 1$ mA y aun amortiguamiento mayor, $WTA = 2$ seg⁻¹. Se sigue obteniendo una estructura compleja en el espectro de frecuencias. Si se compara este espectro con el obtenido para las ecuaciones de Rössler, se constatará una gran similitud. La señal mostrada en la figura 19 parece prácticamente caótica.

Para ratificarlo, vamos a analizar las *secciones de Poincaré* de la señal temporal obtenida para $I = 50$ mA y que es semejante a la de la figura 19a. La figura 20 ofrece los resultados. La figura 20b representa los puntos obtenidos al muestrear la señal temporal que aparece en 20a, en intervalos de tiempo separados entre sí 0.01 segundos, es decir, se toman los puntos que están distanciados entre sí 0.01 segundos y se representa la velocidad frente al ángulo correspondiente. La figura 20c ofrece el resultado del mismo tipo de cálculo, pero para puntos separados 0.1 segundos. Hay que tener en cuenta, que en una señal periódica los puntos obtenidos conformarían una cierta figura. Las mostradas en la figura 20 no ofrecen ningún diseño reconocible.

2 -. Análisis de la estructura magnética

Vamos a considerar el modelo de las dos zonas propuesto anteriormente. En los cálculos que siguen se han resuelto las ecuaciones (1) y (2) para distintas condiciones. En ellas, el parámetro $WTA = w_1/I_n$ da cuenta del amortiguamiento del cilindro interno (core) y $WTB = w_2/I_n$ lo hace del cilindro externo (shell). Ambos se miden en s⁻¹. La interacción entre los dos cilindros se cuantifica mediante la cantidad $W = \eta/I_n$, que se mide en s⁻².

La figura 21 muestra el ángulo de deflexión del cilindro interno y el externo para las condiciones siguientes:

- Módulo cizalladura cilindro interno: $G_{core} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa
- Módulo cizalladura cilindro externo: $G_{shell} = 2 \cdot 10^{10}$ Pa
- Intensidad de corriente: $I = 50$ mA
- Frecuencia $\nu = 15$ Hz
- Forma de la onda: sinusoidal
- Campo axial $H_z = 120$ A/m
- Tamaño relativo de los cilindros: $R_o/R = 0.7$
- Amortiguamiento cilindro interno: $WTA = 0$
- Amortiguamiento cilindro externo: $WTB = 0$
- Interacción entre ambos cilindros: $W = 1200$ s⁻²

La **figura 21a** muestra el ángulo de deflexión del cilindro interno y la **21b** el del cilindro externo. Desde el punto de vista experimental, el movimiento mecánico observado correspondería únicamente al cilindro externo. A pesar de su apariencia compleja, el movimiento es todavía ordenado. La **figura 22a** muestra el espacio de fases para el movimiento del cilindro interno y la **figura 22b** para el cilindro externo. La **figura 22c** muestra la representación del ángulo de movimiento del core (cilindro interno) frente al del cilindro externo (shell). Pese a su apariencia compleja, la figura indica que ambos cilindros se mueven correlacionados entre sí.

La **figura 23** muestra la dependencia angular para los mismos parámetros que en el caso anterior pero siendo la interacción mayor, $W = 10000$ s⁻². La dependencia temporal del ángulo que gira cada cilindro (**figuras 23a y 23b**) parece más compleja. Esto se confirma a la vista de la **figuras 24a y 24b** en donde se representa el espacio de fases correspondiente al movimiento de cada cilindro. El atractor resultante es mucho más complejo que el obtenido en el caso anterior. La **figura 24c**, representación del ángulo de giro del cilindro interno frente al del externo, pone de manifiesto la pérdida de sincronización entre los dos movimientos.

Es obvio que valores de los amortiguamientos de cada cilindro diferentes de cero ofrecerán comportamientos cualitativamente diferentes. La **figura 25** ofrece los resultados obtenidos considerando los siguientes amortiguamientos:

- WTA (core) = 500 s⁻¹
- WTB (shell) = 100 s⁻¹
- W (interacción core-shell) = 10000 s⁻²

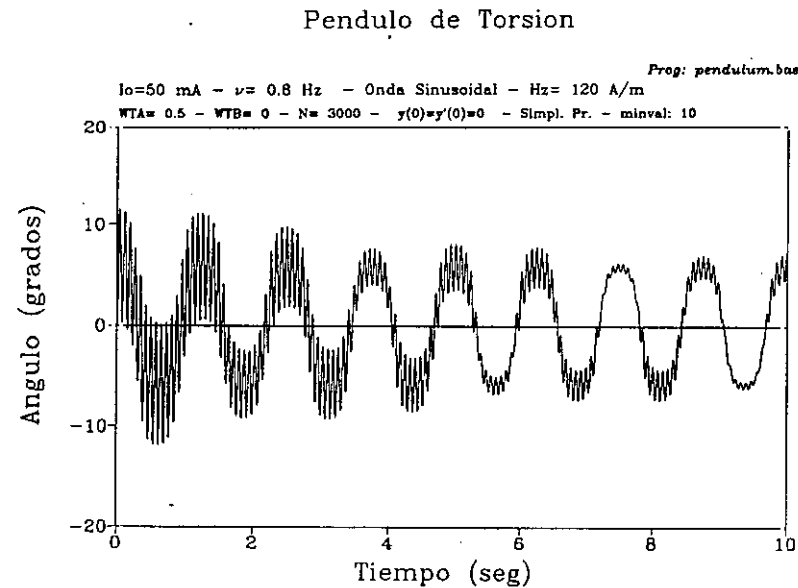
Para estos valores de amortiguamiento (la interacción es la misma que en el caso ofrecido en la **figura 24**), los dos osciladores están perfectamente sincronizados. Es decir, cuando la interacción es alta y el amortiguamiento también lo es, el movimiento de un oscilador arrastra al otro. Esta constituye una situación lejana del régimen caótico.

Un ejemplo de movimiento caótico se obtiene en este sistema para los siguientes parámetros:

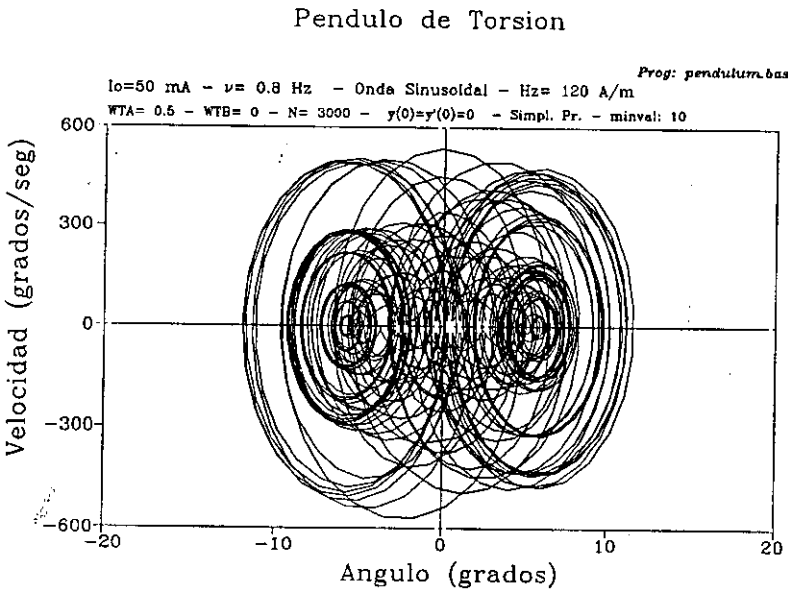
- Intensidad de corriente: $I = 50$ mA
- Frecuencia de la corriente: $\nu = 1$ Hz
- Campo axial $H_z = 120$ A/m
- $G_{core} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa
- $G_{shell} = 2 \cdot 10^{10}$ Pa
- WTA (amortiguamiento core) = 2 s⁻²
- WTB (amortiguamiento shell) = 2 s⁻²
- W (interacción) = 1000 s⁻²

La **figura 26** muestra la dependencia temporal de los ángulos de deflexión del cilindro interno y del externo. La apariencia es más irregular que en casos anteriores. La **figura 27a** y la **figura 27b** muestran el espacio de fases correspondiente al movimiento de cada cilindro. El atractor es complejo. La **figura 27c** muestra la ausencia de correlación entre el movimiento del cilindro interno y el externo. Esta última figura sugiere que el movimiento puede ser caótico. Para confirmarlo, se calculan los espectros de frecuencias. La **figura 28** muestra el resultado. La **figura 28a** muestra el espectro de frecuencias para el caso estudiado. La **figura 28b** ofrece el espectro de frecuencias para el caso en que el amortiguamiento de cada cilindro es menor ($WTA = WTB = 0.5 \text{ s}^{-1}$). Nótese la compleja estructura de frecuencias que aparecen, sugiriendo un comportamiento caótico.

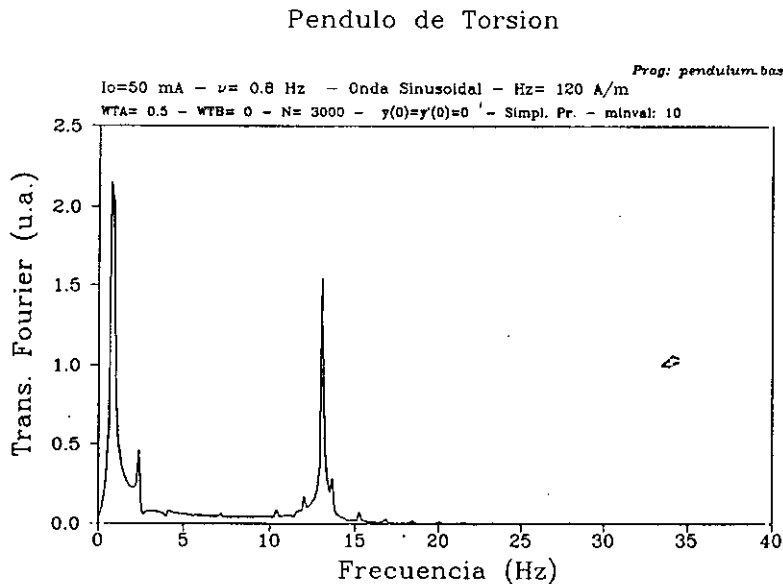
Figura 1 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu= 0.8$ Hz y campo $H_z=120$ A/m
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)



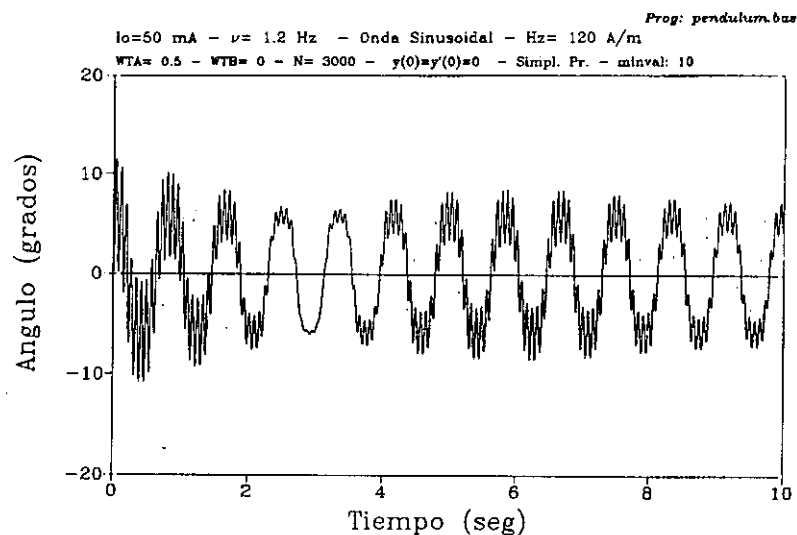
b)



c)

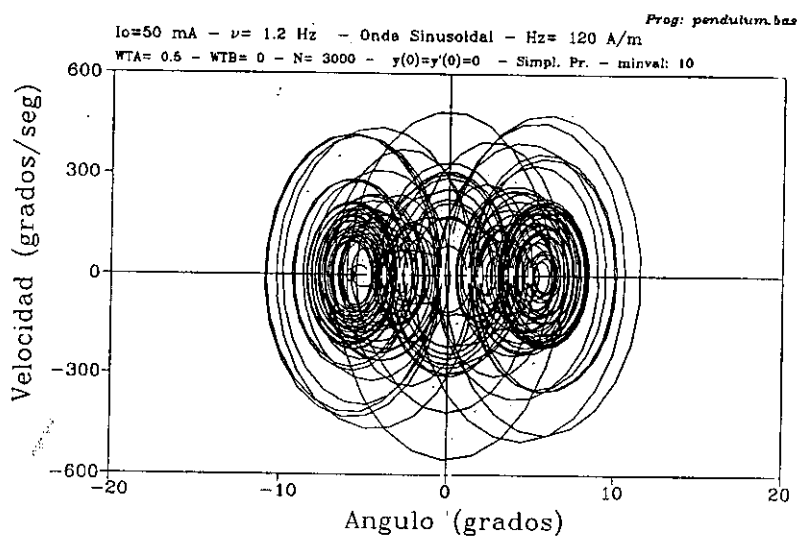
Figura 2 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 1.2$ Hz y campo $H_z = 120$ A/m
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



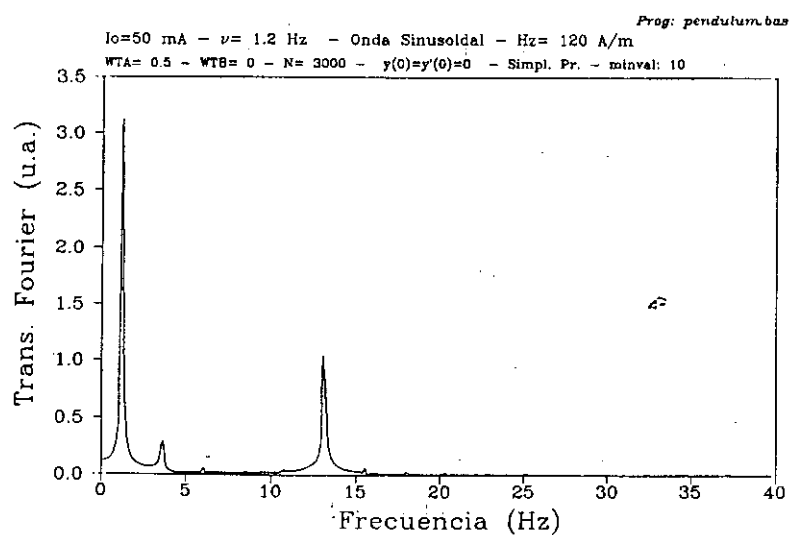
a)

Pendulo de Torsion



b)

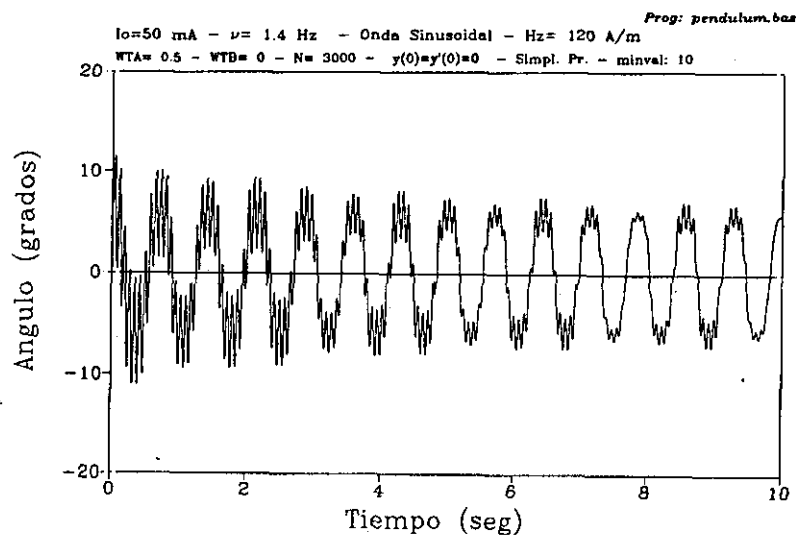
Pendulo de Torsion



c)

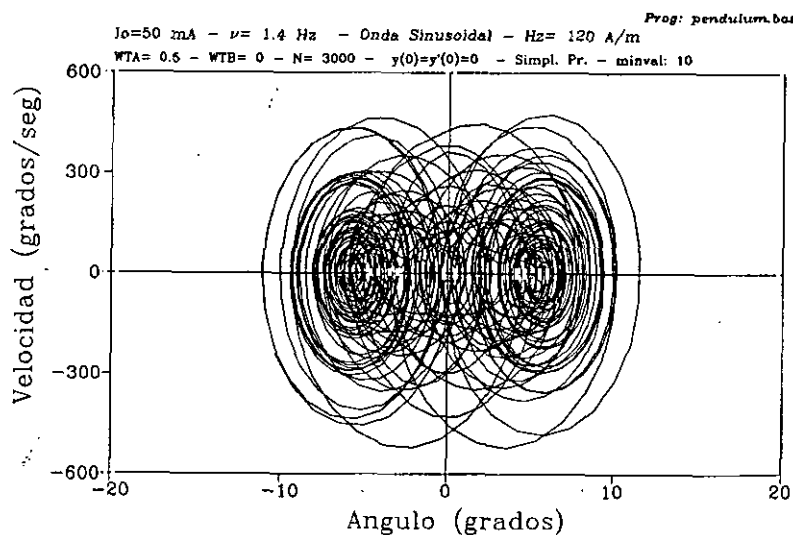
Figura 3 - . Dinámica para corriente de frecuencia $\nu = 1.4$ Hz y campo $H_z = 120$ A/m
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



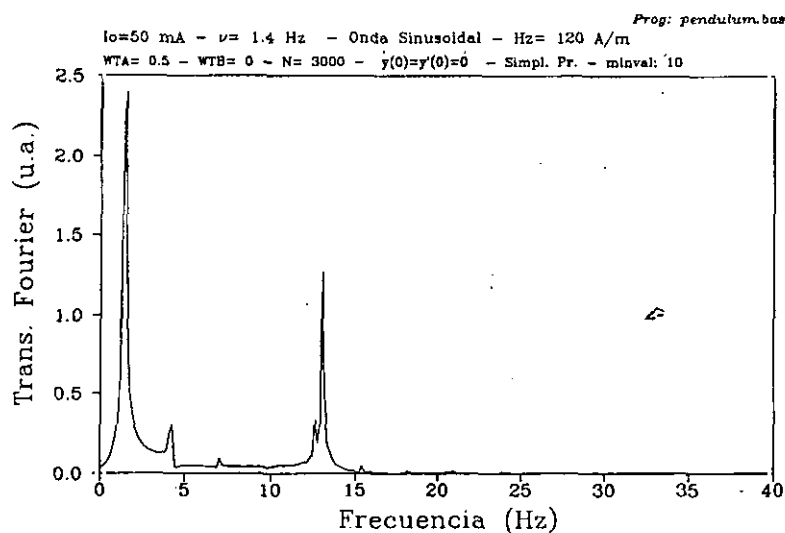
a)

Pendulo de Torsion



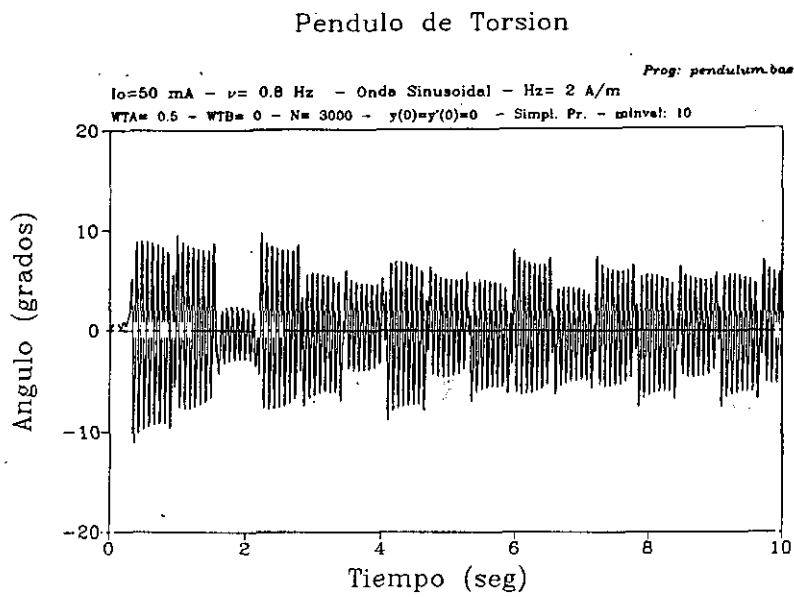
b)

Pendulo de Torsion

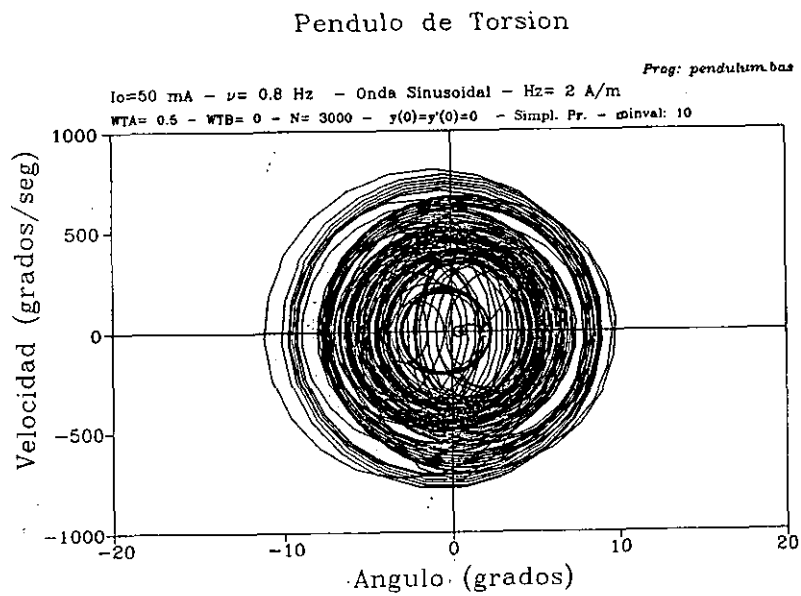


c)

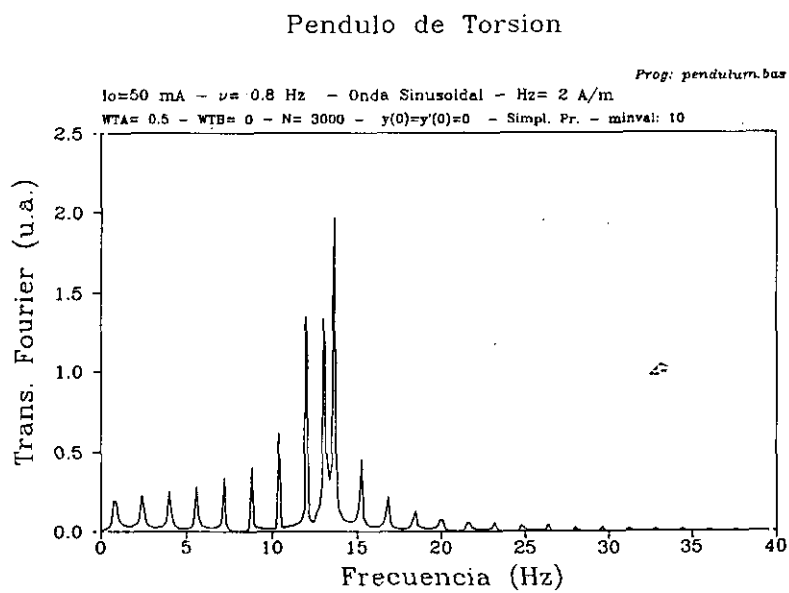
Figura 4 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu=0.8$ Hz y campo $H_z=2$ A/m
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)

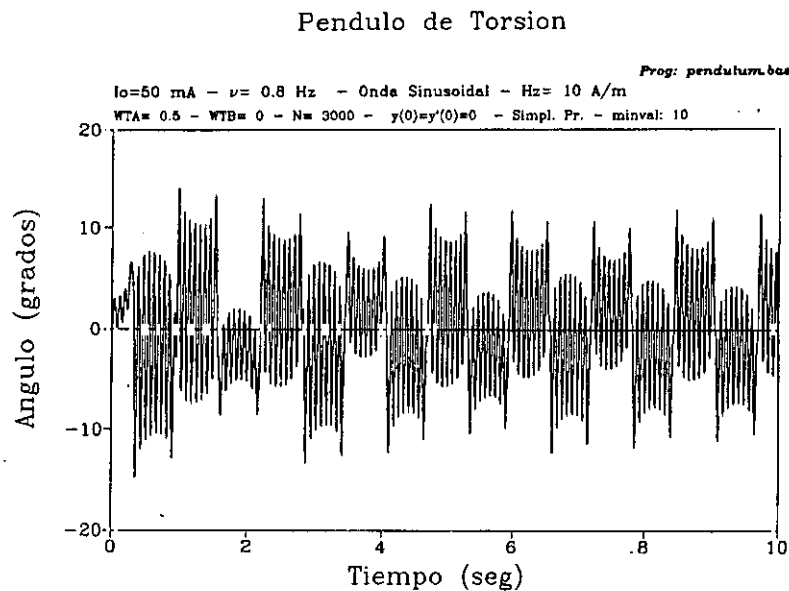


b)

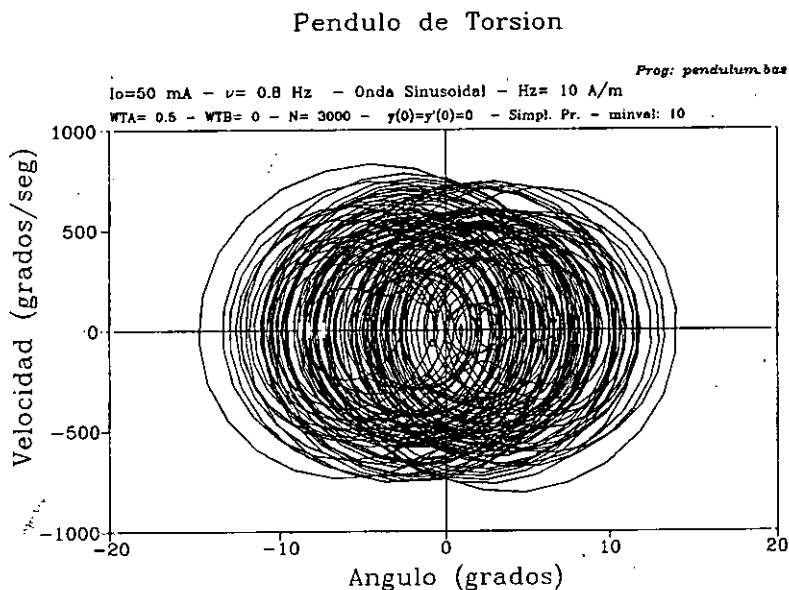


c)

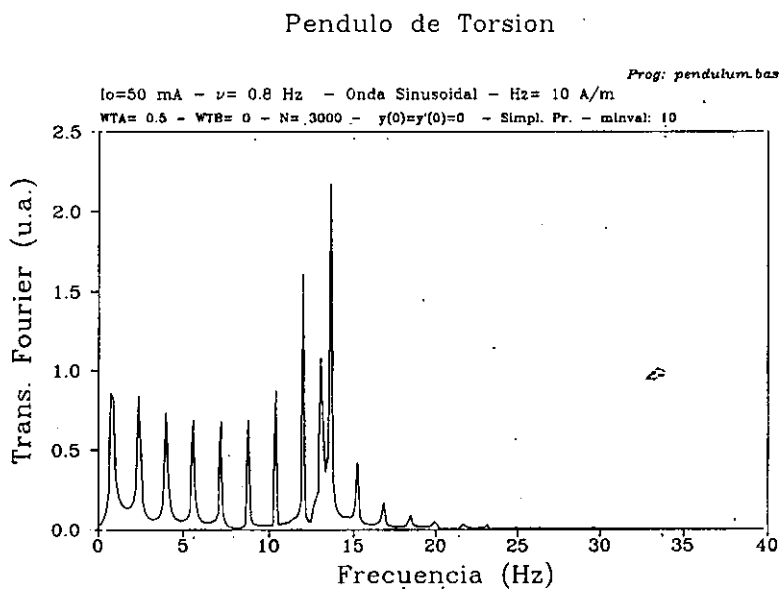
Figura 5 -. Dinámica para corriente de frecuencia $\nu=0.8\text{ Hz}$ y campo $H_z=10\text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)



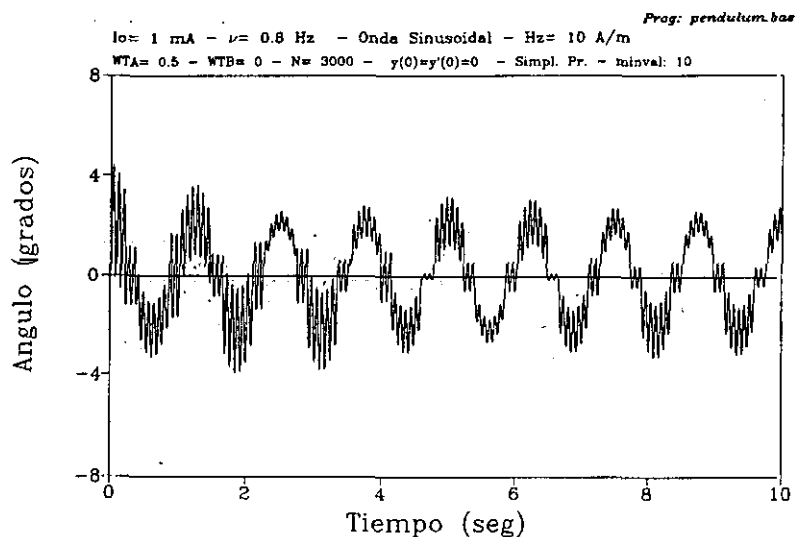
b)



c)

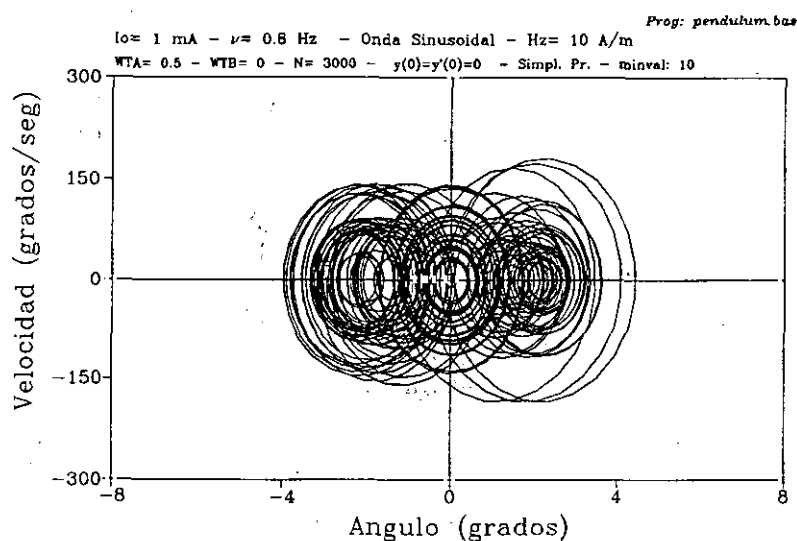
Figura 6 -. Dinámica para corriente de intensidad $I = 1 \text{ mA}$, $\nu = 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z = 10 \text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión; b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



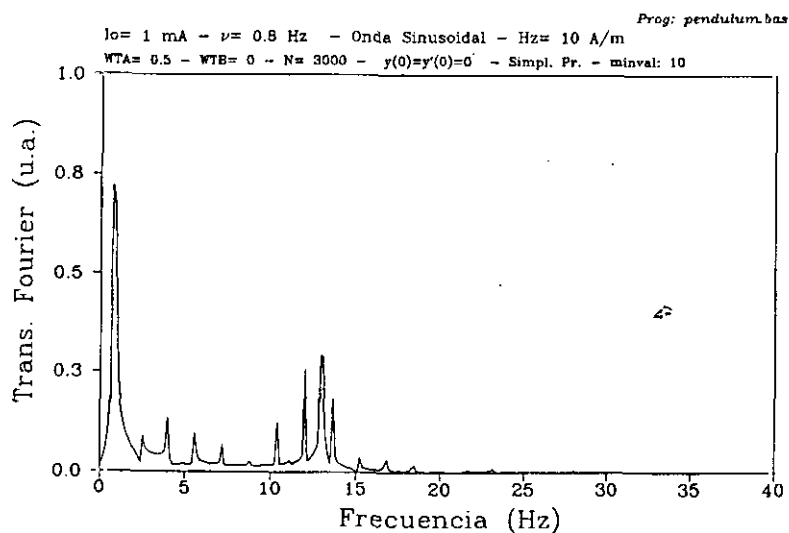
a)

Pendulo de Torsion



b)

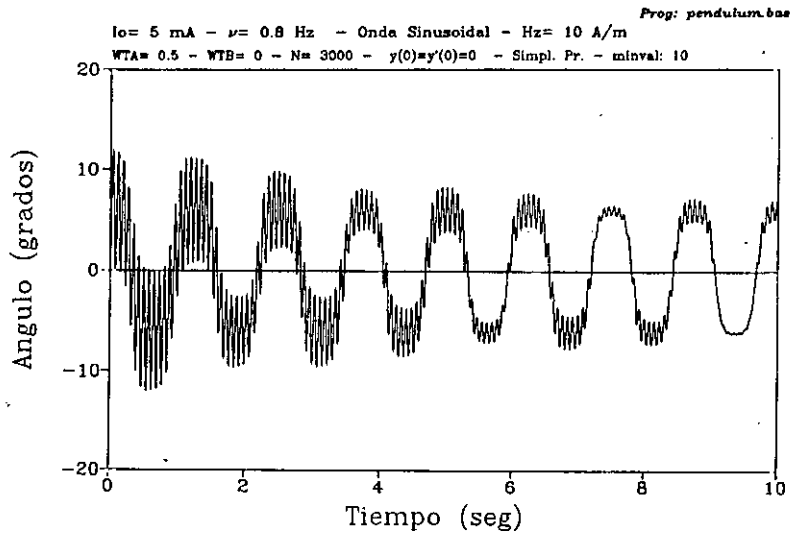
Pendulo de Torsion



c)

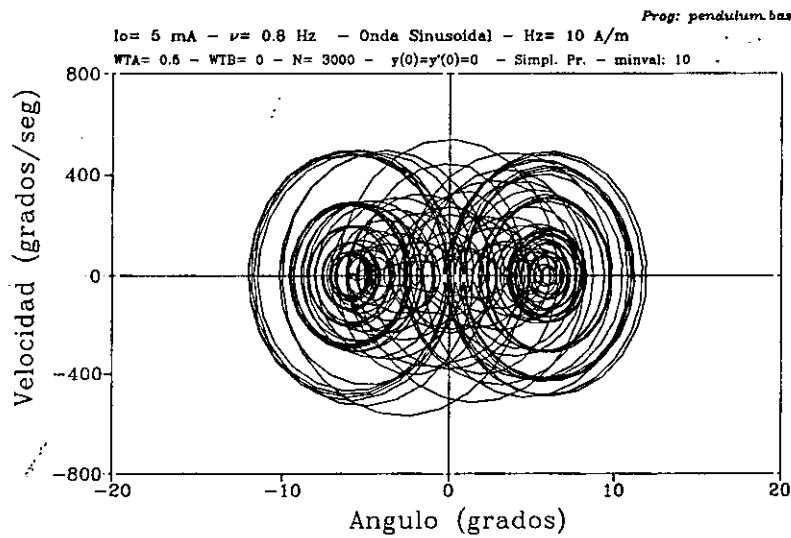
Figura 7 -. Dinámica para corriente de intensidad $I = 5 \text{ mA}$, $\nu = 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z = 10 \text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



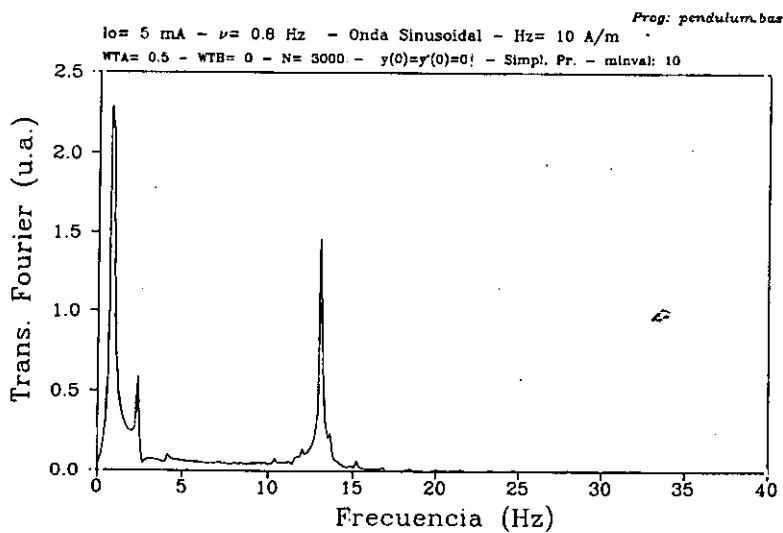
a)

Pendulo de Torsion



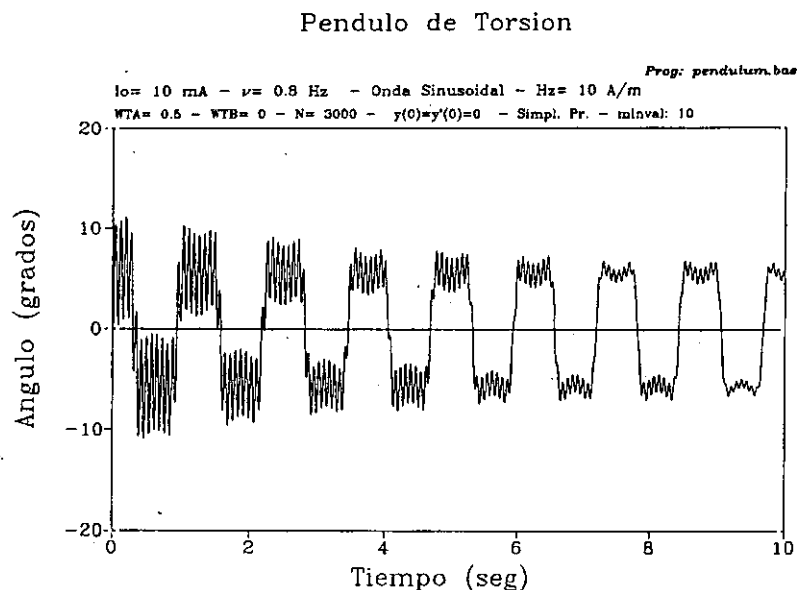
b)

Pendulo de Torsion

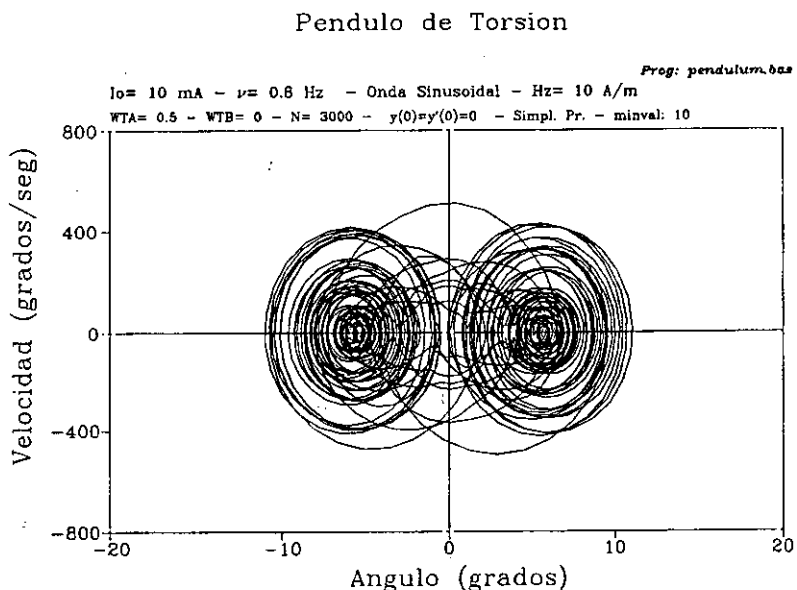


c)

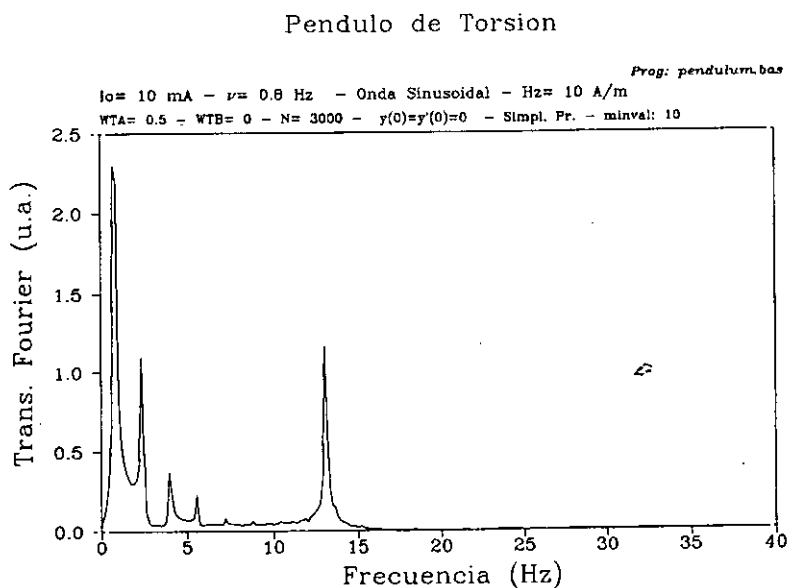
Figura 8 -. Dinámica para corriente de intensidad $I = 10 \text{ mA}$, $\nu = 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z = 10 \text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)



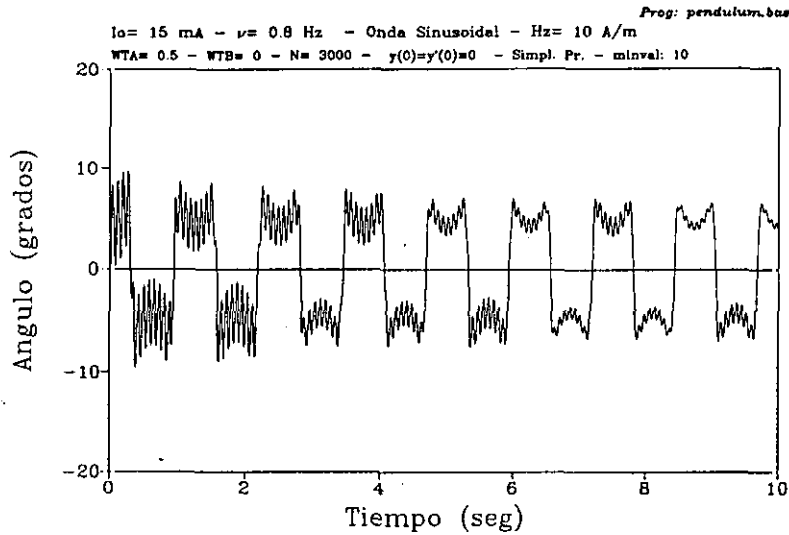
b)



c)

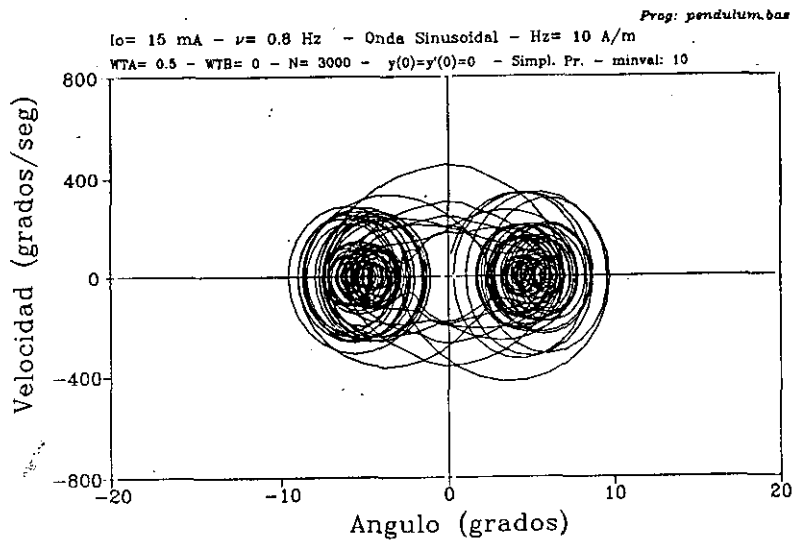
Figura 9 -. Dinámica para corriente de intensidad $I= 15 \text{ mA}$, $\nu= 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z= 10 \text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



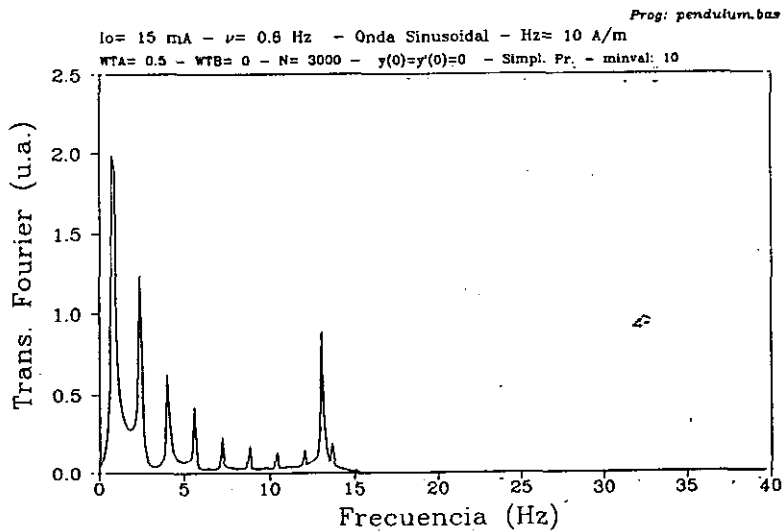
a)

Pendulo de Torsion



b)

Pendulo de Torsion

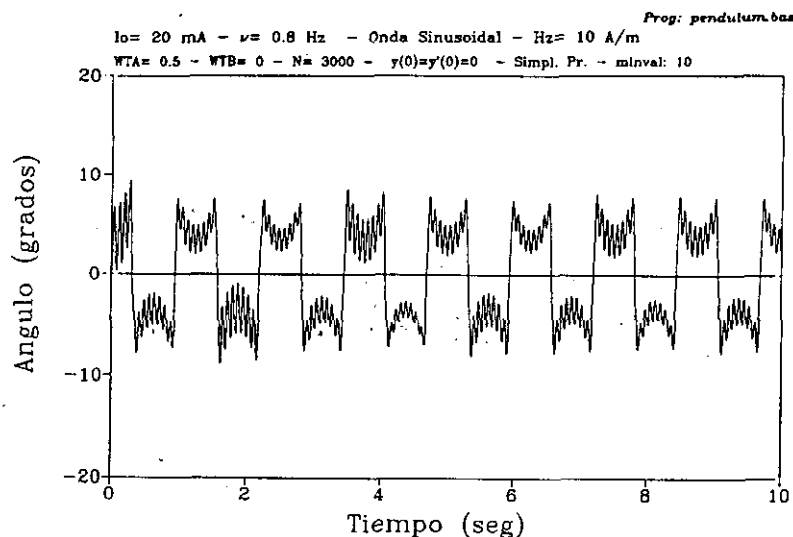


c)

Figura 10 -. Dinámica para corriente de intensidad $I = 20 \text{ mA}$, $\nu = 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z = 10 \text{ A/m}$

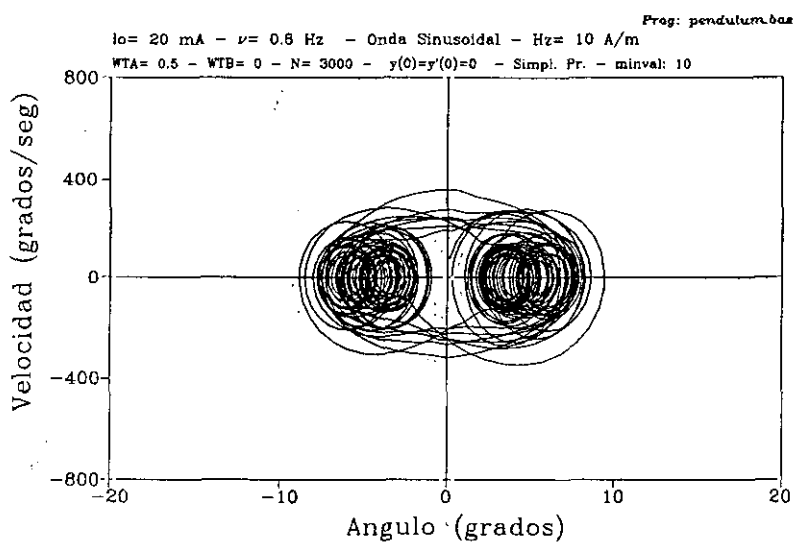
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



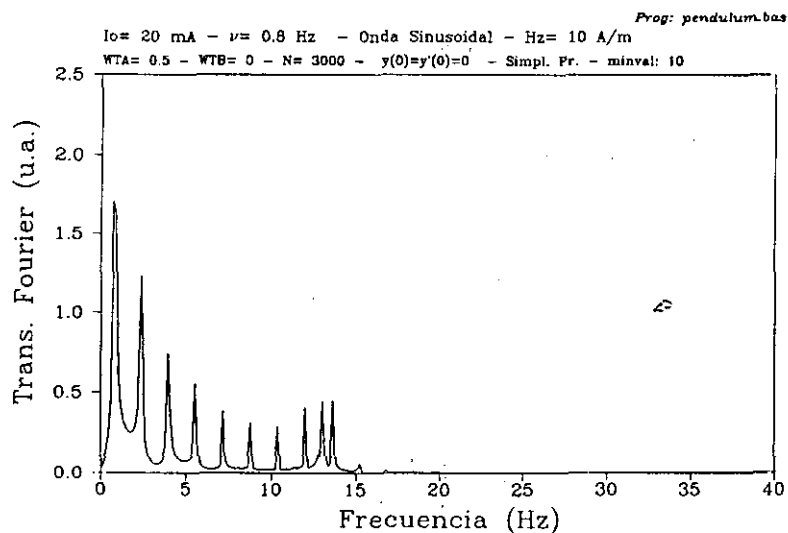
a)

Pendulo de Torsion



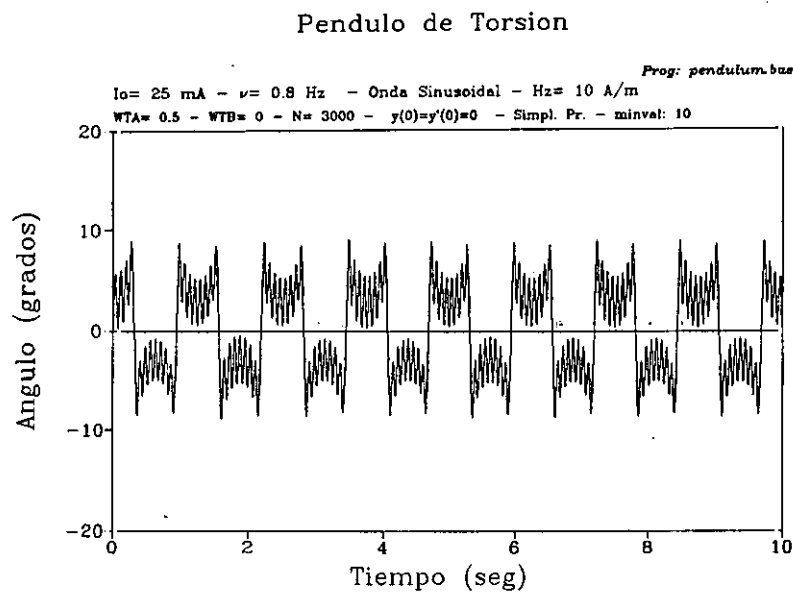
b)

Pendulo de Torsion

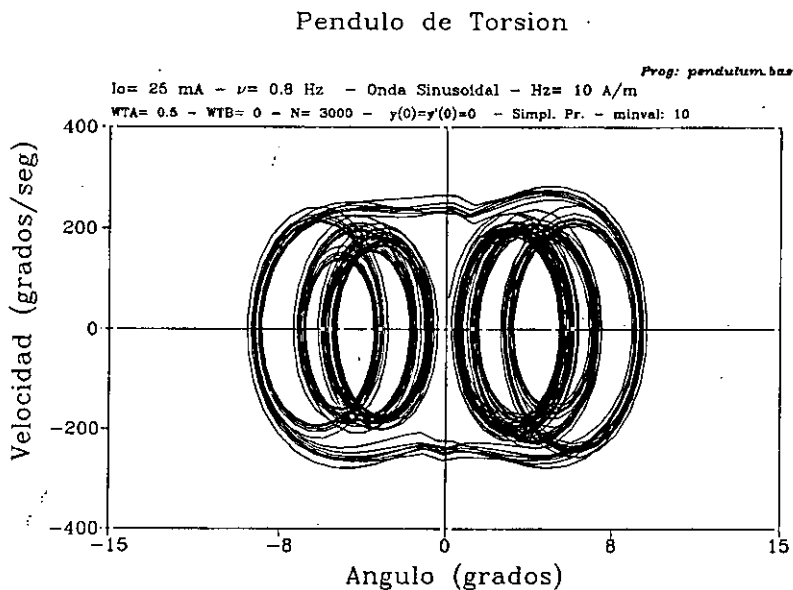


c)

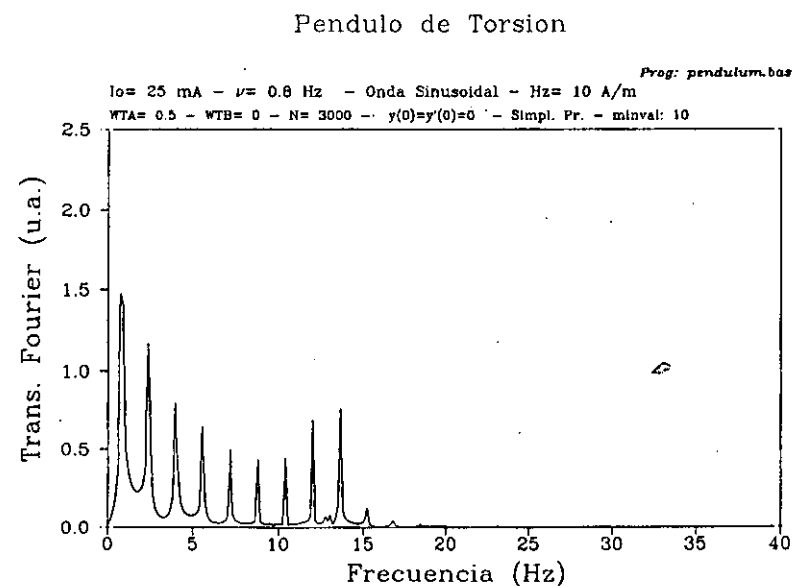
Figura 11 -. Dinámica para corriente de intensidad $I = 25 \text{ mA}$, $\nu = 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z = 10 \text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)

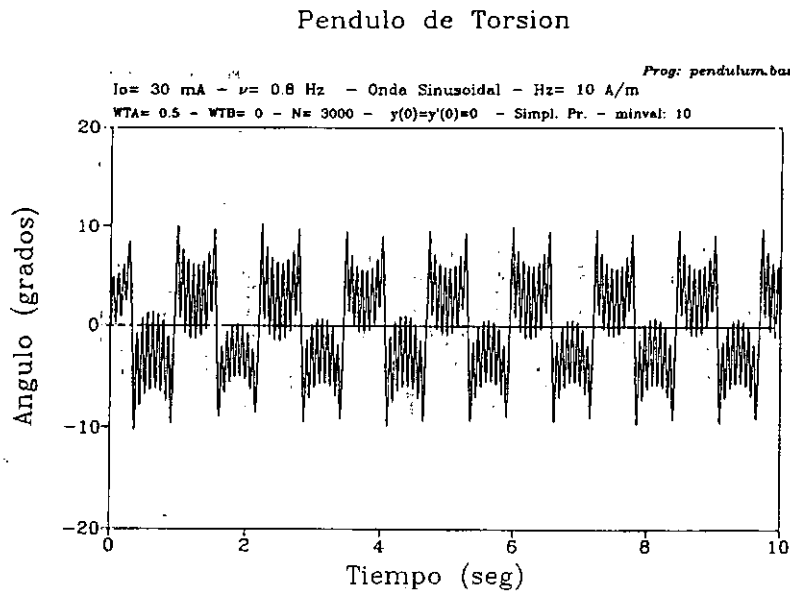


b)

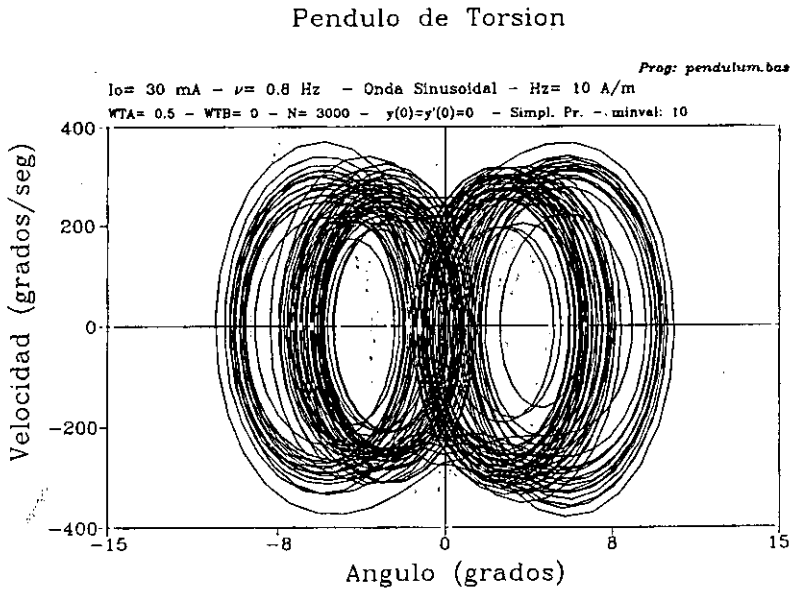


c)

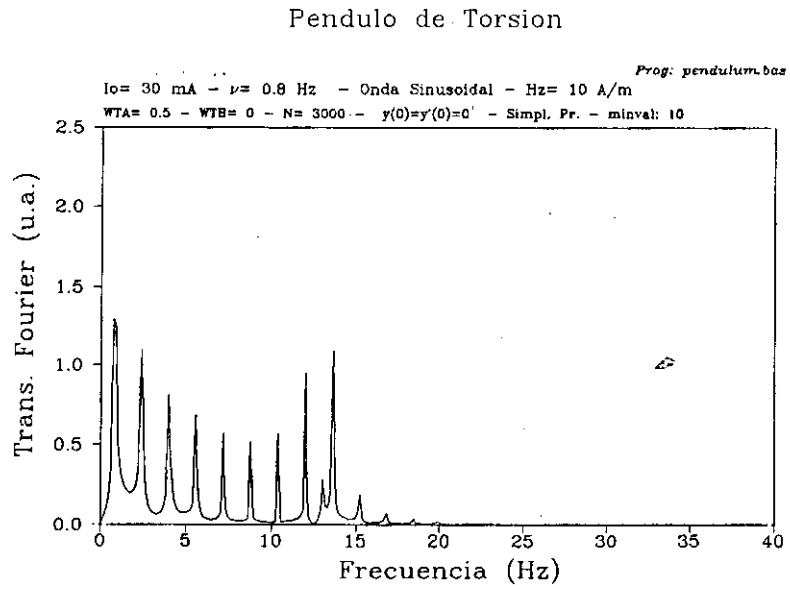
Figura 12 - Dinámica para corriente de intensidad $I=30\text{ mA}$, $\nu=0.8\text{ Hz}$ y campo $H_z=10\text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión; b) mapa de fases; c) espectro de frecuencias



a)

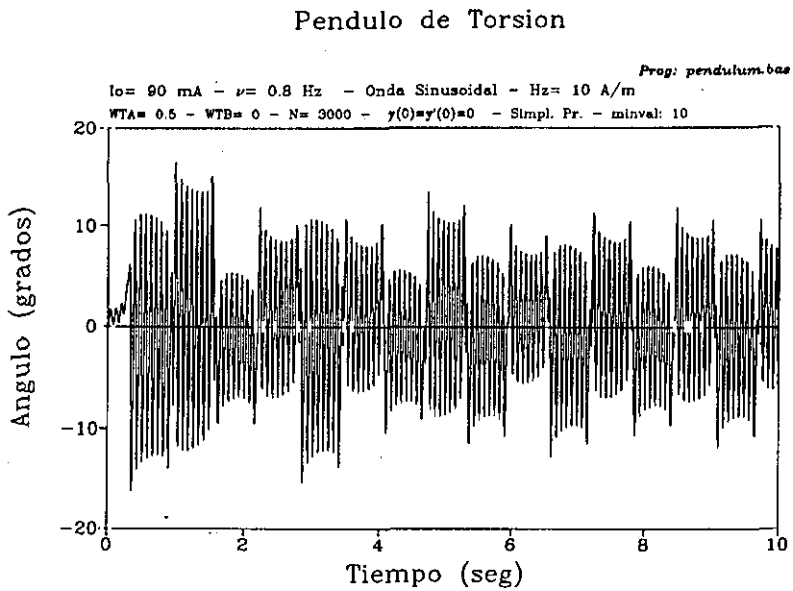


b)

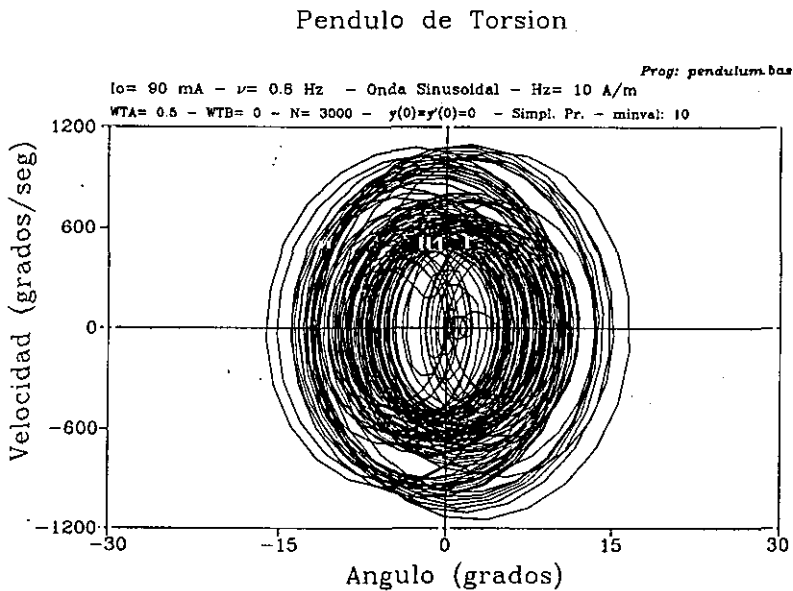


c)

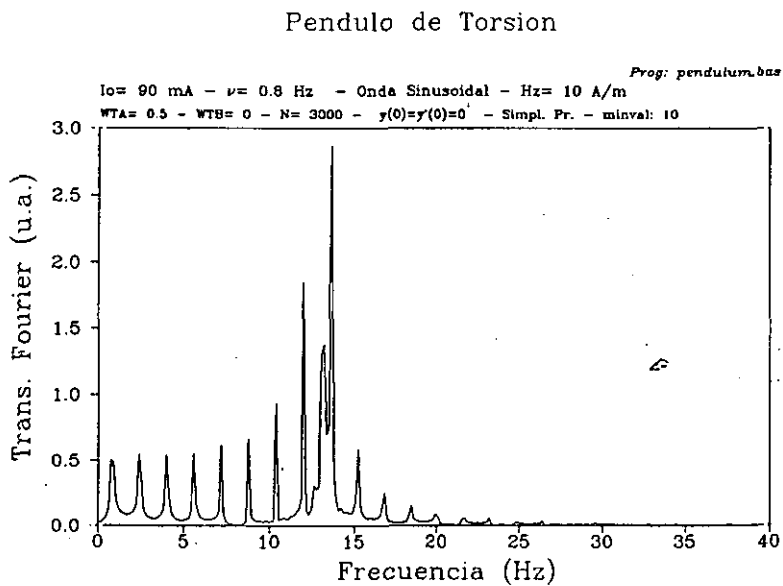
Figura 13 -. Dinámica para corriente de intensidad $I = 90 \text{ mA}$, $\nu = 0.8 \text{ Hz}$ y campo $H_z = 10 \text{ A/m}$
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)

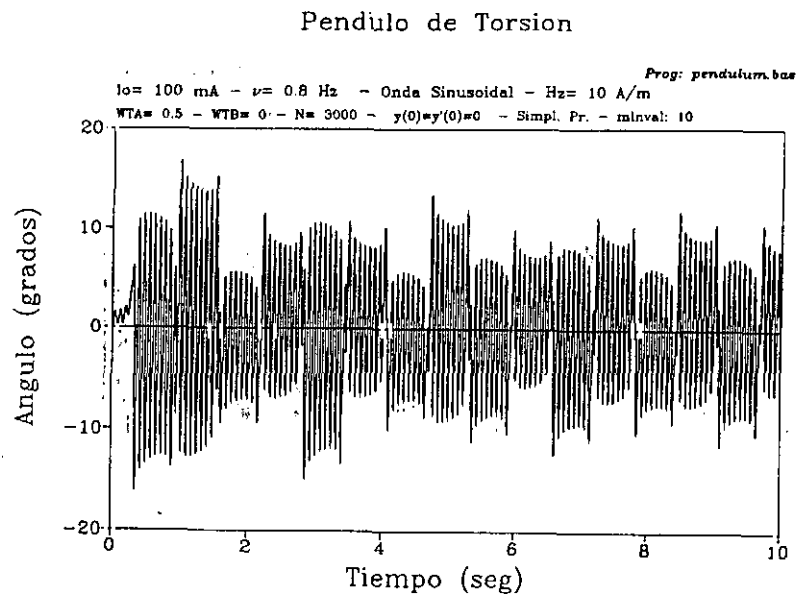


b)

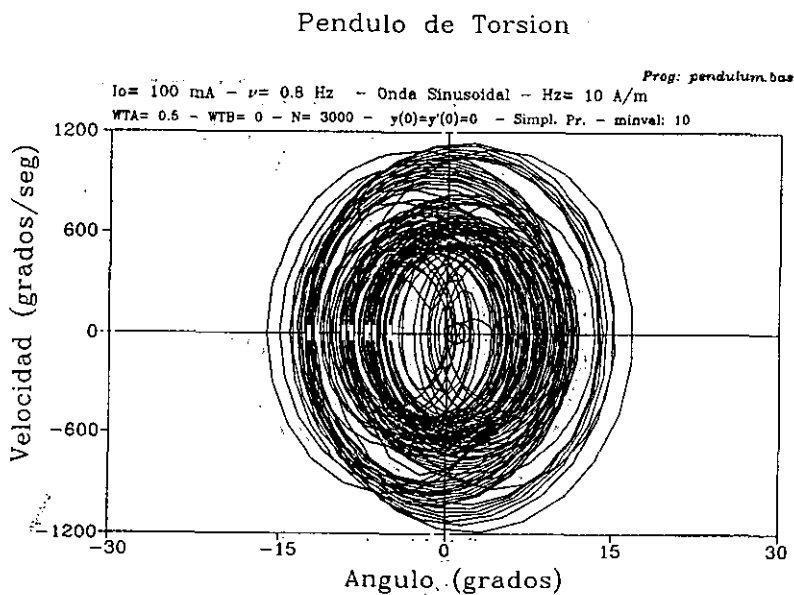


c)

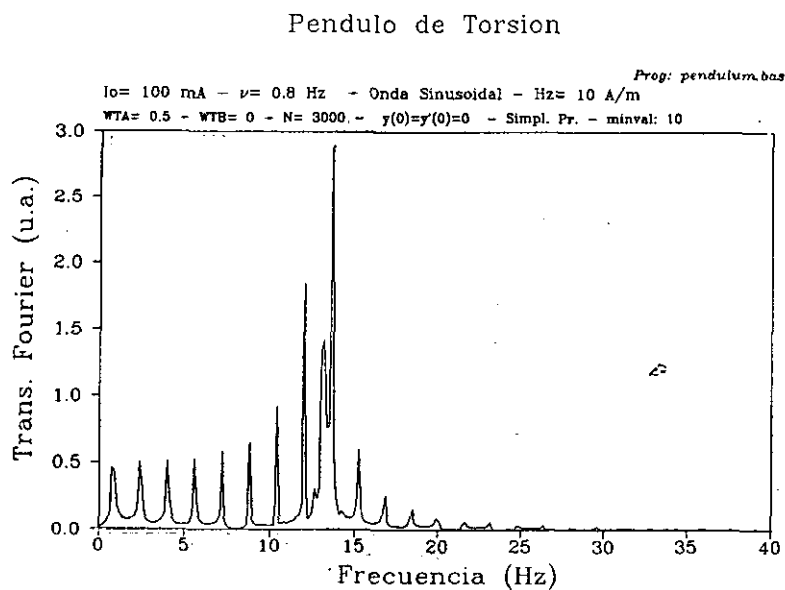
Figura 14 - Dinámica para corriente de intensidad $I=100$ mA, $\nu=0.8$ Hz y campo $H_z=10$ A/m
a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)

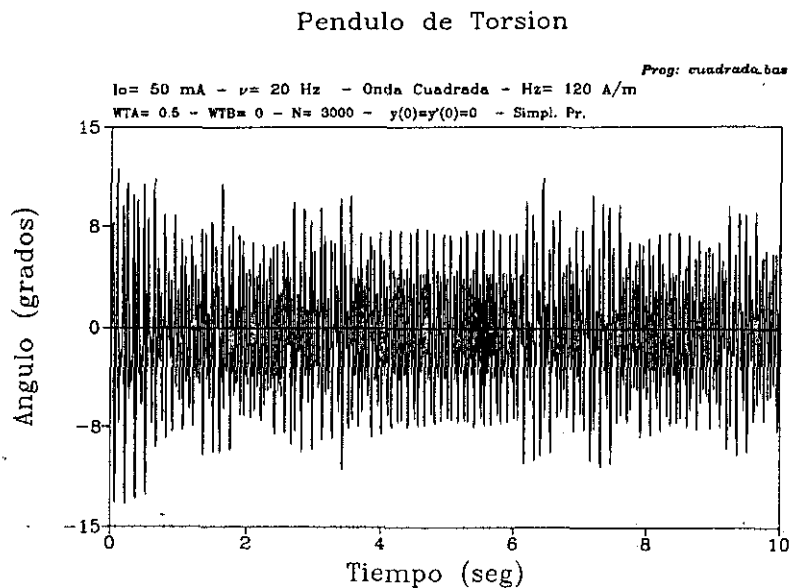


b)

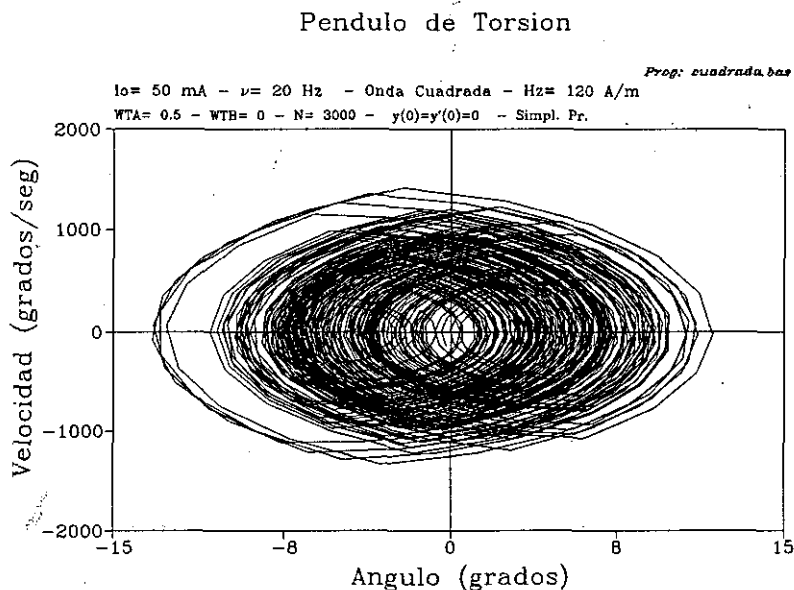


c)

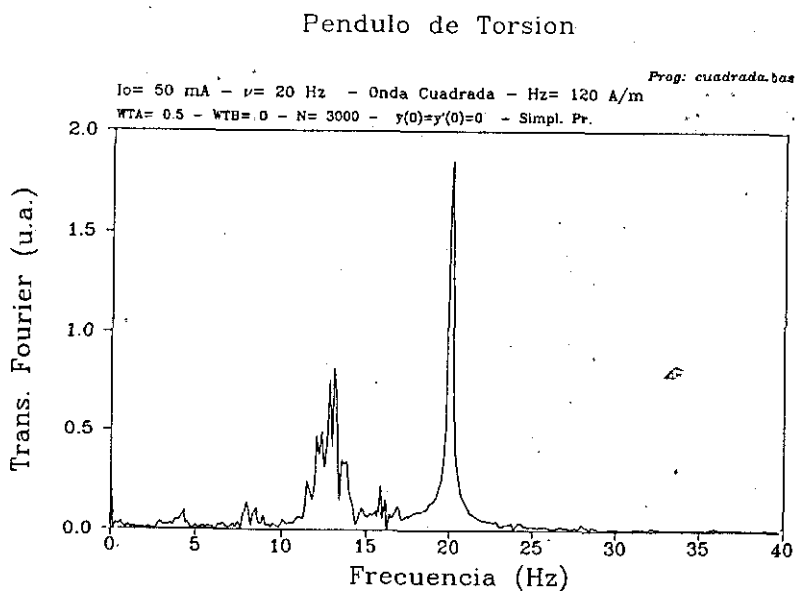
Figura 15 -. Dinámica para corriente cuadrada de frecuencia $\nu = 20$ Hz, $I = 50$ mA y campo $H_z = 120$ A/m. a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias



a)



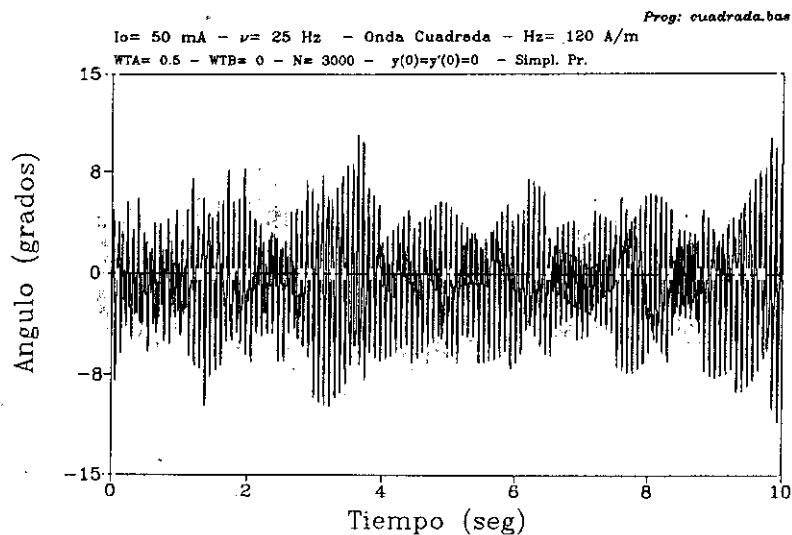
b)



c)

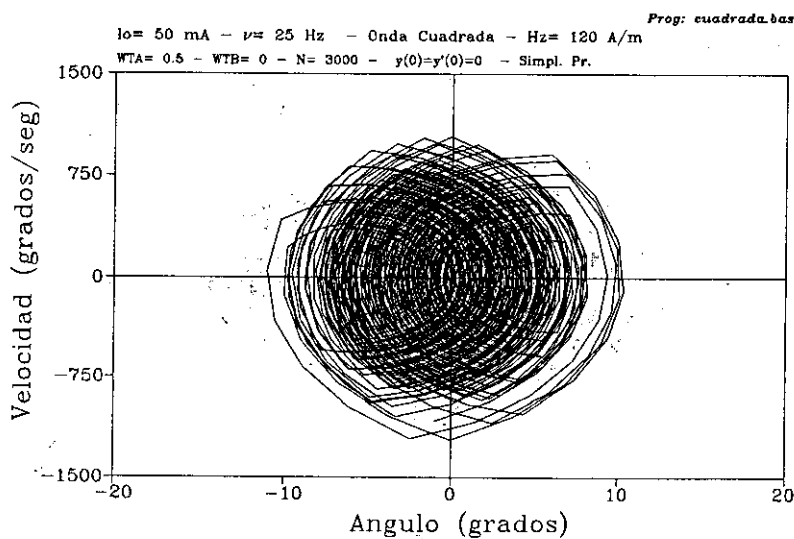
Figura 16 -: Dinámica para corriente cuadrada de frecuencia $\nu = 25$ Hz, $I = 50$ mA y campo $H_z = 120$ A/m. a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



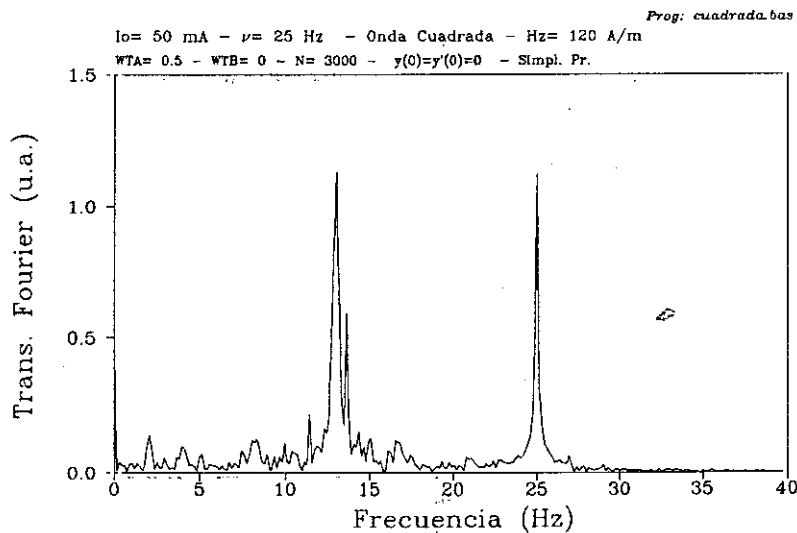
a)

Pendulo de Torsion



b)

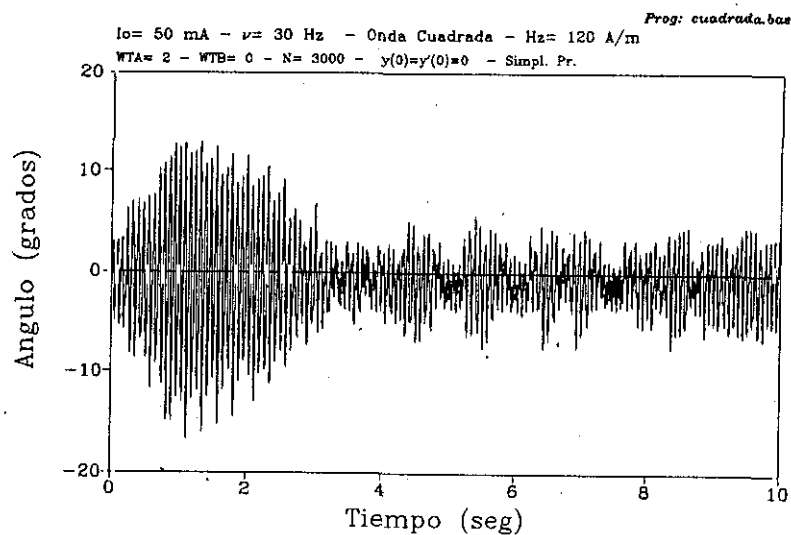
Pendulo de Torsion



c)

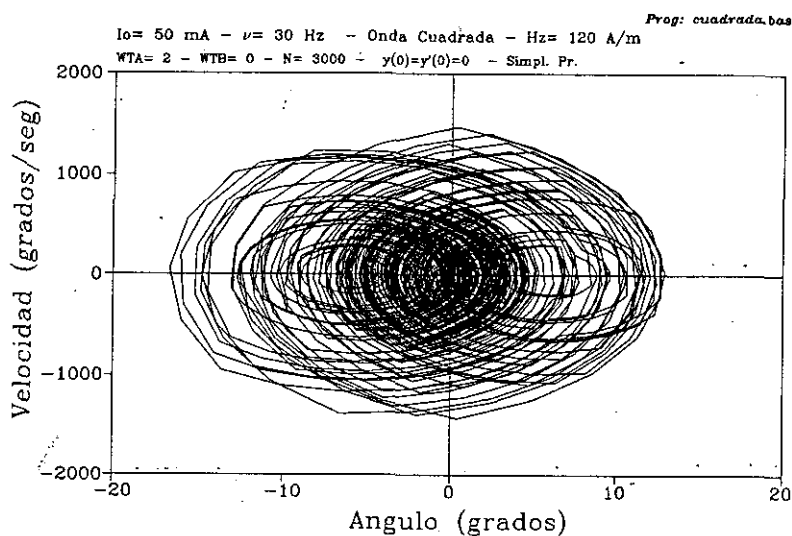
Figura 17 -. Dinámica para corriente cuadrada de frecuencia $\nu = 30$ Hz, $I = 50$ mA y campo $H_z = 120$ A/m. a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



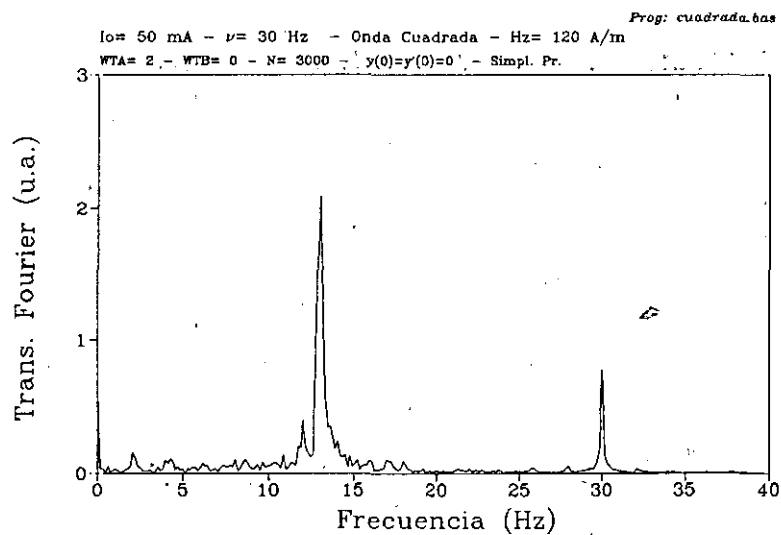
a)

Pendulo de Torsion



b)

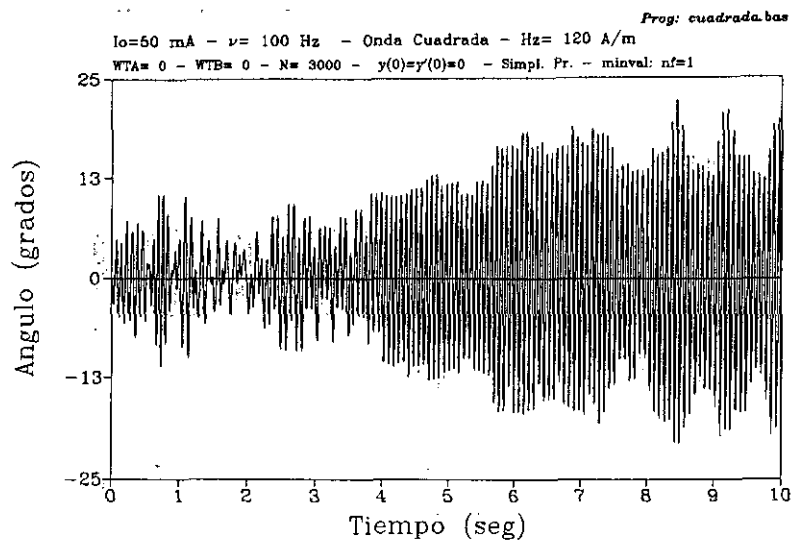
Pendulo de Torsion



c)

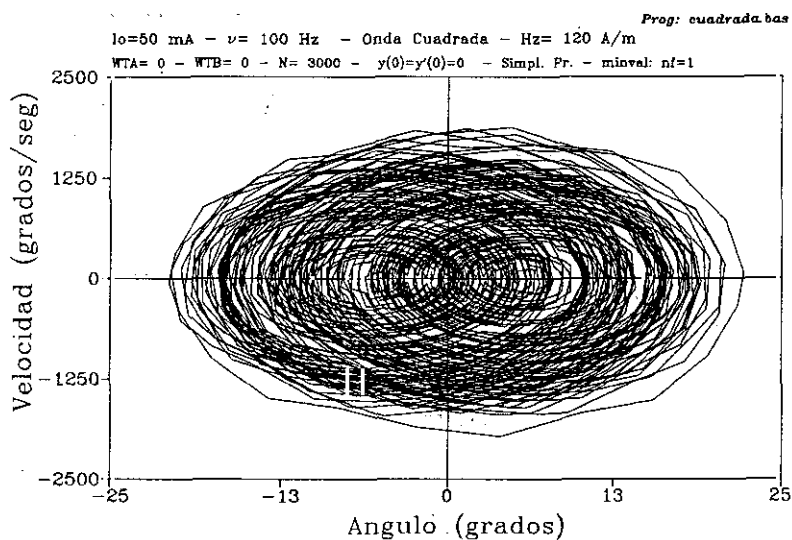
Figura 18 -. Dinámica para corriente cuadrada de frecuencia $\nu = 100$ Hz, $I = 50$ mA y campo $H_z = 120$ A/m. a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



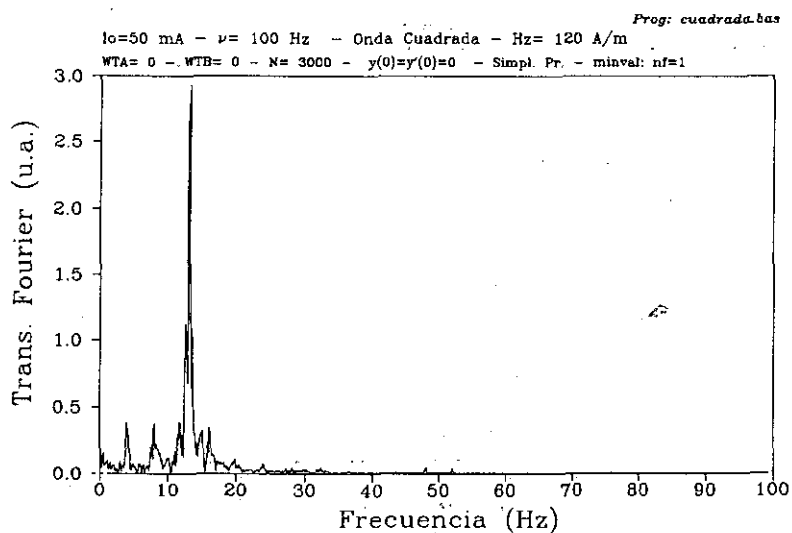
a)

Pendulo de Torsion



b)

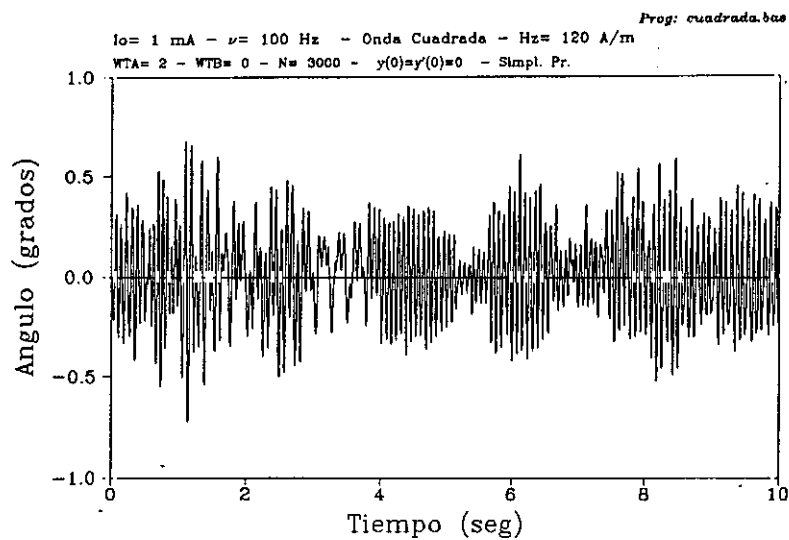
Pendulo de Torsion



c)

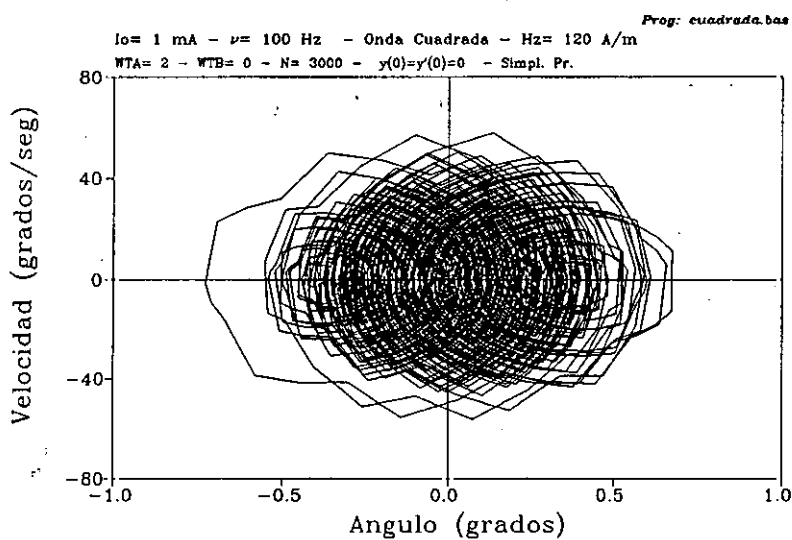
Figura 19 -. Dinámica para corriente cuadrada de frecuencia $\nu = 100$ Hz, $I = 1$ mA, campo $H_z = 120$ A/m y amortiguamiento $WTA = 2$ s⁻¹. a) ángulo de deflexión, b) mapa de fases, c) espectro de frecuencias

Pendulo de Torsion



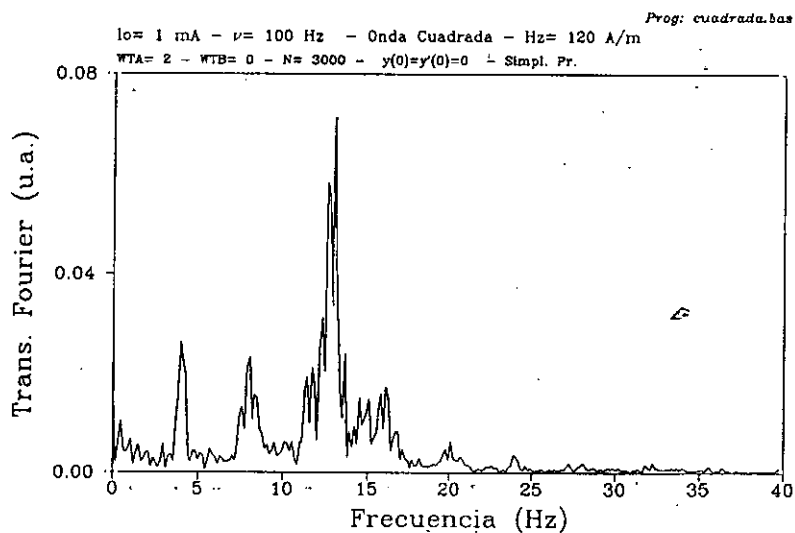
a)

Pendulo de Torsion



b)

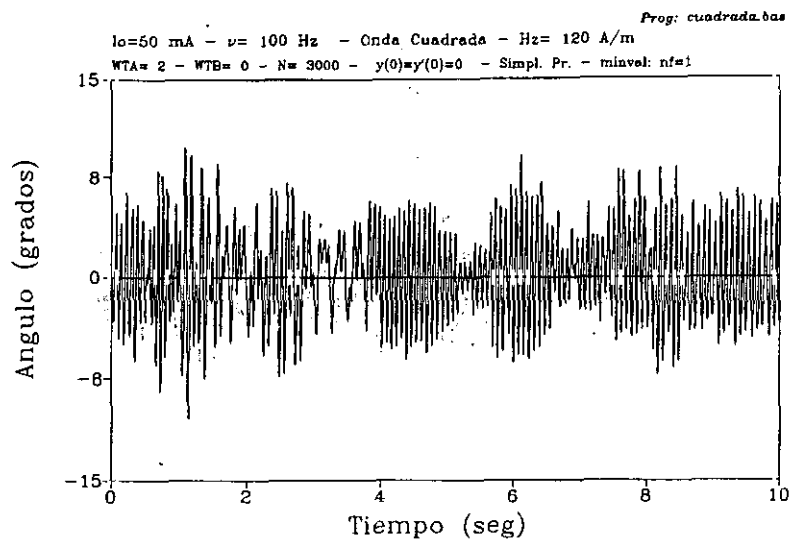
Pendulo de Torsion



c)

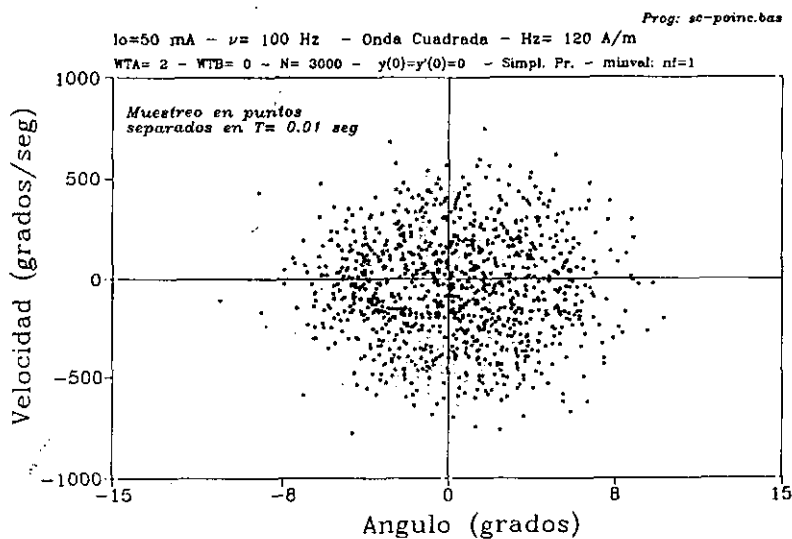
Figura 20 -. a) Señal temporal para para corriente cuadrada de frecuencia $\nu = 100$ Hz,
b) sección de Poicaré para $T = 0.01$ seg, c) sección de Poincaré para $T = 0.1$ seg

Pendulo de Torsion



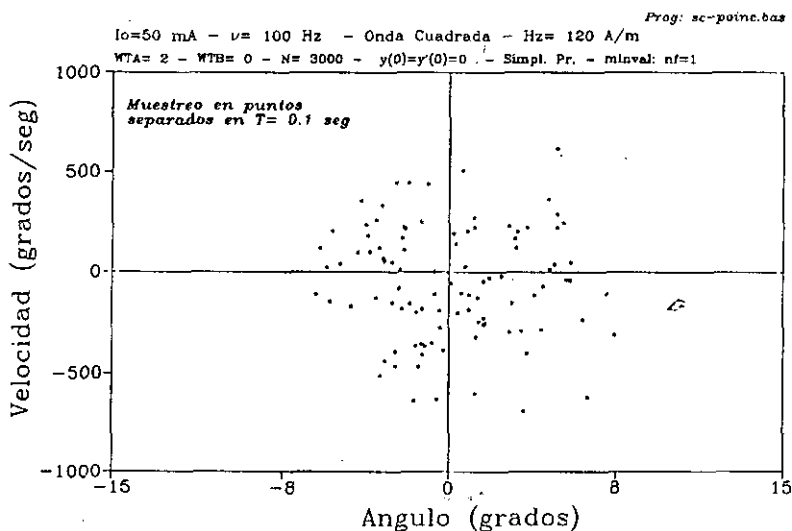
a)

Pendulo de Torsion - Secciones de Poincare



b)

Pendulo de Torsion - Secciones de Poincare



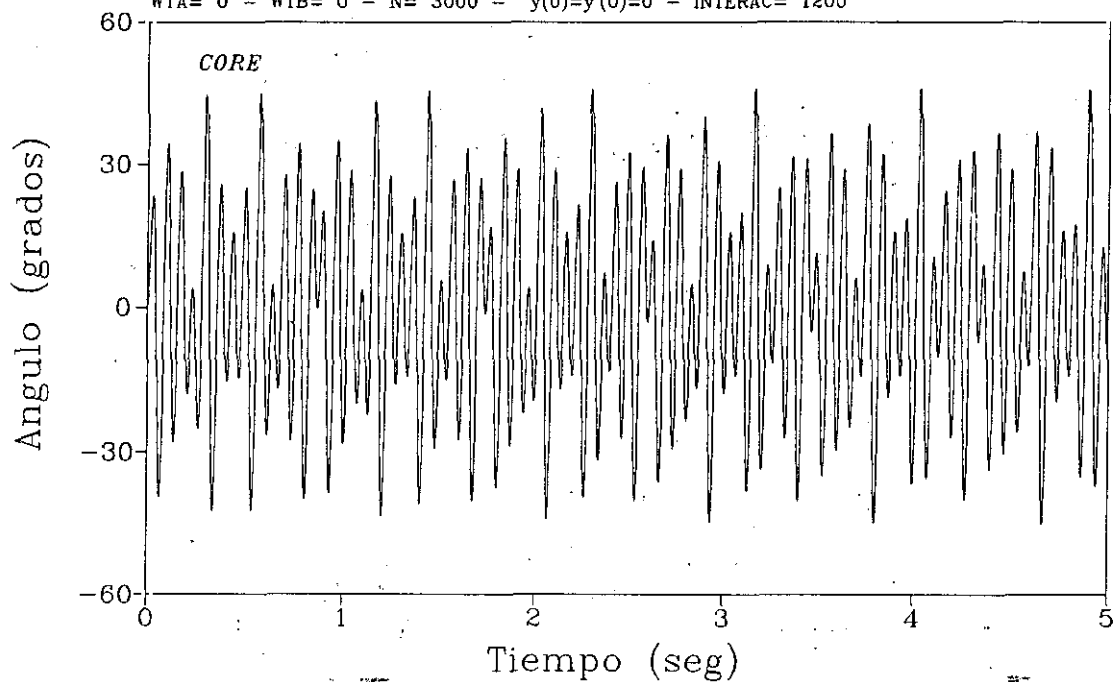
c)

Figura 21 -. Corriente sinusoidal. Interacción $W = 1200 \text{ s}^2$. a) Angulo de deflexión de cilindro interno, b) Angulo de deflexión de cilindro externo.

Pendulo de Torsion

Prog: pendt.bas

$G_{ZCORE} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $G_{ZSHELL} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $x_0 = 0.7$
 $I_0 = 50 \text{ mA}$ - $\nu = 15 \text{ Hz}$ - Onda Sinusoidal - $H_z = 120 \text{ A/m}$
 $WTA = 0$ - $WTB = 0$ - $N = 3000$ - $y(0) = y'(0) = 0$ - $INTERAC = 1200$



Pendulo de Torsion

Prog: pendt.bas

$G_{ZCORE} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $G_{ZSHELL} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $x_0 = 0.7$
 $I_0 = 50 \text{ mA}$ - $\nu = 15 \text{ Hz}$ - Onda Sinusoidal - $H_z = 120 \text{ A/m}$
 $WTA = 0$ - $WTB = 0$ - $N = 3000$ - $y(0) = y'(0) = 0$ - $INTERAC = 1200$

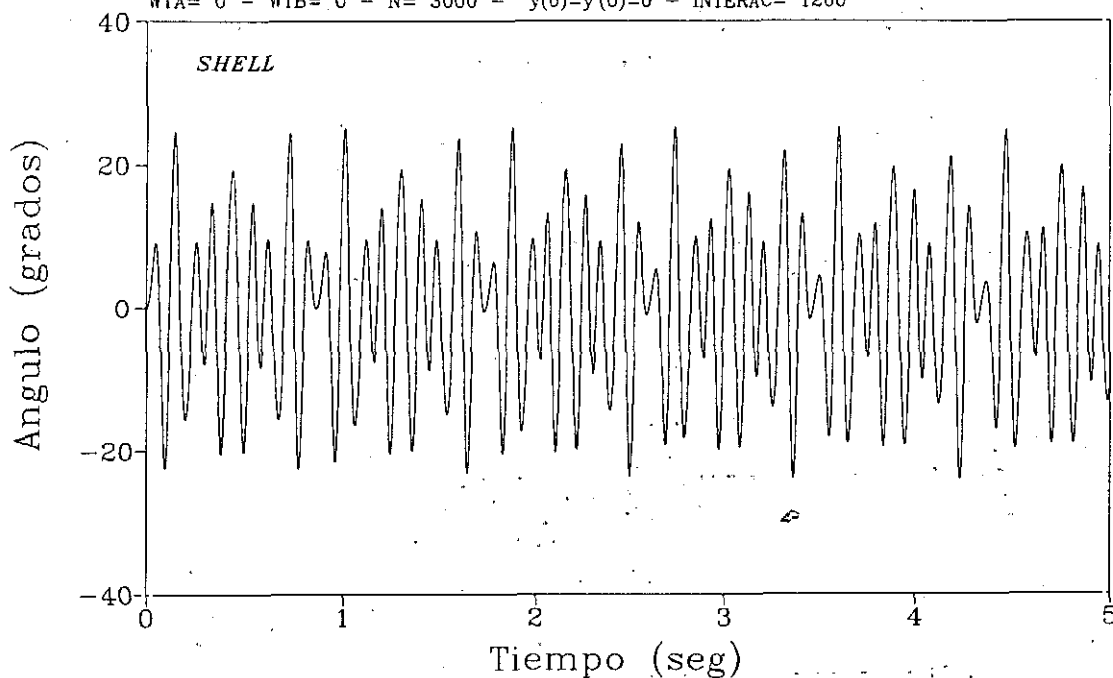
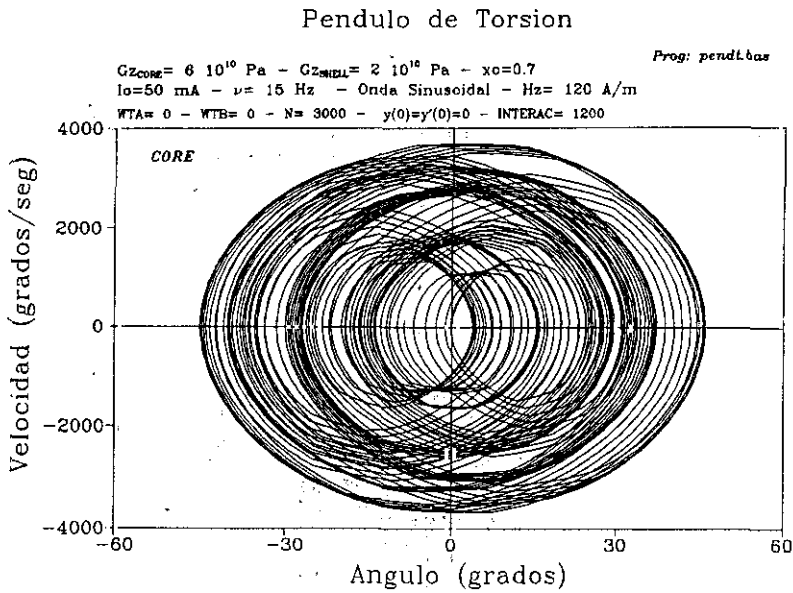
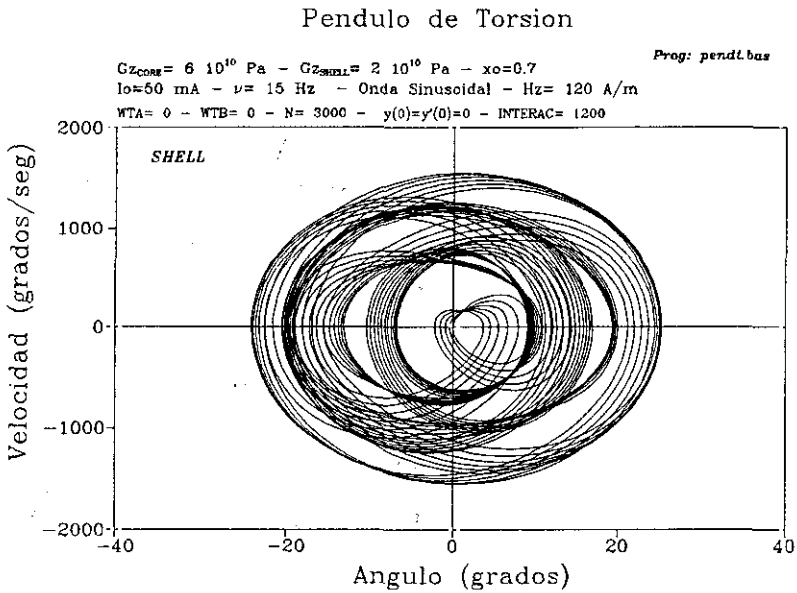


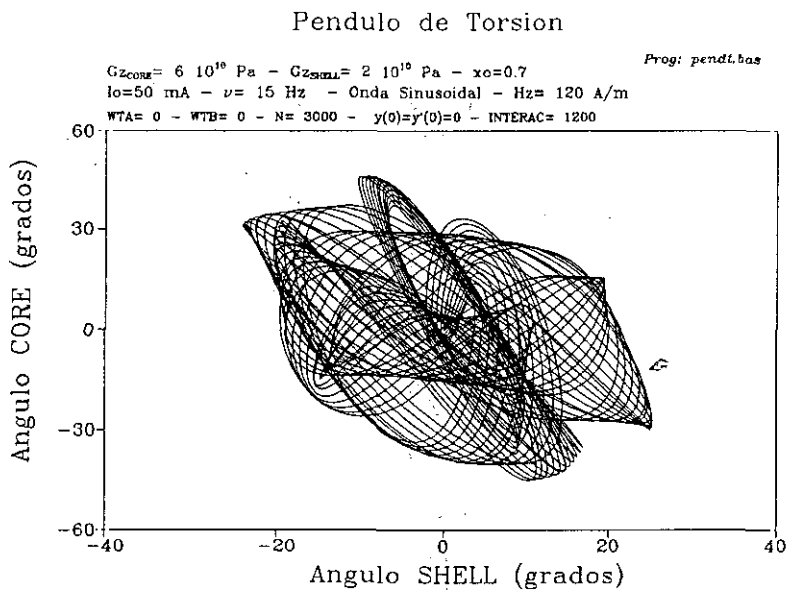
Figura 22 -. Onda sinusoidal. Interacción $W=1200\text{ s}^{-2}$. a) Espacio de fases para cilindro interno, b) Espacio de fases para cilindro externo, c) correlación de movimientos



a)



b)



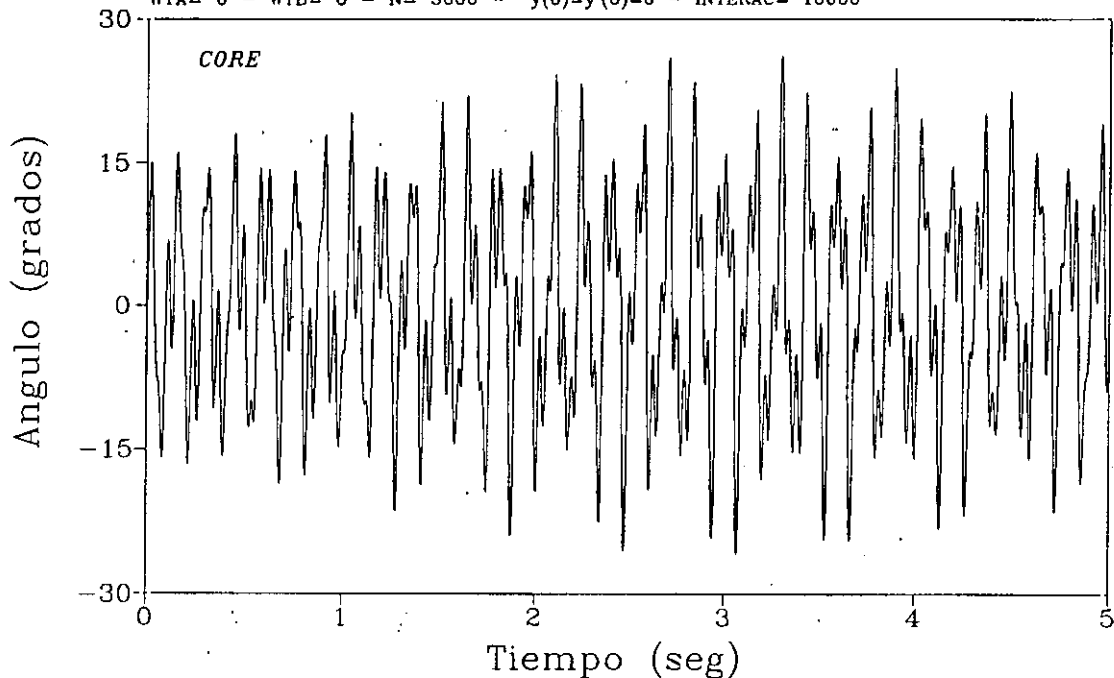
c)

Figura 23 -. Corriente sinusoidal. Interacción $W = 10000 \text{ s}^{-2}$: a) Angulo de deflexión de cilindro interno, b) Angulo de deflexión de cilindro externo.

Pendulo de Torsion

$G_{ZCORE} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $G_{ZSHELL} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $x_0 = 0.7$
 $I_0 = 50 \text{ mA}$ - $\nu = 15 \text{ Hz}$ - Onda Sinusoidal - $H_z = 120 \text{ A/m}$
 $WTA = 0$ - $WTB = 0$ - $N = 3000$ - $y(0) = y'(0) = 0$ - $INTERAC = 10000$

Prog: pendt.bas



Pendulo de Torsion

$G_{ZCORE} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $G_{ZSHELL} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $x_0 = 0.7$
 $I_0 = 50 \text{ mA}$ - $\nu = 15 \text{ Hz}$ - Onda Sinusoidal - $H_z = 120 \text{ A/m}$
 $WTA = 0$ - $WTB = 0$ - $N = 3000$ - $y(0) = y'(0) = 0$ - $INTERAC = 10000$

Prog: pendt.bas

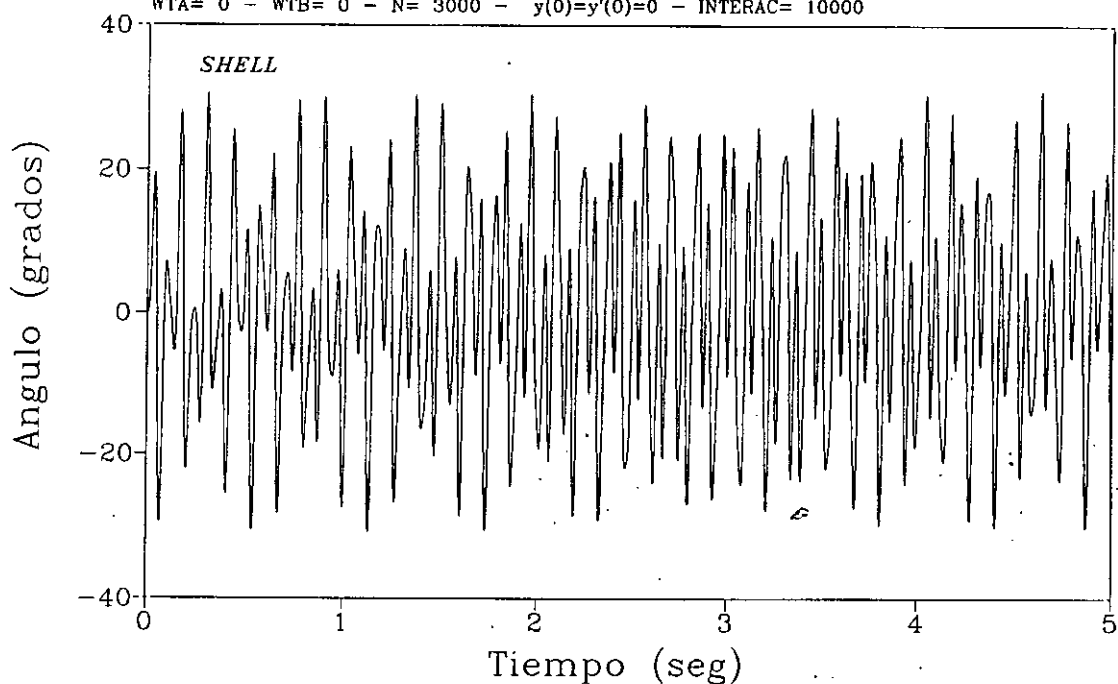
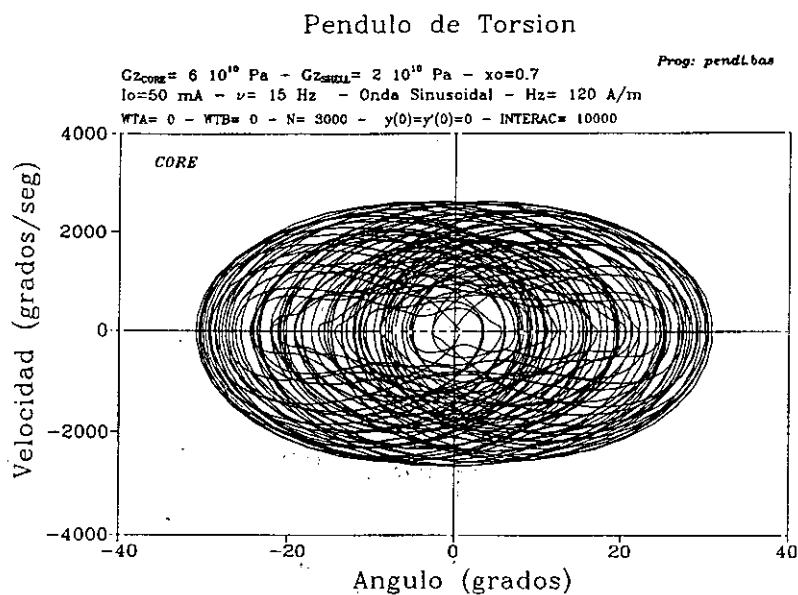
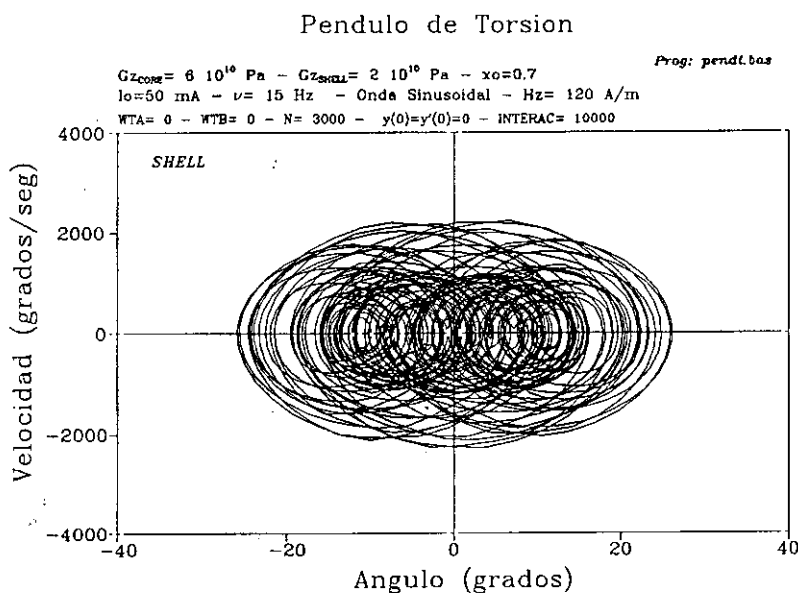


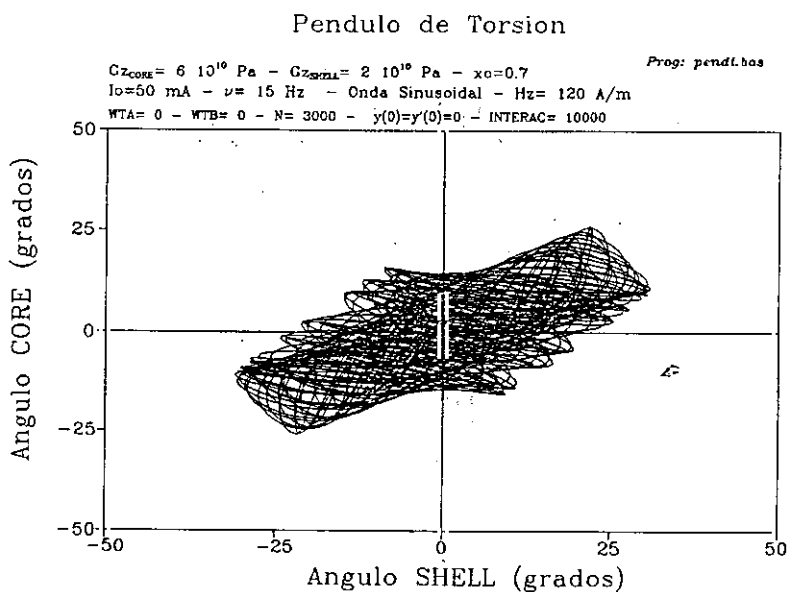
Figura 24 -. Onda sinusoidal. Interacción $W_{int}=10000 \text{ s}^{-2}$. a) Espacio de fases para cilindro interno, b) Espacio de fases para cilindro externo, c) correlación de movimientos



a)



b)



c)

Figura 25 -. Onda sinusoidal. Amortiguamiento elevado. a) Espacio de fases para cilindro interno, b) Espacio de fases para cilindro externo, c) correlación de movimientos

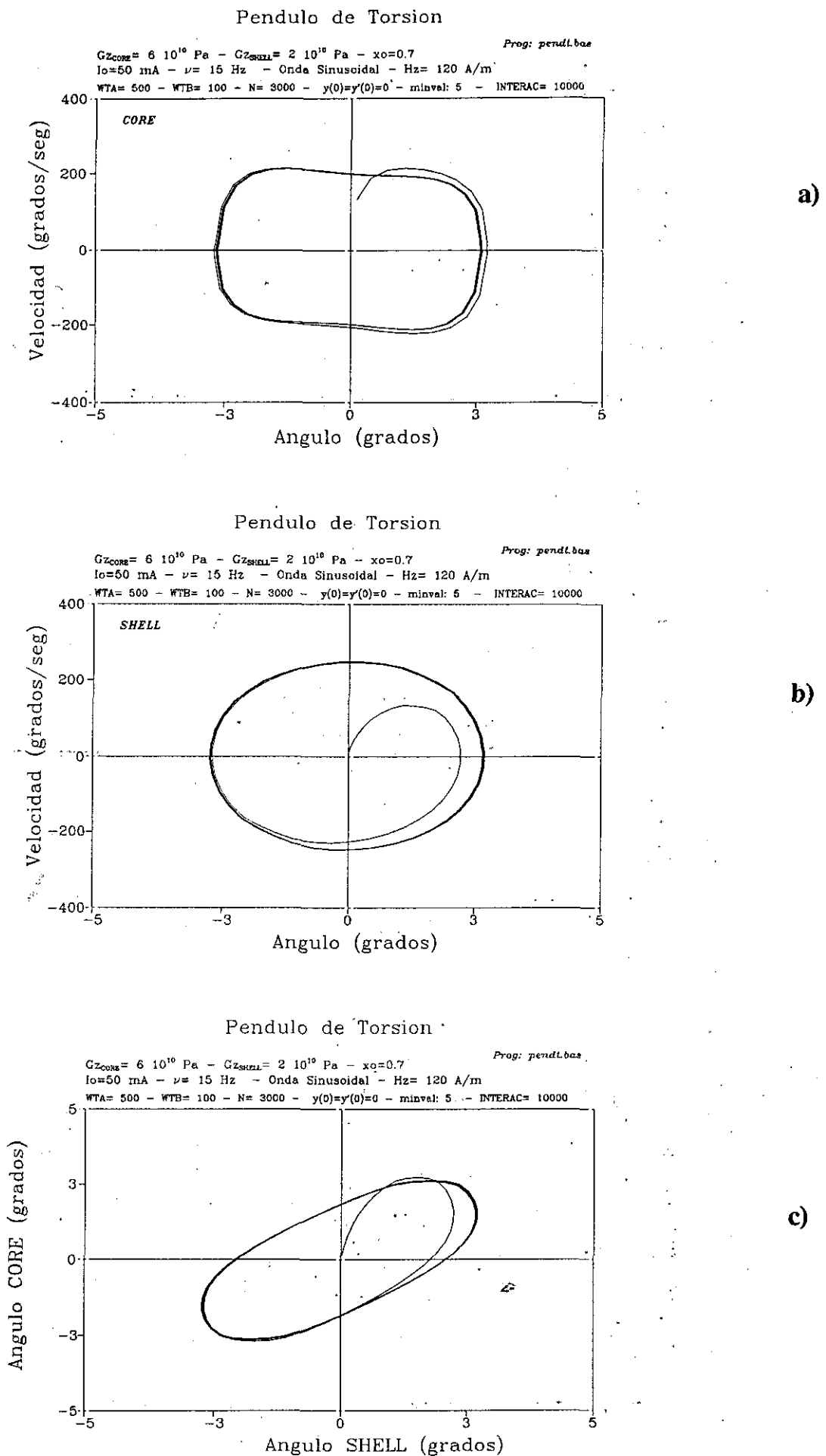


Figura 26 -. Corriente cuadrada. Interacción $W = 1000 \text{ s}^2$. a) Angulo de deflexión de cilindro interno, b) Angulo de deflexión de cilindro externo.

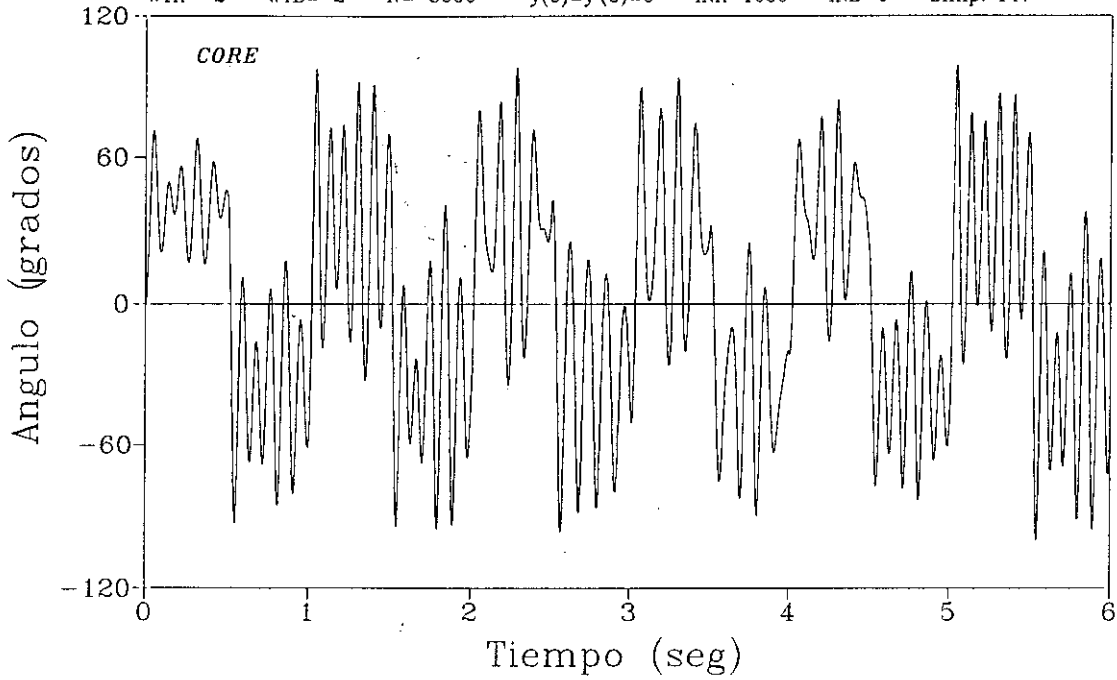
Pendulo de Torsion

$GZ_{\text{CORE}} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $GZ_{\text{SHELL}} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $x_0 = 0.7$

Prog: sqrpendt.bas

$I_0 = 50 \text{ mA}$ - $\nu = 1 \text{ Hz}$ - Onda Cuadrada - $H_z = 120 \text{ A/m}$

$WTA = 2$ - $WTB = 2$ - $N = 3000$ - $y(0) = y'(0) = 0$ - $INA = 1000$ - $INB = 0$ - Simp. Pr.



Pendulo de Torsion

$GZ_{\text{CORE}} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $GZ_{\text{SHELL}} = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $x_0 = 0.7$

Prog: sqrpendt.bas

$I_0 = 50 \text{ mA}$ - $\nu = 1 \text{ Hz}$ - Onda Cuadrada - $H_z = 120 \text{ A/m}$

$WTA = 2$ - $WTB = 2$ - $N = 3000$ - $y(0) = y'(0) = 0$ - $INA = 1000$ - $INB = 0$ - Simp. Pr.

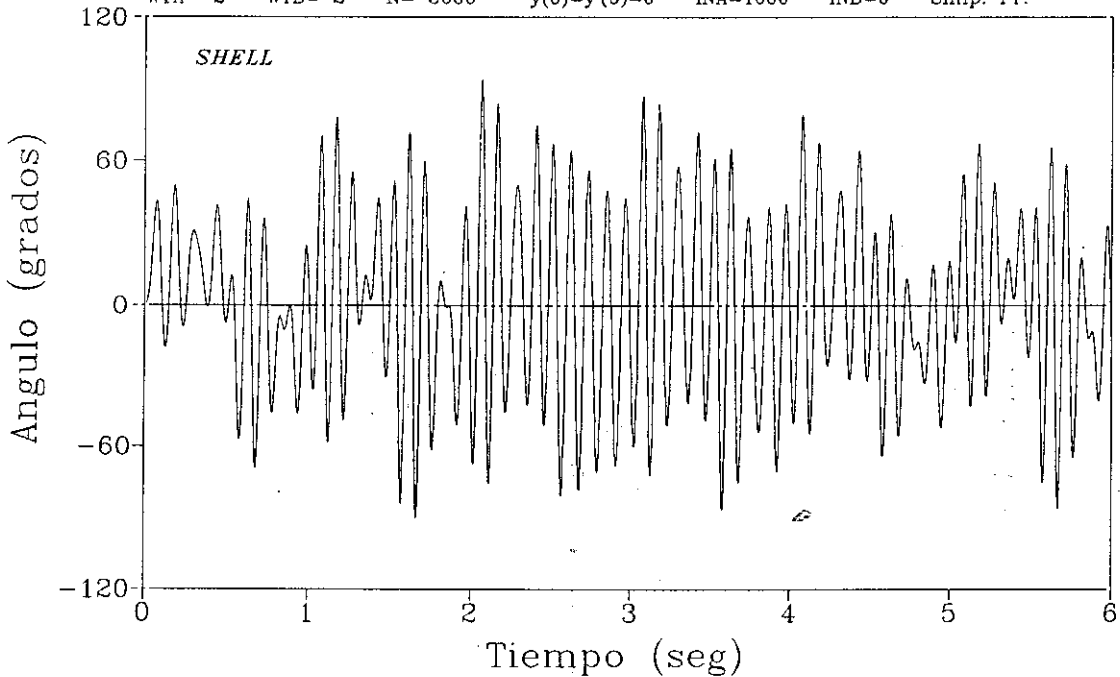
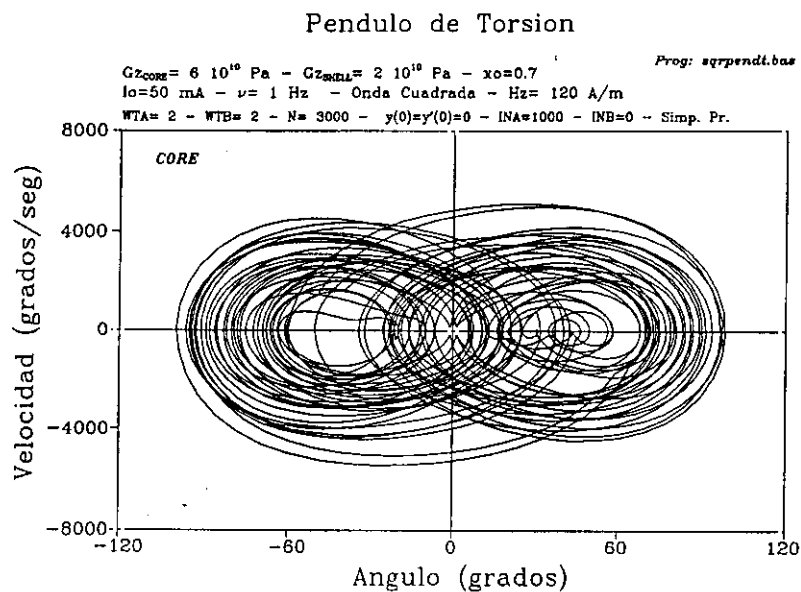
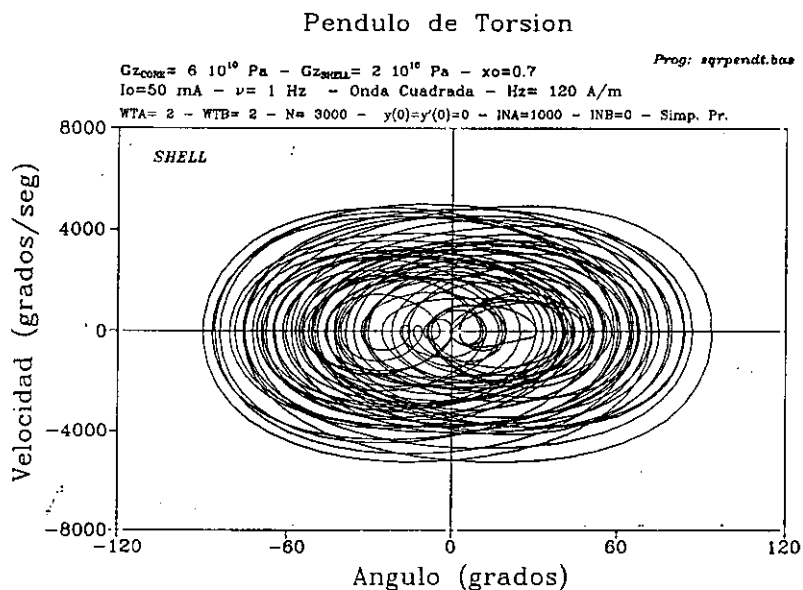


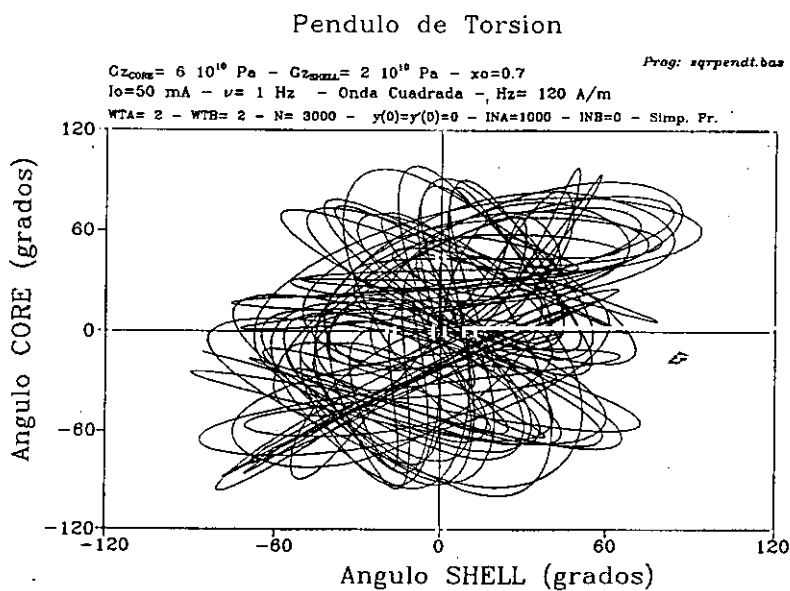
Figura 27 -. Onda cuadrada. Interacción $W = 1000 \text{ s}^2$. a) Espacio de fases para cilindro interno, b) Espacio de fases para cilindro externo, c) correlación de movimientos



a)



b)

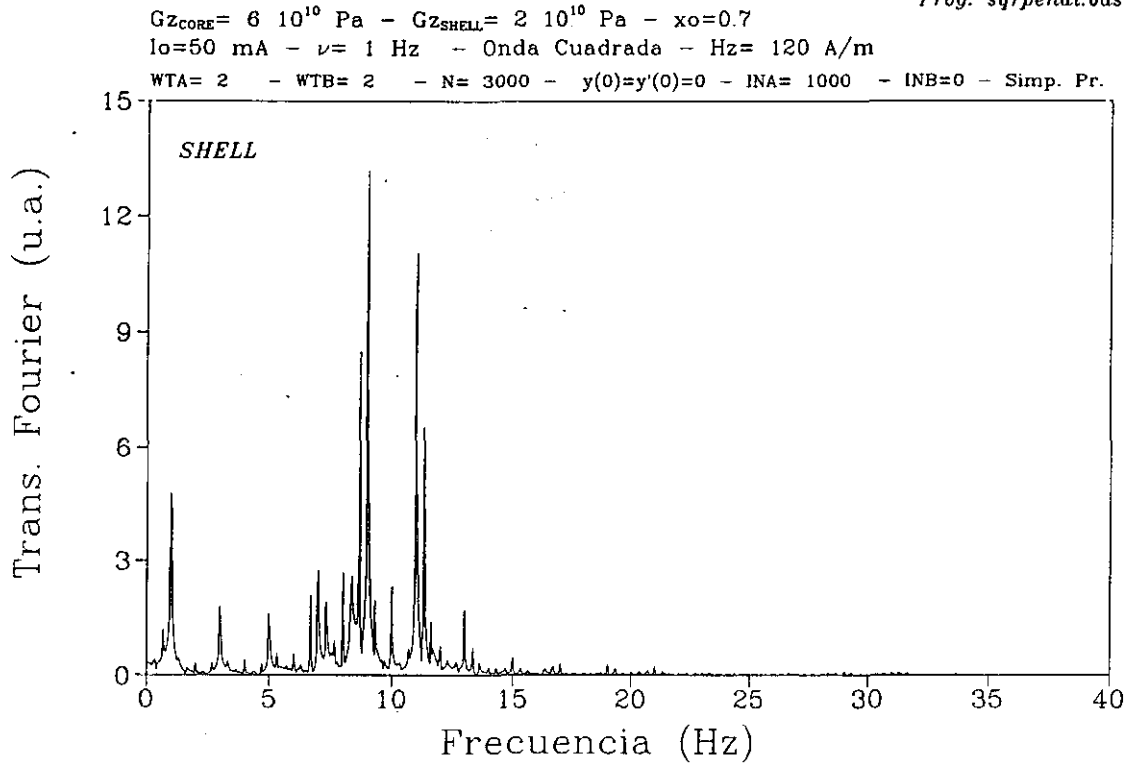


c)

Figura 28 -. Corriente cuadrada. Interacción $W = 1000 \text{ s}^2$. a) Espectro de frecuencias para $WTA = WTB = 2 \text{ s}^{-1}$, b) Espectro de frecuencias para $WTA = WTB = 0.5 \text{ s}^{-1}$

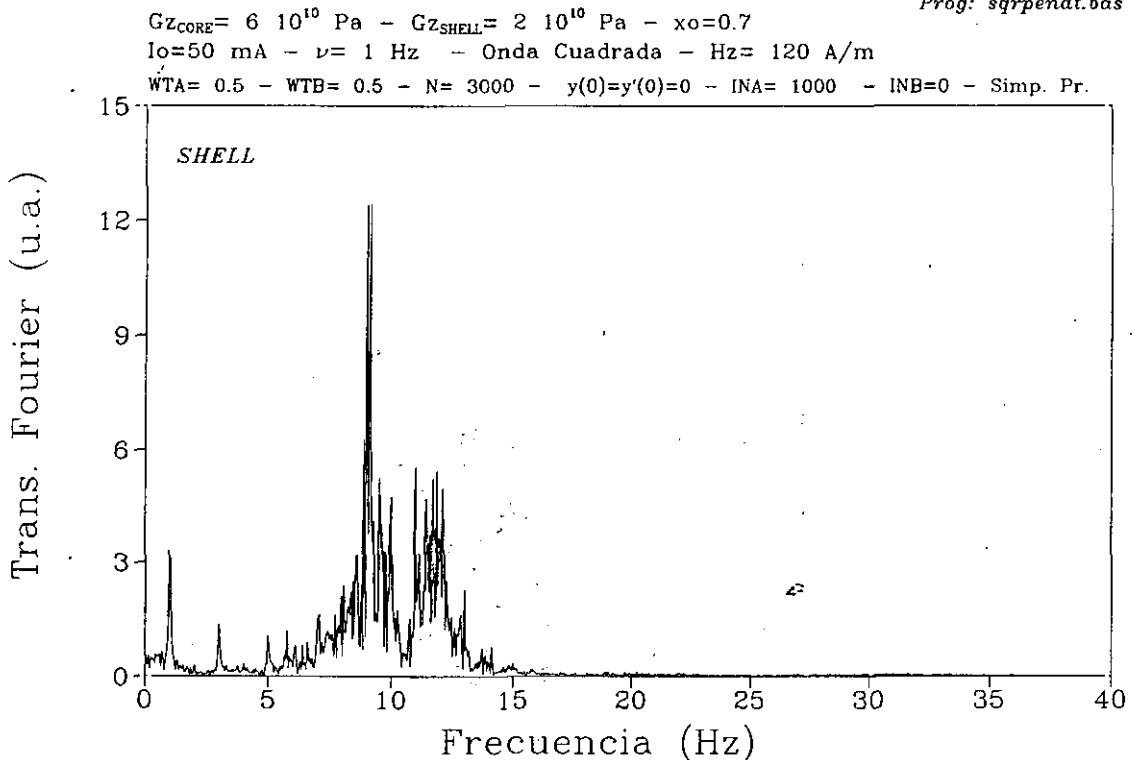
Pendulo de Torsion

Prog: *sqrpendt.bas*



Pendulo de Torsion

Prog: *sqrpendt.bas*



V - MODULOS ELASTICOS EN HILOS AMORFOS

MODULOS ELASTICOS EN HILOS AMORFOS

Introducción

La respuesta de un material ante la aplicación de tensiones o torsiones queda caracterizadas por el módulo de Young, E , y el módulo de cizalladura, G .

En los sólidos magnetoelásticos existe una interacción entre los momentos magnéticos de los átomos constitutivos y las características elásticas del material; la magnitud del acople viene caracterizada por la *constante de magnetostricción*. Desde un enfoque puramente termodinámico, se puede decir que la energía libre total, F , del cuerpo magnetoelástico resulta de la suma de tres contribuciones (Hernando, 1987): energía magnética, F_m , energía elástica, F_e , y energía magnetoelástica, F_{me} :

$$F = F_e(\epsilon) + F_m(M) + F_{me}(\epsilon, M) \quad (1)$$

donde ϵ representa la deformación elástica del cuerpo y M es la imanación.

Si llamamos H al *campo magnético aplicado* que produce la variación de la imanación y T a la tensión mecánica que modifica el estado de deformación, ambas magnitudes pueden obtenerse a partir de la energía libre:

$$H = \frac{\partial F}{\partial M} \quad T = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \quad (2)$$

Por tanto, H y T dependen de M y ϵ , es decir $H = H(M, \epsilon)$ y $T = T(M, \epsilon)$. Ello quiere decir que un incremento diferencial del campo magnético, dH , inducirá un cambio en la deformación, $d\epsilon$, y en el estado de imanación, dM . Algo similar ocurre cuando se modifica la tensión aplicada sobre el cuerpo. Matemáticamente se expresa en la forma:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_\epsilon dM + \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon}\right)_M d\epsilon = \frac{1}{\chi^\epsilon} dM - \lambda^* d\epsilon \quad (3)$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_\epsilon dM + \left(\frac{\partial T}{\partial \epsilon}\right)_M d\epsilon = E^M d\epsilon - \lambda^* dM \quad (4)$$

donde χ^ϵ es la susceptibilidad a deformación constante, E^M es el módulo de Young a imanación constante y λ^* es la magnitud que representa la conexión entre las propiedades elásticas y magnéticas, y que tiene el valor:

$$-\lambda^* = \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_\epsilon = \left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon}\right)_M \quad (5)$$

Ambas derivadas parciales son iguales en virtud de la condición de diferencial exacta de dH y dT , por lo que se ha de verificar $\partial^2 F / \partial M \partial \epsilon = \partial^2 F / \partial \epsilon \partial M$.

¿Qué le ocurre a un sólido magnetoelástico sometido a la acción de una tensión T y un campo magnético H , cuando se varía la tensión manteniendo el campo constante?. Si el campo es constante, se tendrá que $dH=0$, por lo que en la expresión (3) se verificará:

$$0 = \frac{1}{\chi^e} dM - \lambda^* de \quad \rightarrow \quad dM = \lambda^* \chi^e de \quad (6)$$

es decir, las variaciones de la imanación y de la deformación están relacionadas gracias a λ^* .

Introduciendo el valor de dM en la expresión (4):

$$dT = E^M de - \lambda^{*2} \chi^e de = [E^M - (\lambda^*)^2 \chi^e] de = E^H de \quad (7)$$

donde E^H representa el módulo de Young a campo constante. Se tiene por tanto que:

$$E^H = E^M - (\lambda^*)^2 \chi^e \quad (8)$$

Es decir, el módulo de Young es distinto cuando el cuerpo es sometido a un campo magnético (E^H) que cuando no lo está (E^M). La diferencia viene dada por la presencia de λ^* , cantidad representativa de la interacción magnetoelástica.

La expresión (8) muestra que el módulo de Young a campo constante *es menor* que el obtenido a imanación constante. Ello se debe a que el campo orienta la imanación en su dirección con el consiguiente aumento de la deformación magnetostrictiva en esa dirección (si la constante de magnetostricción es positiva), por lo que, ante una tensión de tracción aplicada en la misma dirección del campo, se obtendría una deformación mayor que la puramente elástica; por consiguiente, el módulo de Young debe ser menor. Bajo la aplicación del campo, el sólido es más blando, desde el punto de vista elástico.

La variación del módulo de Young con el campo se cuantifica mediante la cantidad:

$$\frac{\Delta E}{E^M} = \frac{E^H - E^M}{E^M} \quad (9)$$

que en algunas aleaciones amorfas llega a alcanzar valores del 165% (Hernando, 1987).

El módulo de cizalladura, G , que relaciona las torsiones con las deformaciones torsionales, presenta asimismo una variación con el campo magnético. El razonamiento termodinámico para obtenerla es análogo al anterior.

Para hallar la magnitud del llamado *efecto ΔE (o ΔG)*, hay que encontrar una expresión para λ^* . Para calcular esta magnitud, vamos a hacer uso de un *modelo magnético en que la imanación cambia por rotaciones*

Antes de entrar en el detalle del cálculo, vamos a determinar el valor de las componentes del tensor de deformación cuando existe acople magnetoelástico.

Deformaciones magnetoelásticas

Se desea obtener la expresión de las componentes del tensor deformación en función de las constantes elásticas del material y de la posición de la imanación.

Dado que estamos interesados en sistemas con simetría cilíndrica, vamos a considerar el siguiente sistema de referencia (figura 1).

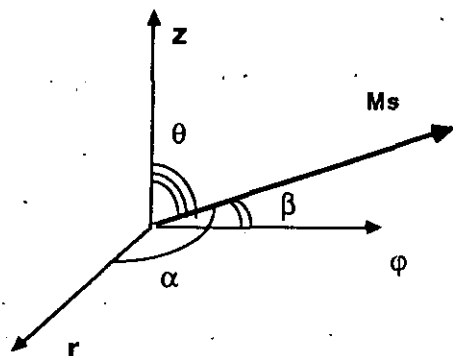


Figura 1 -. Sistema de referencia

donde r es el eje radial, z el axial y ϕ el circular.

Supóngase que disponemos de un sólido magnetoelástico de forma cilíndrica y que se aplica una tensión de tracción T en la dirección del eje del hilo. Simultáneamente, se aplica un campo axial, H_z , y un campo circular, H_ϕ , consecuencia del flujo de una corriente eléctrica a través del hilo.

Vamos a expresar la energía total de un sólido magnetoelástico en función de las componentes de deformación; aplicando la condición de extremo a la energía (las derivadas respecto de las deformaciones han de ser nulas) se obtiene la expresión de las deformaciones. La energía tiene dos contribuciones: elástica y magnetoelástica.

Energía elástica

La densidad de energía elástica para un cristal cúbico tiene la forma (Brown, 1970):

$$D_{el} = \frac{1}{2} c_{11} [e_{rr}^2 + e_{\phi\phi}^2 + e_{zz}^2] + c_{12} [e_{\phi\phi} e_{zz} + e_{zz} e_{rr} + e_{rr} e_{\phi\phi}] + \frac{1}{2} c_{44} [e_{\phi z}^2 + e_{zr}^2 + e_{r\phi}^2] - e_{zz} T \quad (10)$$

donde las c_{ij} son las constantes elásticas y las e_{ij} las componentes del tensor de deformación (su significado ya se especificó en el capítulo dedicado a las tensiones elásticas). Los módulos elásticos están relacionados con el valor de estas constantes:

$$E_o = \frac{(c_{11}-c_{12})(2c_{12}+c_{11})}{c_{11}+c_{12}}, \quad G_o = c_{44}, \quad \nu_o = \frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}} \quad (11)$$

donde E_o , G_o y ν_o son el módulo de Young, el módulo de cizalladura y el coeficiente de Poisson, respectivamente. Para el caso de *sólidos isótropos* se tiene que $c_{44} = (1/2) \cdot (c_{11} - c_{12})$, en cuyo caso $G = E/(1 + \nu)$

Energía magnetoelástica

Para cristales cúbicos tiene la forma (Chikazumi, 1964):

$$D_{me} = B_1 \left[e_{rr} \left(\alpha_r^2 - \frac{1}{3} \right) + e_{\phi\phi} \left(\alpha_\phi^2 - \frac{1}{3} \right) + e_{zz} \left(\alpha_z^2 - \frac{1}{3} \right) \right] + B_2 [e_{r\phi} \alpha_r \alpha_\phi + e_{\phi z} \alpha_\phi \alpha_z + e_{rz} \alpha_r \alpha_z] \quad (12)$$

con $\alpha_r = \cos \alpha$, $\alpha_\phi = \cos \beta$ y $\alpha_z = \cos \theta$, siendo α , β y θ los ángulos que forma la imanación con las direcciones radial, circular y axial, respectivamente (ver figura 1) y donde

$$B_1 = -\frac{3}{2} \lambda_{100} (c_{11} - c_{12}) \quad B_2 = -3 \lambda_{111} c_{44} \quad (13)$$

siendo λ_{100} y λ_{111} las constantes de magnetostricción en las direcciones [100] y [111]. Si consideramos un sólido isótropo, se tiene que $\lambda = \lambda_{100} = \lambda_{111}$.

Extremo de la energía total

La densidad de energía total se expresará como una función de los ángulos de la imanación y de las constantes elásticas e_{ij} :

$$D(\alpha, \beta, \theta, c_{ij}) = D_e(c_{ij}) + D_{me}(\alpha, \beta, \theta, c_{ij}) + D_h(\alpha, \beta, \theta) \quad (14)$$

donde $D_h(\alpha, \beta, \theta)$ es la densidad de energía debida a la aplicación de los campos magnéticos, de forma que una vez fijados éstos, quedan determinados los ángulos. Las deformaciones compatibles con el valor dado de los ángulos, se obtendrá aplicando la condición de extremo a la densidad de energía total:

$$\frac{\partial D}{\partial e_{ij}} = 0 \quad (15)$$

De esta forma se pueden obtener las deformaciones e_{ij} que aparecen cuando la imanación se sitúa en la posición dada por los ángulos α , β y θ . Se encuentran los valores:

$$e_{zz} = \frac{T}{E_o} + \frac{3}{2} \lambda (\cos^2 \theta - \frac{1}{3}), \quad e_{rr} = 3 \lambda \cos \theta \cos \alpha \quad (16)$$

$$e_{rr} = -[v_o \frac{T}{E_o} + \frac{3}{2} \lambda (\cos^2 \theta + \cos^2 \beta - \frac{2}{3})], \quad e_{r\theta} = 3\lambda \cos \alpha \cos \beta \quad (17)$$

$$e_{\phi\phi} = [\frac{c_{12}}{c_{11}}(v_o - 1) \frac{T}{E_o} + \frac{3}{2} \lambda (\cos^2 \beta - \frac{1}{3})], \quad e_{\phi z} = 3\lambda \cos \theta \cos \beta \quad (18)$$

Las componentes diagonales del tensor deformación tienen dos contribuciones: una puramente elástica y otra resultado de la presencia de magnetostricción. Las componentes no diagonales, esto es, las deformaciones de cizalladura, son debidas únicamente a la magnetostricción. El valor de los ángulos α , β y θ vendrá determinado por el valor de los campos magnéticos, por lo que éstos; el alargamiento e_{zz} vendrá determinado no sólo por la tensión T sino también por el valor de los campos.

Si en vez de someter al hilo a una tracción, se le aplica una torsión, τ , y se realiza el mismo cálculo, se encuentra que la deformación $e_{\phi z}$ toma el valor:

$$e_{\phi z} = \frac{\tau}{G_o} + 3\lambda \cos \beta \cos \theta = \gamma \quad (19)$$

que representa la deformación angular producida en el cilindro al aplicar una torsión τ simultáneamente a la aplicación de los campos magnéticos H_z y H_ϕ . El módulo G_o es el que se obtendría cuando no hay acople magnetoelástico, y es el que se obtendría si la muestra estuviese totalmente saturada.

Módulo de cizalladura. Expresión general

La deformación angular, γ , producida al aplicar una torsión, τ , viene dada por (19). La definición del módulo de cizalladura (Timoshenko, 1968) afirma que:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{1}{G} \quad (20)$$

con lo cual:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{1}{G} = \frac{1}{G_0} + 3\lambda \frac{\partial}{\partial \tau} (\cos \beta \cos \theta) \quad (21)$$

Derivando los ángulos, se obtiene:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_0} + 3\lambda \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau} (\cos \beta) + \cos \beta \frac{\partial}{\partial \tau} (\cos \theta) \right] = \quad (22)$$

$$= \frac{1}{G_0} - 3\lambda \left[\cos \theta \operatorname{sen} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \cos \beta \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] \quad (23)$$

Es decir, el módulo G depende del valor de las derivadas de los ángulos β y θ respecto de la torsión. Para hallar estos valores, se precisa de un *modelo* que de cuenta del movimiento de la imanación bajo la aplicación de torsiones. Vamos a considerar el modelo más sencillo, aquel en que la imanación varía por rotaciones y en el que ésta variación es inducida únicamente por el valor de los campos y las anisotropías, es decir, *no se considera la interacción de canje*. Las derivadas buscadas se encontrarán fácilmente a partir de la *densidad de energía total*. Se supone además que el hilo amorfo tiene longitud infinita, por lo que se desprecia el efecto del campo desimanador.

Densidad de energía

Sea un hilo amorfo al que se le aplica un campo axial H_z y otro circular H_ϕ . Se considera que en el hilo existe una anisotropía de valor K . Si tenemos en cuenta la estructura de dominios de los hilos amorfos ricos en hierro, esto es, un dominio interior con la imanación axial y otro externo con la imanación radial, el eje de anisotropía presentará una dirección dada en cada dominio. Teniendo en cuenta que la constante de magnetostricción es positiva, se tiene:

i) *Dominio interno* -. El eje de anisotropía es axial. La densidad de energía implicada sería del tipo $K \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$. La imanación tiende a ponerse en la dirección marcada por el eje de anisotropía (para hacer θ pequeño).

ii) *Dominio externo* -. El eje de anisotropía es radial y la densidad de energía es de la forma $K \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$

¿Cuál será de densidad de energía magnetoelástica debida a la aplicación de la torsión?
Tendrá el valor:

$$E = -\frac{3}{2} \lambda \tau \cos^2(\overline{M}, \overline{\tau}) \quad (24)$$

siendo $(\overline{M}, \overline{\tau})$ el ángulo que forman la imanación y el eje fácil introducido por la torsión. Dado que éste último forma un ángulo de 45° con el eje del hilo y con la dirección circular cilíndrica, los vectores unitarios en la dirección del eje fácil, \overline{u}_r , y de la imanación, \overline{u}_m , son:

$$\overline{u}_r = (0, \cos 45^\circ, \cos 45^\circ), \quad \overline{u}_m = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \theta) \quad (25)$$

con lo que su producto escalar es:

$$\overline{u}_m \cdot \overline{u}_r = \cos 45^\circ (\cos \beta + \cos \theta) \quad (26)$$

Entonces, la densidad de energía magnetoelástica es:

$$E = -\frac{3}{4} \lambda \tau (\cos \beta + \cos \theta)^2 \quad (27)$$

Si $\alpha = 90^\circ$, se tiene que $\cos \beta = \sin \theta$, con lo cual

$$E = -\frac{3}{4} \lambda \tau (\sin \beta + \cos \theta)^2 = -\frac{3}{4} \lambda \tau (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) = -\frac{3}{4} \lambda \tau (1 + \sin 2\theta) \quad (28)$$

Teniendo en cuenta este término energético, estamos en disposición de escribir las densidades de energía en cada dominio.

i) *Dominio externo (corteza)* -. Imanación radial, esto es, $\alpha \neq 90^\circ$.

$$E_C = -\mu_o M_s H_z \cos \theta - \mu_o M_s H_\phi \cos \beta + 2K - K \sin^2 \theta - K \sin^2 \beta - \frac{3}{4} \lambda \tau (\cos \beta + \cos \theta)^2 \quad (29)$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad trigonométrica $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \theta = 2$. La función $E_c = E_c(\theta, \beta)$ depende de dos ángulos.

ii) *Dominio interno (núcleo)* -. En éste la imanación verifica $\alpha = 90^\circ$.

$$E_N = -\mu_o M_s H_z \cos \theta - \mu_o M_s H_\phi \sin \theta + K \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \lambda \tau (1 + \sin 2\theta) \quad (30)$$

que depende únicamente de θ , $E_N = E_N(\theta)$

Cálculo de las derivadas

Vamos a calcularlas a partir de la expresión (29) que es más general que (30).

Para que la función $E_c = E_c(\theta, \beta)$ alcance un mínimo, situación energéticamente favorable, se deben anular sus derivadas respecto de β y θ , es decir:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = \mu_o M_s H_z \text{sen} \theta - 2K \text{sen} \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \lambda \tau (\cos \beta + \cos \theta) (-\text{sen} \theta) = 0 \quad (31)$$

de donde se obtiene una función implícita en β , θ y τ :

$$f(\theta, \beta, \tau) = \mu_o M_s H_z \text{sen} \theta - K \text{sen} 2\theta + \frac{3}{2} \lambda \tau (\cos \beta + \cos \theta) (\text{sen} \theta) = 0 \quad (32)$$

De forma análoga, la otra derivada:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta} = \mu_o M_s H_\phi \text{sen} \beta - 2K \text{sen} \beta \cos \beta - \frac{3}{2} \lambda \tau (\cos \beta + \cos \theta) (-\text{sen} \beta) = 0 \quad (33)$$

y la consiguiente función implícita:

$$g(\theta, \beta, \tau) = \mu_o M_s H_\phi \text{sen} \beta - K \text{sen} 2\beta + \frac{3}{2} \lambda \tau (\cos \beta + \cos \theta) (\text{sen} \beta) = 0 \quad (34)$$

Derivando las funciones f y g respecto de la torsión τ , se obtiene:

$$\frac{df}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{dg}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = 0 \quad (36)$$

Resolviendo el sistema formado por (35) y (36) se obtiene:

$$\theta_\tau = \frac{g_\beta f_\tau - f_\beta g_\tau}{f_\beta g_\theta - f_\theta g_\beta} \quad (37)$$

$$\beta_\tau = \frac{f_\theta g_\tau - f_\tau g_\theta}{f_\beta g_\theta - f_\theta g_\beta} \quad (38)$$

donde la notación θ_τ indica derivada parcial de θ respecto de τ .

Las derivadas parciales se calculan fácilmente a partir de (35) y (36). Por ejemplo:

$$g_\beta = \mu_o M_s H_\phi \cos \beta - 2K \cos 2\beta + \frac{3}{2} \lambda \tau (\cos \beta \cos \theta + \cos 2\beta) \quad (39)$$

Procediendo de forma análoga, se calculan las otras derivadas, para finalmente obtener:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_o} - 3\lambda \left[\cos \theta \text{sen} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \cos \beta \text{sen} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] = \frac{1}{G_o} - 3\lambda p(\theta, \beta) \quad (40)$$

donde

$$p(\theta, \beta) = \cos\theta \sin\beta \beta_r + \cos\beta \sin\theta \theta_r \quad (41)$$

que se puede poner en la forma:

$$p(\theta, \beta) = \frac{3}{2} \lambda q(\theta, \beta) \quad (42)$$

con lo que la expresión del módulo de cizalladura queda:

$$G = \frac{G_o}{1 - \frac{9\lambda^2}{2} G_o q(\theta, \beta)} \quad (43)$$

Para el *dominio interno*, la expresión es más sencilla ya que la densidad de energía depende de una única variable. Por un procedimiento análogo al anterior se obtiene:

$$G = \frac{G_o}{1 + 9\lambda^2 \frac{G_o (\cos 2\theta)^2}{2D_1}} \quad (44)$$

siendo

$$D_1 = \mu_o M_s H_z \cos\theta + \mu_o M_s H_\phi \sin\theta + 2K \cos 2\theta \quad (45)$$

Módulo de cizalladura en hilos

Tanto la expresión (43) como la (44) representan funciones de punto, $G(x)$, que dependen de la coordenada radial reducida x . Esta dependencia proviene de la distribución de anisotropía, $K(x)$, y del campo circular, $H_\phi(x)$.

Para hallar el valor del módulo de cizalladura total en el hilo, se toma el *valor medio* en el hilo de $G(x)$, mediante la siguiente integral de volumen:

$$G = \langle G(x) \rangle = \frac{\iiint dV G(x)}{\iiint dV} = 2 \int_0^1 dx x G(x) \quad (46)$$

Módulo de Young

El módulo de Young se calcula por un procedimiento similar al descrito para el módulo de cizalladura. Se obtienen los siguientes resultados:

i) *Dominio interno*

$$E = \frac{E_o}{1 + \frac{9\lambda^2 (\text{sen}2\theta)^2}{4 D_1}} \quad (47)$$

con

$$D_1 = \mu_o M_s H_z \cos\theta + \mu_o M_s H_\phi \text{sen}\theta + 2K \cos 2\theta + 4K_i \text{sen} 2\theta \quad (48)$$

ii) *Dominio externo*

$$E = \frac{E_o}{1 - \frac{9\lambda^2 (\text{sen}2\theta)^2}{4 D_2}} \quad (49)$$

donde

$$D_2 = \frac{1}{\frac{(2K_i \text{sen}\theta \text{sen}\beta)^2}{\mu_o M_s H_\phi \cos\beta - 2K \cos 2\beta + 2K_i (\cos\theta \cos\beta + \cos 2\beta)} - D_3} \quad (50)$$

siendo

$$D_3 = \mu_o M_s H_z \cos\theta - 2K \cos 2\theta + 2K_i (\cos\theta \cos\beta + \cos 2\theta) \quad (51)$$

donde K_T representa $3 \cdot \lambda \cdot \tau / 4$.

Al igual que el módulo de cizalladura, el de Young en el hilo se calcula a través de la expresión:

$$E = \langle E(x) \rangle = 2 \int_0^1 dx \cdot x \cdot E(x) \quad (52)$$

viniendo dado $E(x)$ por las expresiones (47) y (49).

Algunos resultados experimentales

La variación de los módulos de Young y cizalladura en hilos amorfos magnetostrictivos con el campo magnético aplicado, muestra una disminución de su magnitud hasta alcanzar cierto valor de campo, a partir del cual comienza a aumentar, llegando a alcanzar una saturación para campos muy elevados. El valor de los módulos a estos campos elevados coincide con el que se obtendría de no haber acople magnetoelástico. Los módulos elásticos exhiben un mínimo en su dependencia frente

al campo (Atalay, 1991). La posición de los mínimos y la magnitud de la variación dependen de las condiciones de recocido a que se someta la muestra.

Un análisis simple de las curvas de variación del módulo de Young (Atkinson, 1993, (1)) arroja los siguientes resultados: la presencia de un mínimo se asocia a ángulos de la imanación (con el eje del hilo) mayores de 45° , y la variación (la profundidad del mínimo) será tanto mayor cuanto más cercano a 90° sea el ángulo de la imanación con el eje. El campo en el que aparece el mínimo es el campo de anisotropía. El mínimo desaparece para ángulos menores de 45° , no habiendo ninguna variación del módulo de Young se el ángulo de imanación es nulo.

Las medidas del efecto ΔE pueden elucidar cuestiones relacionadas con la estructura de dominios en hilos amorfos. Medidas del efecto ΔE (Atkinson, 1993, (2)) a bajo campo, coincidente con el campo *switch*, H^* , ponen de manifiesto que la disminución abrupta del módulo de Young, E , que se observa, se correlaciona con la reestructuración del dominio externo cuando se produce la inversión de la imanación en el dominio interno, que propicia el salto Barkhausen que caracteriza la biestabilidad de los hilos amorfos ricos en hierro.

Cálculo de módulos elásticos

Según se ha visto en las expresiones anteriores, el valor de los módulos elásticos depende de la distribución de anisotropías $K(x)$, siendo x la coordenada radial reducida, es decir, $x=r/R$, donde R es el radio del hilo y r la coordenada radial cilíndrica.

Vamos a estudiar la forma de variación de los módulos de Young y cizalladura para algunas distribuciones de anisotropía. Para los cálculos se han tomado los siguientes valores para los módulos a saturación: $G_0 = 6 \cdot 10^{10}$ Pa y $E_0 = 1.5 \cdot 10^{11}$ Pa.

La figura 2a muestra la variación del módulo de Young para una distribución de *anisotropía homogénea*, esto es, $K(x)=K$, con $K= 100 \text{ Jm}^{-3}$, y diferentes ángulos, α , que formados por el eje de anisotropía y el eje del hilo. Los resultados son similares a los encontrados por Atkinson y colaboradores (Atkinson, 1993, (1)) usando el modelo de Livingston (Livingston, 1982) aplicable a cintas amorfas con anisotropía transversal a su eje. Para $\alpha=0$ no hay variación de módulo de Young, siendo ésta máxima para $\alpha=90^\circ$. Aparece un mínimo para ángulos α mayores de 45° .

La figura 2b muestra el resultado obtenido para una *distribución de anisotropía no homogénea* en el hilo, aunque lo es en el interior de cada dominio. La frontera entre los dos dominios se denota por x_0 , que toma el valor $x_0=0.7$. La anisotropía tiene la siguiente forma:

- i) Dominio interno (situado en $x < x_0$) $\rightarrow K(x) = K$
- ii) Dominio externo (situado en $x > x_0$) $\rightarrow K(x) = N \cdot K$

donde N es una constante. Se supone también la presencia de una anisotropía de torsión (que crea un eje fácil helicoidal), de valor $K_{\text{TOR}}(x) = K_T$, donde K_T será proporcional a la constante de magnetostricción, λ y a la tensión de cizalladura, τ , presente en el hilo. En la figura se ofrece el resultado obtenido para $K = 5 \text{ Jm}^{-3}$, $K_T = 0.5 \text{ Jm}^{-3}$ y distintos valores de N . Un valor grande de N implica una mayor anisotropía en el dominio externo (que forma un ángulo de 90° con el eje del hilo,

y la imanación, por tanto, está dirigida en dirección radial). A mayor N , mayor dificultad encuentra el campo axial H para mover la imanación hacia su dirección. En la figura 2b se aprecia cómo un aumento de la anisotropía del dominio externo hace que el mínimo de E se alcance para campos más altos, y la profundidad del mínimo es menor. Si $N=500$, la anisotropía es tan grande (2500 Jm^{-3}) que el campo máximo de 1 KA/m aún no ha sido capaz de mover la imanación del dominio externo como para variar el módulo de Young.

La figura 2c muestra el resultado obtenido con los mismos parámetros que en el caso anterior, pero con una anisotropía de torsión mayor, $K_T = 3 \text{ Jm}^{-3}$. Se observa que el valor de E/E_0 a campo nulo es de 0.56 mientras que el en caso anterior (con $K_T = 0.5 \text{ Jm}^{-3}$) era de 0.74. Esta disminución con K_T se debe a que para torsiones más altas, el ángulo que forma la imanación con el eje será mayor (más próximo a 45°) y el valor de E/E_0 ($H=0$) será menor (según los resultados de la figura 2a). Alcanzará su máximo valor, $E/E_0 = 1$, si la imanación exhibe un perfecto paralelismo con el eje del hilo.

La presencia de anisotropías de torsión favorece la variación del módulo de cizalladura. Las figuras 3a y 3b muestran la variación del módulo de cizalladura para $K_T=0$ y $K_T = 3 \text{ Jm}^{-3}$, respectivamente, siendo los demás parámetros de las distribuciones de anisotropía iguales a los de la figura 2. Se aprecia que cuanto mayor es N menor es la variación de G con el campo, es decir, cuanto más importante es la anisotropía radial frente a la de torsión, menor es la variación de G . El mínimo más pronunciado se alcanza para $N=10$, y es más profundo para $K_T = 3 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 3a) que para $K_T=0$ (figura 3b). El valor de G/G_0 a campo nulo es más alto cuanto mayor es la anisotropía de torsión.

Hasta ahora, se han considerado distribuciones de anisotropía discontinuas en la frontera de separación de los dominios ($x=x_0 = 0.7$). Distribuciones continuas aportarán comportamientos más próximos a los encontrados experimentalmente. Considérese la siguiente distribución de anisotropías lineales:

$$K(x) = \begin{cases} N_f \cdot K \cdot (1-x/x_0) & \text{si } x < x_0 \\ K \cdot (x/x_0 - 1) & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad x_0 = 0.7.$$

La anisotropía de torsión se supone del tipo:

$$K_{\text{TOR}}(x) = \begin{cases} (T_0 + 100) \cdot x & \text{si } x < x_0 \\ (10 \cdot T_1 + 100) \cdot x & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

siendo N_f , T_0 y T_1 parámetros ajustables, que controlan la magnitud de la anisotropía en el dominio interno y de la anisotropía de torsión, respectivamente. La figura 3c muestra el resultado obtenido para distintos valores de los parámetros y de la anisotropía K . Se aprecia que la variación es menor para el valor de K más alto ($K = 4500 \text{ Jm}^{-3}$, $N_f=1$, $T_0=T_1=0$). Nótese que aunque T_0 y T_1 sean nulos, sigue habiendo una anisotropía de torsión. Si $K = 4000 \text{ Jm}^{-3}$, $T_0=T_1=0$ y $N_f = 0.01$ (el valor de la anisotropía en el dominio interno es mucho más pequeño que en el caso anterior), disminuye

el valor de G/G_0 a campo nulo. Si $K = 100 \text{ Jm}^{-3}$ y $T_0 = T_1 = 50 \text{ Jm}^{-3}$ (aumenta el valor de la anisotropía de torsión), éste valor disminuye hasta 0.59.

Estos resultados teóricos coinciden cualitativamente con los encontrados por Atalay y colaboradores (Atalay, 1991) para hilos amorfos de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{B}_{15}\text{Si}_{7.5}$ recocidos mediante corriente continua de intensidad comprendida entre los 730 mA y los 745 mA durante diferentes tiempos. El resultado con $K = 4500 \text{ Jm}^{-3}$, $T_0 = T_1 = 0$ y $N_f = 1$ coincide cualitativamente con el obtenido para los hilos as-cast. El valor $K = 4000 \text{ Jm}^{-3}$, $T_0 = T_1 = 0$ y $N_f = 0.01$ es semejante al obtenido para hilos recocidos durante 15 minutos, y el de $K = 100 \text{ Jm}^{-3}$, $T_0 = T_1 = 50 \text{ Jm}^{-3}$, correspondería al recocido durante 5 minutos.

De la comparación de los resultados experimentales y teóricos, puede deducirse que la aplicación de una corriente eléctrica continua a un hilo modifica las anisotropías intrínsecas e introduce anisotropías magnetoelásticas de torsión importantes. Esto quedará mucho más claro tras el análisis de la variación del módulo de cizalladura para hilos recocidos durante diferentes tiempos, usando el péndulo de torsión descrito en un capítulo anterior.

Análisis de algunos resultados obtenidos en el péndulo de torsión

Como ya se mencionó en el capítulo dedicado al péndulo de torsión, éste está constituido por un hilo amorfo de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ recocido con corriente continua durante 25 minutos, simultáneamente a la aplicación de una tracción axial de 14.5 MPa. El análisis del comportamiento magnético para otros tiempos de recocido, ha sido estudiado por Velázquez y colaboradores (Velázquez, 1995); esos tiempos de recocido son: 5 segundos, 1 minutos, 10 minutos y 25 minutos. En el péndulo de torsión, el movimiento es inducido por la aplicación de un campo axial, H , y un campo circular $H_\phi = I \cdot r / 2\pi R^2$, siendo R el radio del hilo e I la intensidad de corriente que se hace circular a través del hilo. La variación del módulo de cizalladura, G , con el campo H se mide a través de la frecuencia de resonancia, f_r :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G R^4}{2 I_n L}} \quad (53)$$

donde L es la longitud del hilo e I_n el momento de inercia del disco del péndulo.

La figura 4a muestra la variación de la frecuencia de resonancia con el campo axial para varios tiempos de recocido (t_{ann}). Por el hilo se hace pasar una intensidad de corriente alterna de frecuencia variable y que crea un campo máximo en la superficie del hilo de 172.5 A/m. Para $t_{\text{ann}} = 5$ segundos, la frecuencia de resonancia para campo axial nulo es de 13.5 Hz, para $t_{\text{ann}} = 1$ minuto es de 16.5 Hz, para $t_{\text{ann}} = 10$ minutos es de 14.6 Hz y para $t_{\text{ann}} = 25$ minutos es de 13.5 Hz. No hay una correlación monótona entre el tiempo de recocido y el valor de la frecuencia de resonancia a campo axial nulo (recordar que cuanto más alto sea este valor, más próxima a 45° estará la imanación). Todos los hilos exhiben un mínimo excepto el recocido durante 25 minutos.

Para intentar comprender la estructura de dominios de los hilos, se han medido los ciclos de histéresis alternos (a 100 Hz). La figura 4b muestra la remanencia de cada ciclo (axial, M_z-H_z ; circular, $M_\phi-H_\phi$; Matteucci, $M_\phi-H_z$; y Wiedeman inverso, M_z-H_ϕ) en función del tiempo de recocido.

La remanencia axial muestra un mínimo para el hilo recocido durante 1 minuto, aumenta para el recocido durante 10 minutos y vuelve a disminuir para el de 25 minutos. La remanencia M_z-H_ϕ muestra una tendencia similar. Las remanencias $M_\phi-H_z$ y $M_\phi-H_\phi$ son más pequeñas que las anteriores y varían poco con el recocido, excepto para el de 25 minutos, que no tiene ciclo circular (es decir, el campo circular H_ϕ no induce variación en la componente circular de la imanación, M_ϕ). La existencia de ciclos no directos, es decir, del Matteucci y del Wiedeman inverso, anuncian la existencia de anisotropías de torsión.

La amplia variación de la componente axial, M_z , de la imanación para $t_{\text{ann}} = 1$ minuto, indica el relajamiento de la anisotropía radial. El decremento y posterior incremento de M_z con el tiempo de recocido, puede explicarse en función de la disminución del tamaño del dominio interno para $t_{\text{ann}} = 1$ minuto, debido a la relajación de la tensión radial y a la presencia de anisotropías de torsión (debidas a tensiones de cizalladura) que intentan fijar la imanación en una dirección helicoidal. Los dos tipos de anisotropías fuerzan a la imanación a formar ángulos mayores de 45° con el eje del hilo. El apreciable efecto Wiedeman inverso, sugiere que las anisotropías de torsión son importantes. La disminución de la remanencia M_z para $t_{\text{ann}} = 25$ minutos, sugiere un incremento de la anisotropía radial.

La existencia de ciclos $M_\phi-H_\phi$ puede explicarse si se asume una relajación de la anisotropía radial; su desaparición para $t_{\text{ann}} = 25$ minutos, estaría relacionada con un aumento de esa anisotropía, debido a un comienzo de cristalización. La disminución de M_z para $t_{\text{ann}} = 25$ minutos, refleja también este efecto.

Teniendo en cuenta la información aportada por los ciclos de histéresis, vamos a intentar reproducir cualitativamente los resultados de la frecuencia de resonancia. Vamos a considerar la siguiente distribución de anisotropía:

$$i) \text{ Dominio interno } (x < x_0 = 0.7) \rightarrow K(x) = (K/10) \cdot (1 - x/x_0) \quad (\text{axial})$$

$$ii) \text{ Dominio externo } (x > x_0 = 0.7) \rightarrow K(x) = K \cdot (x/x_0 - 1) \quad (\text{radial})$$

Se ha tomado esta distribución de anisotropía lineal (y siempre positiva) por ser la más sencilla que reproduce la estructura de dominios de los hilos as-cast. Para muestras recocidas se considera asimismo la siguiente distribución de anisotropía de torsión (se toma lineal ya que el campo circular también tiene esa dependencia con x):

$$K_T(x) = T \cdot x$$

La figura 4c muestra los resultados obtenidos para diferentes valores de K y T . Con estos valores, se intenta reproducir los resultados experimentales mostrados en la figura 4a. La cantidad entre paréntesis representa el tiempo de recocido que correspondería a los valores de K y T . Los cálculos se han efectuado considerando una intensidad de corriente que crea un campo máximo de 121.5 A/m. Vamos a tratar de interpretar los resultados experimentales a la luz del modelo teórico.

Para muestras recocidas 5 segundos, se toma $K = 100 \text{ Jm}^{-3}$ y $T = 5 \text{ Jm}^{-3}$. El efecto de recocido de la muestra as-cast reduce la anisotropía intrínseca (que es del orden de 4000 Jm^{-3}) e induce la aparición de una anisotropía de torsión. Si se incrementa el tiempo de recocido a 1 minuto, la anisotropía radial y axial disminuyen ($K = 40 \text{ Jm}^{-3}$) y aumenta la de torsión ($T = 10 \text{ Jm}^{-3}$). Esto es consistente con la disminución de la remanencia axial M_z . Si se sigue incrementando el tiempo de recocido a 10 minutos, los resultados experimentales pueden entenderse como que aumentan las

anisotropías radial y axial ($K = 70 \text{ Jm}^{-3}$) manteniéndose igual la de torsión ($T = 10 \text{ Jm}^{-3}$). Para tiempos de recocido superiores (25 minutos), aumentan la radial y la axial ($K = 200 \text{ Jm}^{-3}$) debido al inicio de la cristalización, y la anisotropía de torsión disminuye ($T = 0.1 \text{ Jm}^{-3}$) a causa del efecto del aumento de la temperatura.

Los cambios de anisotropías se fundamentan en los efectos competitivos entre la generación de anisotropía helicoidal generada por el campo circular y la tensión axial durante el recocido, y el efecto de la temperatura que tiende a eliminar anisotropías.

Figura 2 -. a) efecto ΔE para varios ángulos α del eje de anisotropía con el eje del hilo;
b) efecto ΔE para anisotropía torsión $K_T=0.5 \text{ Jm}^{-3}$; c) efecto ΔE para $K_T=3 \text{ Jm}^{-3}$.

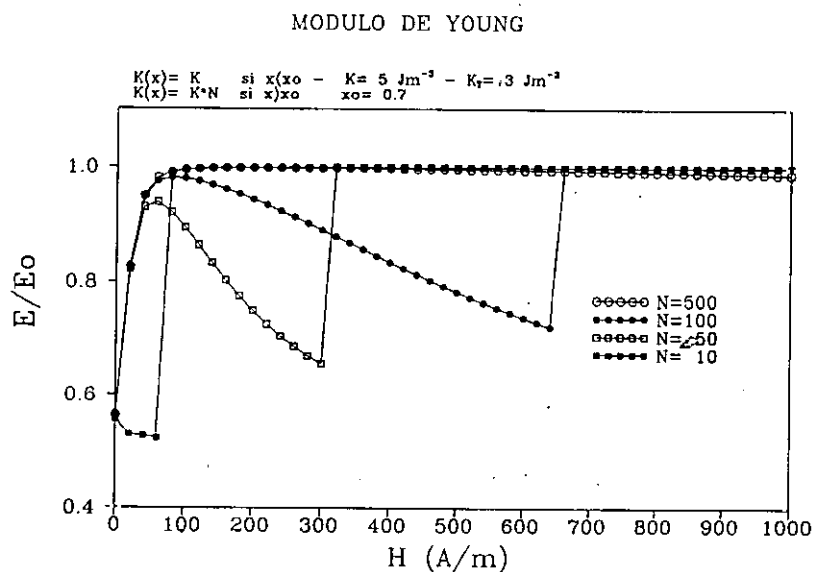
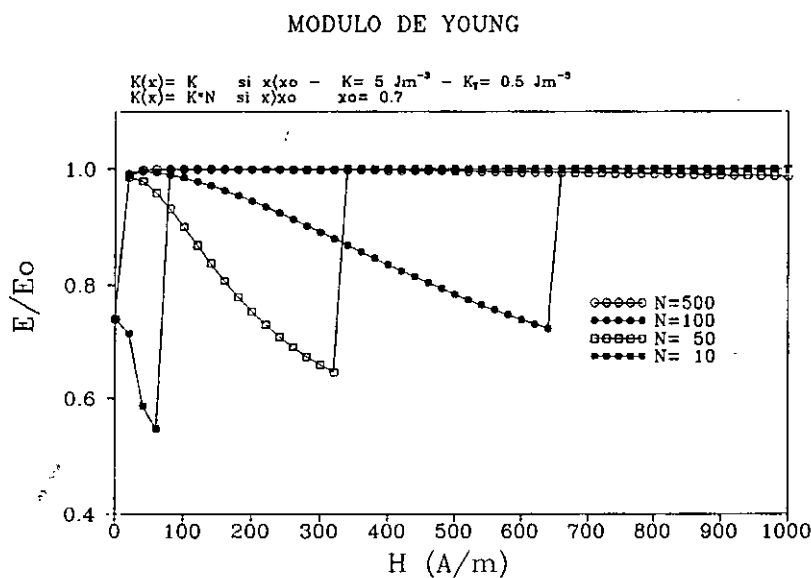
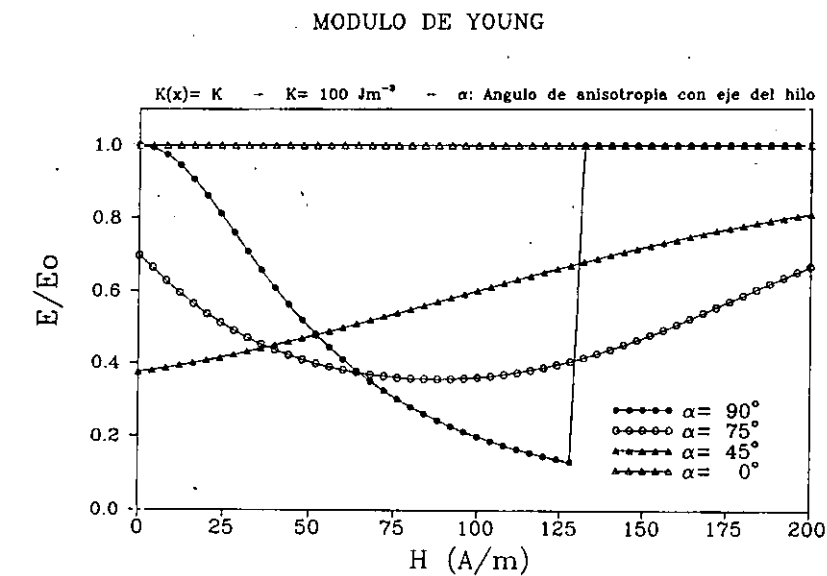
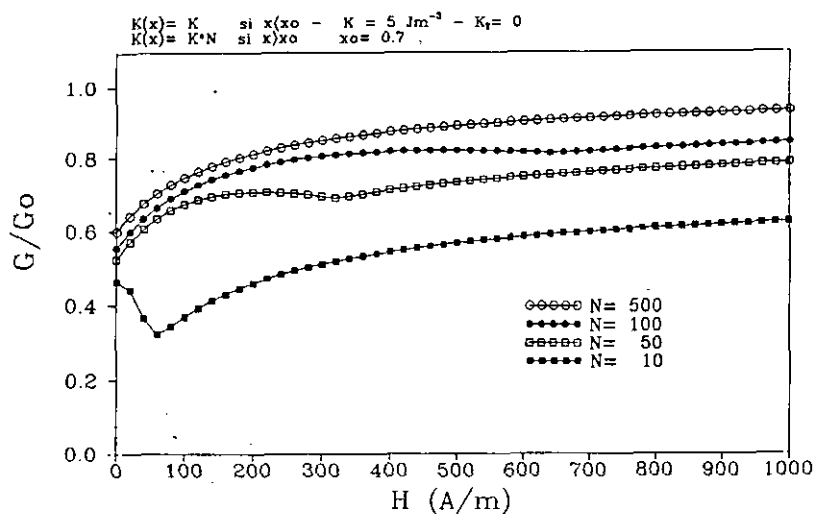


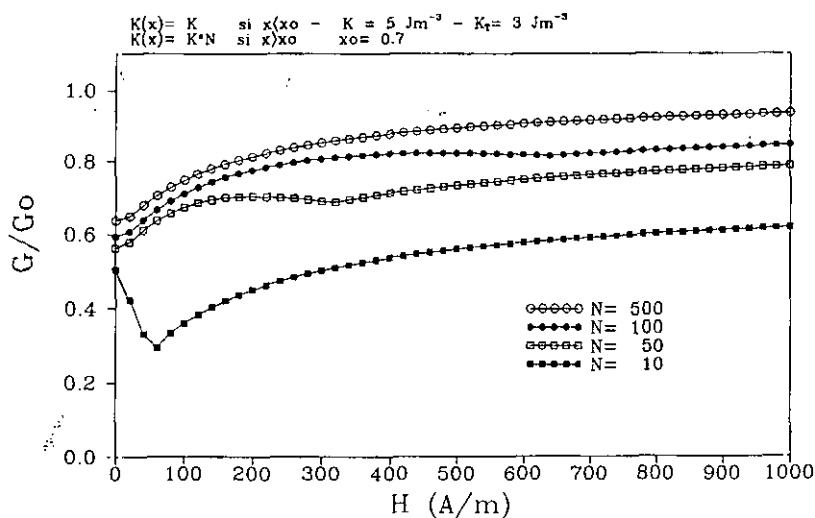
Figura 3 -. a) efecto ΔG para anisotropía torsión $K_T=0$; b) efecto ΔG para $K_T=3 \text{ Jm}^{-3}$; c) efecto ΔG para una distribución de anisotropía continua.

MODULO DE CIZALLADURA



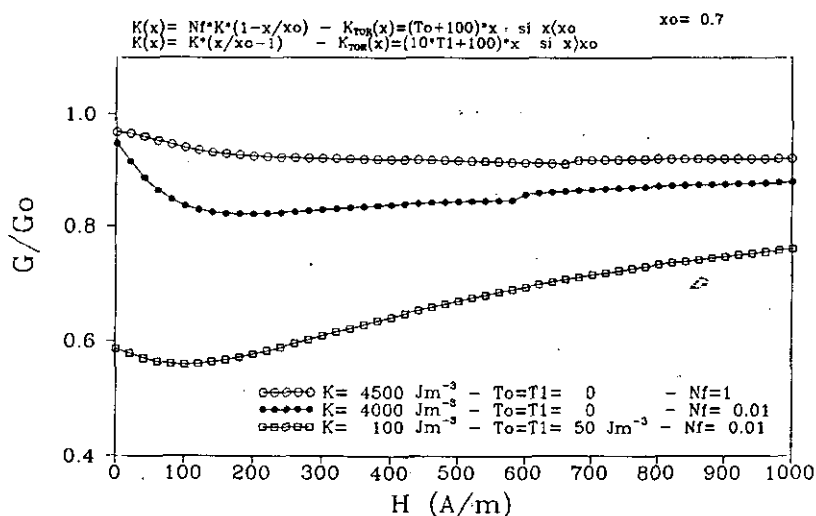
a)

MODULO DE CIZALLADURA



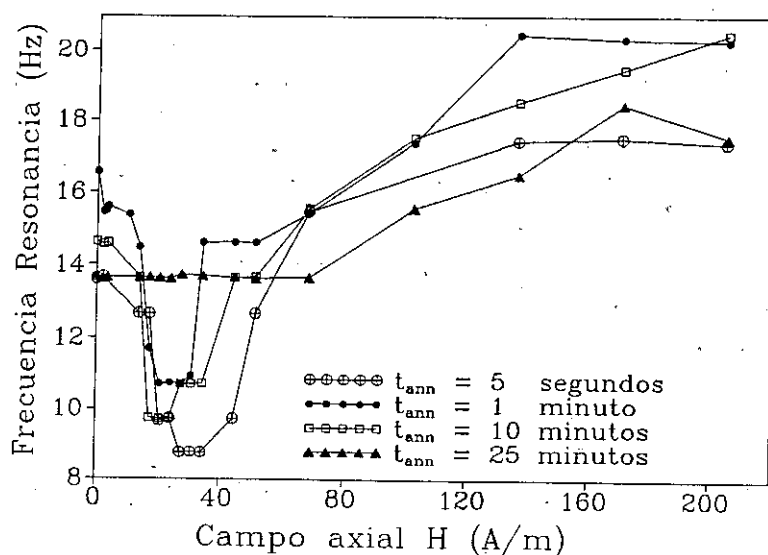
b)

MODULO DE CIZALLADURA

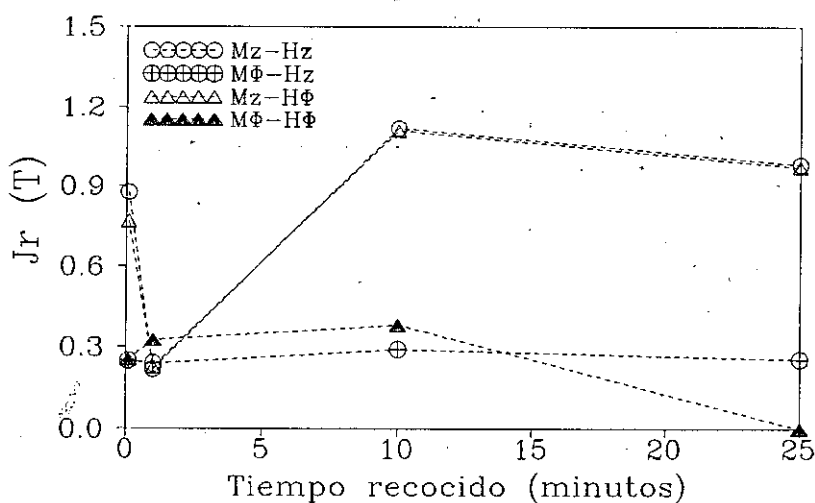


c)

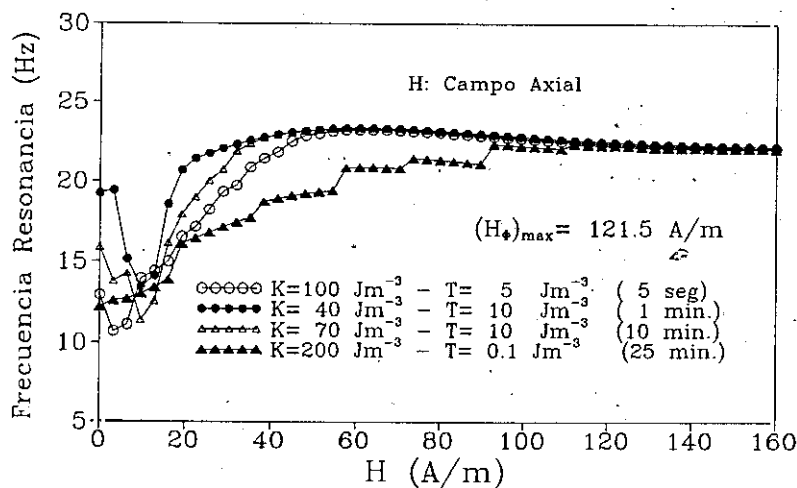
Figura 4.- a) frecuencia de resonancia experimental para distintos tiempos de recocido;
b) remanencias en función del tiempo de recocido; c) ajuste frecuencia resonancia



a)



b)



c)

**VI ~ INTERACCION
MAGNETOSTATICA ENTRE
HILOS AMORFOS**

INTERACCION MAGNETOSTATICA ENTRE HILOS AMORFOS

Introducción

Los hilos amorfos de composición $\text{Fe}_{77.5}\text{Si}_{7.5}\text{B}_{15}$ presentan una estructura de dominios particular, derivada del acople de la imanación y las tensiones internas generadas durante el proceso de fabricación, en virtud de su constante de magnetostricción alta y positiva, $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$. La estructura consiste básicamente en un dominio central en el que la imanación es paralela al eje del hilo, teniendo dirección radial en el dominio externo.

En el dominio central, la imanación axial presenta *dos sentidos estables*. El tránsito entre esos dos sentidos, gracias a la aplicación de un campo exterior, se conoce *biestabilidad*. La inversión del sentido de la imanación se produce gracias al desplazamiento de una pared de 180° desde la frontera de dominios (donde se nuclea, ya que en este punto la energía magnetoelástica es mínima) hasta el eje del hilo (Hernando, 1993, (1)).

La **figura 1a** muestra el ciclo de histéresis axial, medido a 40 Hz por el método de inducción, para un hilo de la composición antes citada cuya longitud es de 11.7 cm y su diámetro de 131 micras. Se mide una imanación remanente de 0.715 T. Se aprecia claramente el tránsito entre los dos sentidos de imanación mediante un único salto Barkhausen. El ciclo es *estable*, es decir, *su forma no se altera con el tiempo*.

Un resultado experimental

¿ Qué ocurre si se mide el ciclo axial de dos hilos (uno al lado del otro, ambos en el mismo carrete secundario) a la vez ?

Sería de esperar que la imanación fuese el doble y que el ciclo siguiese conservando su forma cuadrada, biestable. La **figura 1b** muestra el resultado obtenido. El ciclo no exhibe un único salto, sino dos. Semeja dos ciclos biestables desplazados uno respecto del otro. Se mide una remanencia de 1.379 T, el doble de la de un único hilo. Una característica importante es que *el ciclo no es estable*, pudiendo desaparecer alguno de los saltos Barkhausen, tal y como se aprecia en la **figura 1c**. Los ciclos de las figuras 1b y 1c han sido obtenidos sin modificar ningún parámetro externo; simplemente se han registrado en diferentes instantes de tiempo.

Efectos similares se han obtenidos para más de dos hilos, concretamente, para tres, cuatro, seis y ocho hilos; el número de hilos no parece ser una magnitud determinante.

Interacción magnetostática entre hilos

Los resultados de las figuras 1b y 1c sugieren la concurrencia de una *interacción magnetostática entre los hilos*. El estado de imanación de uno de ellos influye en el del otro.

Para verificar esta idea, vamos a mostrar los resultados de un cálculo relativamente sencillo. Se simula un ciclo de histéresis biestable imponiendo la existencia de dos únicos estados de

imanación, $+M$ y $-M$ (siendo $\mu_0 M = 0.7$ T). El tránsito entre ellos se produce cuando el campo excitador alcanza el valor coercitivo $H_c = 3$ A/m. El campo aplicado variable es de la forma $H(t) = H_0 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ donde la amplitud máxima $H_0 = 10$ A/m y la frecuencia $f = 1$ Hz. El ciclo queda así definido por una función $M(H)$.

Sea M_1 el estado de imanación (que puede tomar únicamente los valores $+M_1$ y $-M_1$) del hilo 1. El campo magnético, H_{12} , que crea el hilo 1 y que actúa sobre el hilo 2 se supone proporcional al estado de imanación del hilo 1:

$$H_{12} = K M_1 \quad (1)$$

donde K es la constante de proporcionalidad, adimensional en el sistema MKS. Definición análoga para el campo creado por el otro hilo, $H_{21} = K \cdot M_2$. El ciclo de histéresis de cada ciclo vendrá determinado por la función:

$$M_i = M_i(H - H_{ji}) \quad (2)$$

donde se ha supuesto que el campo H_{ji} tiene sentido opuesto al exterior, H . La figura 2 aclara la situación:

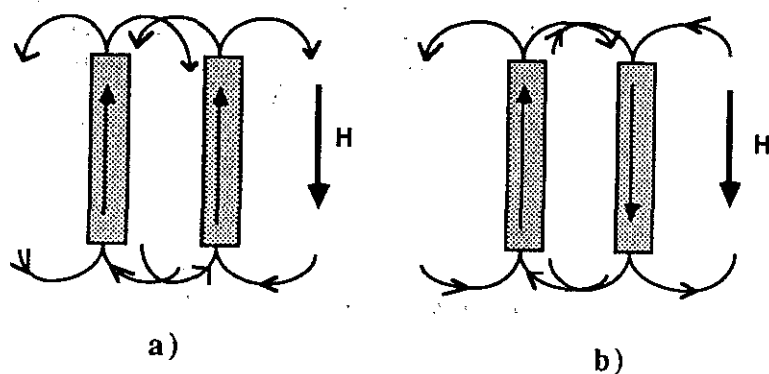


Figura 2. -. Interacción magnetostática entre hilos

El origen del campo que genera cada hilo puede atribuirse a los polos que aparecen en los extremos y que no son compensados en su totalidad por dominios de cierre.

En la figura 2a se muestran dos hilos imanados inicialmente en el mismo sentido y a los que se aplica un campo exterior antiparalelo. Uno de ellos invierte su imanación antes que el otro (figura 2b) e influye con su campo magnético (que tiene sentido contrario al exterior) en el valor total del campo de que aprecia el hilo que aún no ha invertido la imanación. La imanación total para los dos hilos, $M = M_1 + M_2$ vendrá dada por las funciones:

$$M_1 = M_1(H - H_{21}) = M_1(H - KM_2) \quad (3)$$

$$M_2 = M_1(H - H_{12}) = M_2(H - KM_1) \quad (4)$$

Para resolverlas, se introduce (4) en (3):

$$M_1 = M_1(H - K[M_2(H - KM_1)]) \quad (5)$$

Dado que la expresión (5) es del tipo $M_1 = g(M_1)$, el valor de M_1 se obtiene por el *método de iteración de punto fijo* (Burden, 1985). Una vez obtenido el valor de M_1 , el de M_2 se calcula haciendo uso de la relación (4).

La figura 3 ofrece los resultados obtenidos. La figura 3a muestra el ciclo de histéresis, función $M(H)$, para un único hilo. Si se consideran dos hilos, *sin interacción entre ellos* ($K=0$) se obtiene el ciclo de la figura 3b. Si se tiene en cuenta la interacción ($K=1$) el ciclo correspondiente aparece en la figura 3c, semejante al resultado experimental de la figura 1b. El ancho del tramo horizontal que separa los dos saltos Barkhausen, en la figura 3c, es proporcional al valor de K ; se podría calcular el valor de K en el caso real.

Como conclusión, se puede decir que existe una interacción magnetostática entre los hilos amorfos derivada del estado magnético de cada hilo y propiciada por la no simultaneidad de la inversión de imanación por la aplicación de un campo externo.

¿ Por qué los hilos no invierten la imanación al mismo tiempo ?

La inversión de imanación se produce cuando el campo externo alcanza el valor H^* , campo *shwich*, que depende de la distribución de anisotropías magnetoelásticas (Hernando, 1993 (1)). Esta situación es plenamente aplicable en el cero absoluto; a una temperatura dada aparecerá una agitación térmica de los momentos magnéticos. Es de esperar, como toda propiedad macroscópica, que el campo H^* corresponda en realidad a un promedio, $\langle H^* \rangle$, afectado por una fluctuación $\langle (H^* - \langle H^* \rangle)^2 \rangle$. La inversión de imanación no se producirá bajo un único valor del campo exterior, sino en un conjunto de valores determinados por la magnitud de la fluctuación. Es de esperar que unos hilos inviertan la imanación antes que otras.

¿ Por qué los ciclos de varios hilos juntos no son estables ?

Si se tiene en cuenta la no simultaneidad de los saltos Barkhausen y el carácter alterno del campo magnético aplicado, puede entenderse que siempre exista algún hilo cuya imanación es antiparalela al campo externo. La figura 4 muestra la situación para tres hilos. En un principio, todos los hilos están imanados de la misma forma (figura 4a). Cuando se aplica un campo antiparalelo, alguno de ellos cambia la imanación de sentido (figura 4b). Si el campo se invierte, no todos los hilos invertirán la imanación al mismo tiempo (figura 4c). Intuitivamente se entiende que debe existir una relación entre la no simultaneidad de los saltos Barkhausen y la frecuencia y amplitud del campo excitador.

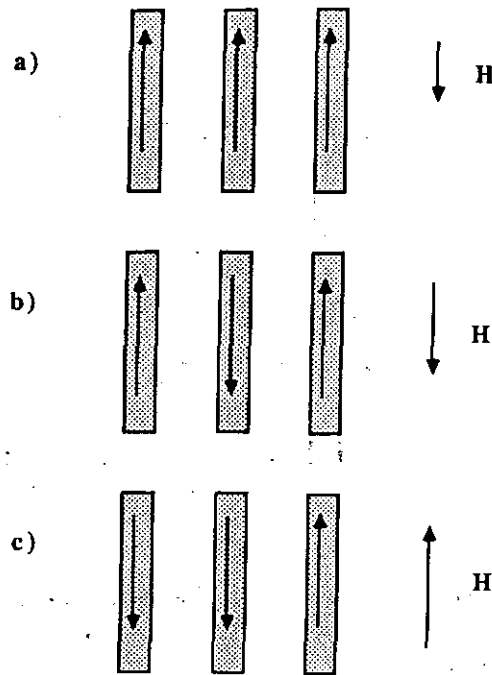


Figura 4 -. No simultaneidad del salto Barkhausen

Experimentalmente se comprueba lo siguiente:

- i) Los ciclos son inestables para frecuencias no muy altas. Para frecuencias superiores a valores del orden de 500 Hz el ciclo pierde su inestabilidad y se aprecia un único salto Barkhausen.
- ii) Para campos cuyo valor máximo sea mucho más altos que el campo coercitivo, también desaparece la inestabilidad.

Si el campo es mucho más alto que el campo coercitivo de los hilos, se fuerza a la imanación de cada uno de ellos a invertirse de forma prácticamente simultánea, para minimizar la energía magnético derivada de la interacción de la imanación con el campo externo.

El efecto de la frecuencia debe estar relacionado con la aparición de corrientes parásitas relacionadas con el incremento de la frecuencia del campo excitador, las cuales generan un campo axial cuyo valor se incrementa proporcionalmente con la distancia al eje del hilo (Chikazumi, 1964).

¿ Puede ser caótica la interacción magnetostática ?

La inestabilidad de los ciclos de histéresis también aparece en la simulación numérica (figura 5). Según el valor de la frecuencia excitadora se obtienen diferentes ciclos, caracterizándose cada uno de ellos por una *aperiodicidad de la imanación*, es decir, para valores idénticos de campo H , la imanación M no es la misma. Los ciclos de la figura 5 han sido recorridos varias veces por el campo. La figura 5a muestra el ciclo para la frecuencia del campo $\nu = 1.2$ Hz, la figura 5b para $\nu = 1.94$ Hz y la figura 5c para $\nu = 1.96$ Hz.

La respuesta magnética, M , de un hilo biestable es claramente *no lineal* en el campo H : para un mismo campo hay dos valores posibles de imanación.

Se tiene, por consiguiente, un *sistema* formado por dos más hilos entre los que existe una interacción y que exhiben una *no linealidad* en su respuesta magnética individual. Estos ingredientes sugieren la concurrencia de *caos determinista* en el comportamiento temporal del sistema. El caos determinista no equivale a comportamiento aleatorio, sino que describe una complejidad bajo la cual subyace una ley plenamente definida. Vamos a analizar los resultados experimentales desde el punto de vista del caos.

Análisis del espectro de frecuencias

Se mide el ciclo axial de dos hilos de 31 cm de longitud y 131 micras de diámetro cuando se aplica un campo alterno, cuya forma es triangular y su frecuencia es de 40 Hz. La magnitud del campo se mide mediante la intensidad de corriente que pasa a través del solenoide que crea el campo axial. Se mide el valor eficaz, I_{rms} , de la corriente mediante un multímetro FLUKE 8842 A. Haciendo uso del osciloscopio digital, se registra la variación temporal de la imanación para diferentes valores de I_{rms} . La transformada de Fourier de las señales temporales permite estudiar las frecuencias que concurren. La **figura 6** muestra los resultados.

En la **figura 6a** se muestra el espectro correspondiente a un valor de intensidad $I_{rms} = 4.455$ mA, para el cual el ciclo es estable. Se aprecian varios picos de frecuencia, el mayor de los cuales corresponde a la frecuencia excitadora de 40 Hz. Aparecen también armónicos de esta frecuencia fundamental.

Si se disminuye el valor del campo excitador ($I_{rms} = 4.326$ mA) el ciclo deviene inestable. La **figura 6b** ofrece el espectro, que es más complicado que en el caso anterior. Se aprecia una clara duplicación de período: aparece una frecuencia de 20 Hz, la mitad de la excitadora. Aparecen también muchas frecuencias que no existían en el caso de la **figura 6a**.

Si se sigue disminuyendo el campo aún más ($I_{rms} = 4.137$ mA) el espectro se densifica mucho más (**figura 6c**). Nótese que conforme se disminuye el valor del campo excitador y va surgiendo la inestabilidad del ciclo, la altura de los picos de frecuencia es cada vez más baja: la aparición de nuevas frecuencias de oscilación conlleva un reparto de la energía disponible.

La **figura 7** ofrece los mismos espectros que la **figura 6** pero en la misma escala vertical para poder apreciar mejor la aparición de nuevas frecuencias al ir disminuyendo la magnitud del campo excitador. Si se comparan las **figuras 7a y 7b** se puede constatar lo siguiente: entre cada dos frecuencias de la **figura 7a** aparece otra frecuencia en la **figura 7b**. Por ejemplo, en la **figura 7a** hay dos picos en torno a 300 Hz sin ningún otro entre ellos. En la **figura 7b** se ve un pico entre los dos antes mencionados. Este comportamiento sugiere cuasiperiodicidad, es decir, si f_A y f_B representan las frecuencias en torno a 300 Hz, la posición del pico intermedio respondería a la combinación lineal $f_C = (1/2) \cdot (f_A + f_B)$.

En la cuasiperiodicidad, las frecuencias que aparecen son combinaciones lineales de varias frecuencias fundamentales. En este caso de dos hilos, esas frecuencias fundamentales pueden ser atribuidas a la frecuencia fundamental de 40 Hz con que oscila cada hilo. El resto de frecuencias que concurren son combinaciones lineales de esas frecuencias fundamentales.

En la **figura 7c**, correspondiente a $I_{rms} = 4.137$ mA, la situación se ha complicado mucho. Para frecuencias menores de 100 Hz, el espectro se hace muy denso, aparecen prácticamente todas las frecuencias en ese intervalo. El espectro es casi continuo. No obstante, se sigue apreciando el pico de 40 Hz, es decir, el sistema sigue oscilando preferentemente a esa frecuencia. Esto se explica si se tiene en cuenta que a pesar de la inestabilidad del ciclo, esto es, la aparición y desaparición de los saltos Barkhausen, *sigue apreciándose la forma del ciclo*. De ello es responsable la oscilación a 40 Hz de frecuencia.

Las figuras 6 y 7 sugieren, para la evolución temporal de los ciclos de histéresis, un tránsito hacia el caos a partir de cuasiperiodicidad a dos frecuencias, inducido por la modificación del valor máximo del campo aplicado (proporcional al valor de I_{rms}). No obstante no se alcanza un comportamiento plenamente caótico.

Funciones de correlación

La **figura 8** muestra dos funciones de correlación. La **figura 8a** corresponde a dos ciclos de 11.7 cm de longitud. La frecuencia del campo era de 40 Hz y la intensidad eficaz que pasa por el solenoide excitador es 3.890 mA. En estas condiciones el ciclo es inestable. La situación es similar a la descrita en la figura 7c. La función de correlación se anula en el tiempo $\tau_0 = 0.0675$ segundos. Oscila brevemente para tiempos mayores y vuelve a anularse prácticamente para 0.2 segundos, indicando para ausencia de correlación temporal en los valores de imanación para tiempos superiores 0.2 segundos. Esto indica un espectro casi continuo de frecuencias, condición para la presencia de caos.

La **figura 8b** muestra la función de correlación de la variación temporal de la imanación obtenida cuando la frecuencia del campo es de 200 Hz y la intensidad que pasa por el solenoide es de 5.528 mA. Esta situación corresponde a una pequeña inestabilidad del ciclo de histéresis de los dos hilos. La función de correlación es *oscilante*, no se anula totalmente. Aunque pequeña, existe una oscilación en torno al valor nulo: el sistema ofrece rastros de periodicidad, no hay pérdida total del correlación en la señal temporal.

Reconstrucción del atractor

Para dos hilos de 11.7 cm de longitud encontramos una inestabilidad importante en el ciclo para los siguientes parámetros: frecuencia de 326 Hz e $I_{rms} = 5.759$ mA. El espectro de frecuencias es semejante al de la figura 7c. Vamos a intentar reconstruir el atractor mediante la técnica descrita anteriormente en la sección dedicada al análisis del caos. La figura 9 muestra los resultados. La **figura 9a** representa el valor de la imanación, $V(t)$ en unidades arbitrarias (se toma la señal directamente del osciloscopio digital) frente a $V(t+T)$, siendo $T = 0.005$ segundos. Las **figuras 9b** y **9c** representan $V(t)$ frente a $V(t+2T)$ y $V(t+T)$ frente a $V(t+2T)$, respectivamente. Se aprecian distintas perspectivas del atractor.

Inestabilidad de ciclo de seis hilos

A fin de ver la evolución de los ciclos de histéresis de 6 hilos, vamos a registrar una señal temporal que involucre muchos ciclos de oscilación. Para ello, registramos la señal temporal en el osciloscopio, con una base de tiempos adecuada.

Se miden los ciclos de histéresis de 6 hilos de 11.5 cm de longitud, a 40 Hz. Mediante el osciloscopio digital, se registran las señales temporales correspondientes a la imanación y al campo excitador. Sin traducirlas a las unidades correspondientes (la digitalización en el osciloscopio se efectúa en unidades arbitrarias), se componen la una con la otra, obteniéndose los ciclos. La **figura 10a** muestra el ciclo obtenido cuando la intensidad de corriente que pasa por el solenoide excitador es de 19.953 mA. La figura está formada por 4000 puntos. El ciclo es prácticamente estable.

Si se baja la intensidad de corriente a $I_{rms} = 14.132$ mA, el ciclo se desestabiliza (**figura 10b**). Para $I_{rms} = 10.427$ mA, la inestabilidad es mucho mayor (**figura 10c**).

La **figura 11** representa una suerte de espacio de fases para la señal temporal de la **figura 10**. Se representa la imanación M (en unidades arbitrarias) frente a su derivada temporal.

Para $I_{rms} = 19.953$ mA (**figura 11a**) los 4000 puntos de la señal temporal se ordenan en una estructura conformada por seis bucles (uno por cada hilo presente). Para $I_{rms} = 14.132$ mA (**figura 11b**) algunos bucles se distorsionan, y se rompen totalmente para $I_{rms} = 10.427$ mA (**figura 11c**) indicando la falta de periodicidad del comportamiento temporal.

Caos e hilos

Hemos visto que el caos aparece en la evolución temporal de sistemas no lineales. En el caso del sistema formado por varios hilos, hemos encontrados indicios de su presencia. ¿De donde proviene? Hemos sugerido que la interacción magnetostática entre los hilos puede ser la causa. Otra posibilidad es el movimiento de paredes en cada hilo. Vamos a analizar esas dos posibilidades.

1 - Caos por interacción entre hilos

Veamos si una interacción entre hilos puede dar lugar a comportamientos caóticos. Para ello, vamos a considerar un modelo sencillo. Se trata de cinco momentos magnéticos (ver **figura 12**), en presencia de una anisotropía uniaxial de valor $K = 1 \text{ J m}^{-3}$, perpendicular a la línea que los une. Se aplica un campo magnético sinusoidal paralelo al eje de anisotropía. Su amplitud es de 10 A/m y su frecuencia de 5 Hz. Entre los momentos magnéticos existe una **interacción J** que tiende a orientarlos paralelamente. El valor de cada momento magnético, por unidad de volumen, se toma de valor idéntico a la imanación de remanencia de un hilo amorfo rico en hierro (0.7 T).

La densidad de energía de cada momento magnético será:

$$E_i = -\mu_0 M_s H \cos\theta_i + K \sin^2\theta_i - J \sum_{j=1}^5 \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (6)$$

Para analizar la evolución temporal, hacemos uso de la ecuación fenomenológica que se describió en la sección dedicada a la dinámica de la imanación:

$$\theta'_i = -\eta \frac{\partial E_i}{\partial \theta_i} \quad (7)$$

donde θ_i es el ángulo que forma el momento magnético i con la dirección del campo, siendo η un parámetro que se responsabiliza del rozamiento. Se toma el valor $\eta = 75 \text{ J}^{-1}\text{s}^{-1}$, mediante el cual el sistema de los 5 momentos exhibe el comportamiento correcto y esperable cuando no existe interacción entre ellos.

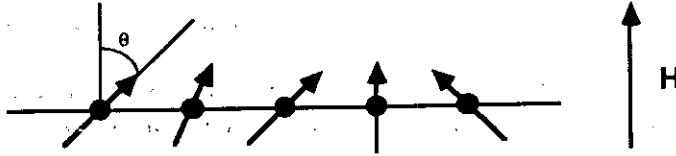


Figura 12 -. Cinco momentos magnéticos

Se resuelve el sistema de cinco ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo (7) mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Burden, 1985) para las siguientes condiciones iniciales: $\theta_1 = 5.1^\circ$, $\theta_2 = 5^\circ$, $\theta_3 = 5.3^\circ$, $\theta_4 = 5.5^\circ$ y $\theta_5 = 5.2^\circ$. Estos ángulos iniciales diferentes serían el equivalente a las pequeñas diferencias en los campos coercitivos de los hilos amorfos.

La figura 13 ofrece la variación temporal de la componente del momento magnético total (medido en teslas) en la dirección del campo, para distintos valores de J .

La figura 13a representa el caso sin interacción entre los momentos magnéticos ($J=0$). Todos ellos se mueven de forma análoga. Si $J = 2 \text{ Jm}^{-3}$ el comportamiento temporal es el de la figura 13b. Debido a la interacción entre los momentos magnéticos, algunos de ellos girarán más rápidamente que lo impuesto por el campo. Sigue habiendo periodicidad. Si $J = 12 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 13c) el movimiento es caótico debido a la fuerte interacción entre los momentos magnéticos, que impide seguir la variación del campo.

La figura 14 muestra los espectros de frecuencia para las señales temporales de la figura 13. La figura 14a ($J=0$) indica periodicidad total: se presentan la frecuencia excitadora y sus armónicos. Si $J = 2 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 14b), se modifica el aspecto del espectro, apareciendo una fuerte contribución de frecuencias más altas (del orden de 75 Hz) que la del campo excitador (10 Hz), debidas al giro rápido de los momentos magnéticos impuesto por la interacción. Si $J = 12 \text{ Jm}^{-3}$ (figura 14c) el espectro es continuo.

2 -. Caos en el movimiento de paredes

El desplazamiento, x , de una pared desde su posición de equilibrio se estudia mediante la siguiente ecuación (Chikazumi, 1964):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \alpha x = 2\mu_0 M_s H \quad (8)$$

donde m es la masa (de la pared) por unidad de superficie, β un coeficiente de rozamiento y α la constante de la fuerza recuperadora que tiende a forzar a la pared a retomar su posición de equilibrio. El término $2\mu_0 M_s H$ representa la presión que ejerce el campo H sobre la pared. Para deducir la ecuación (8) se ha supuesto que la pared se mueve en torno a su posición de mínima energía, por lo que la densidad de energía de pared (que depende de la anisotropía magnetoelástica) puede aproximarse por una parábola en un entorno de ese mínimo (Chikazumi, 1964). En este caso, la fuerza recuperadora es lineal. Para movimientos mayores de la pared y *dependiendo de la distribución de anisotropías*, la fuerza recuperadora puede no ser lineal.

Recientemente (Okuno, 1994) el análisis de la ecuación no lineal de movimiento de paredes revela claramente la presencia de caos cuando la distribución de anisotropías tiene una dependencia sinusoidal con la coordenada x .

En hilos amorfos, la existencia de una distribución de anisotropías magnetoelásticas no lineal en la coordenada radial puede propiciar la existencia de caos en el movimiento de la pared que determina la inversión de la imanación. Medidas realizadas por nosotros apuntan en este sentido, aunque los resultados no son todavía concluyentes. Este tema será el objetivo de futuros trabajos.

Para concluir, únicamente mencionar que no se ha apreciado la presencia de interacción ni desestabilización de ciclos con muestras de magnetostricción baja. Parece que van unidas la presencia de interacción entre hilos y la biestabilidad. No se han apreciado modificaciones sustanciales de esta interacción entre hilos ricos en hierro a bajas temperaturas. Medidas de ciclos de histéresis a la temperatura del nitrógeno líquido arrojan resultados similares a los de temperatura ambiente.

Figura 1 -. Ciclos de histéresis axiales de hilos ricos en hierro: a) un hilo, b) y c) dos hilos.

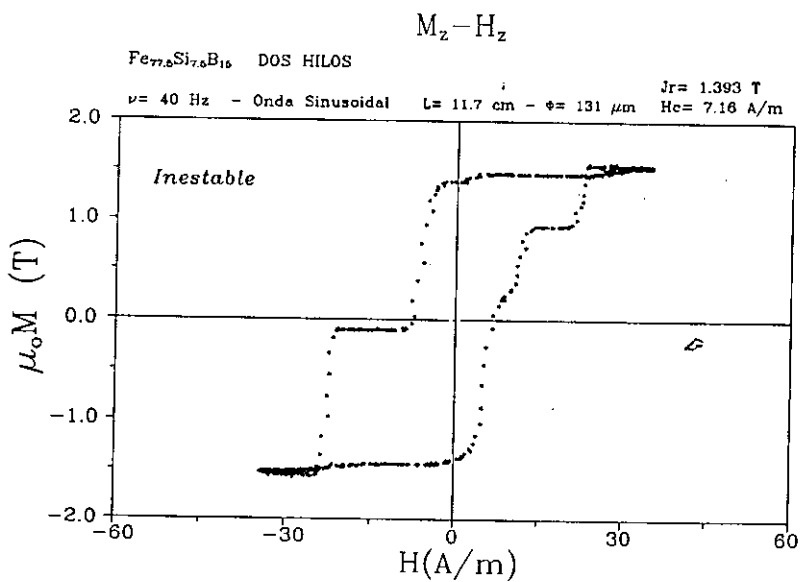
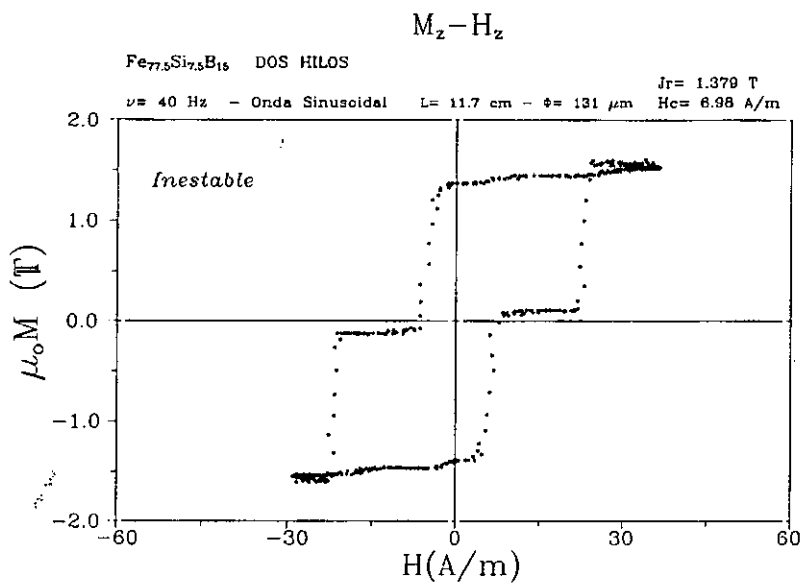
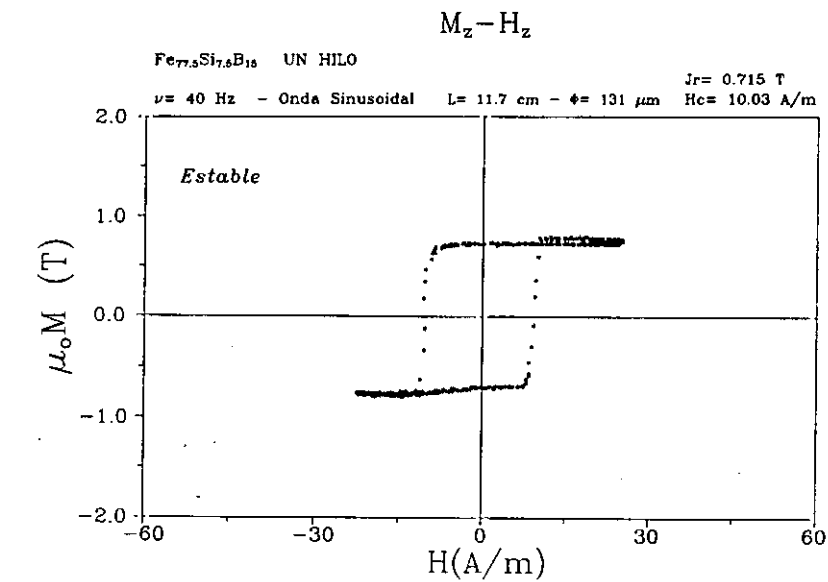
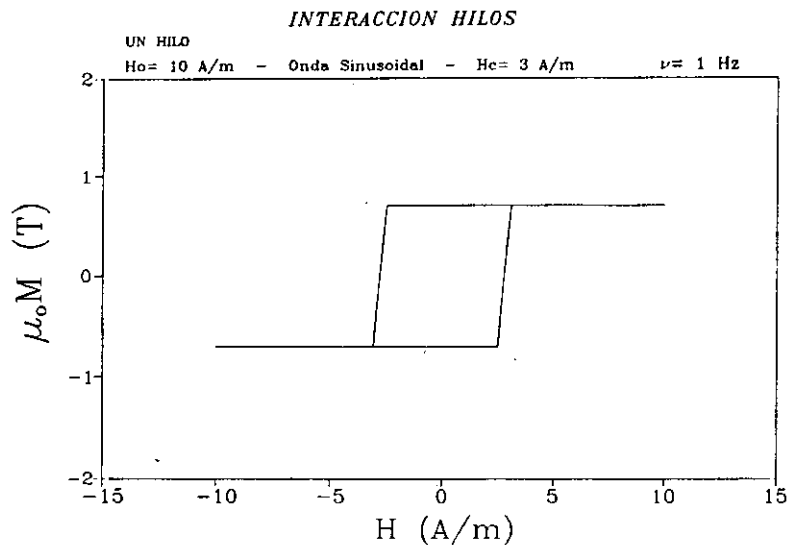
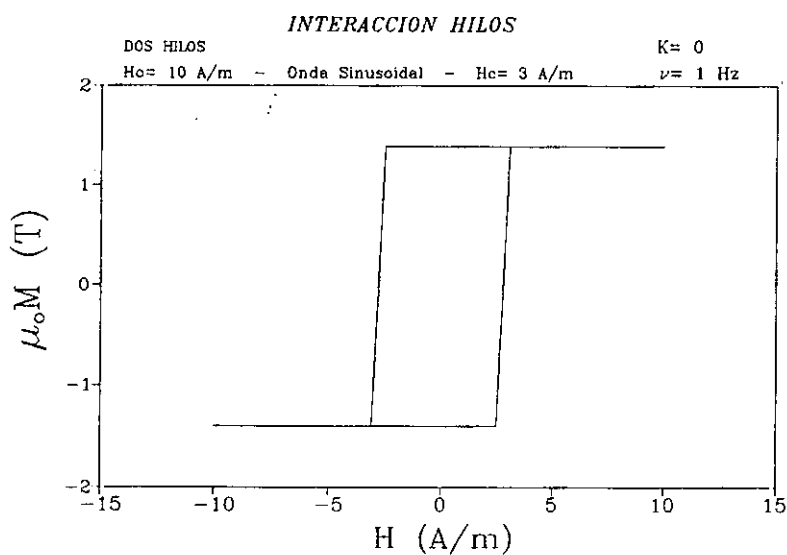


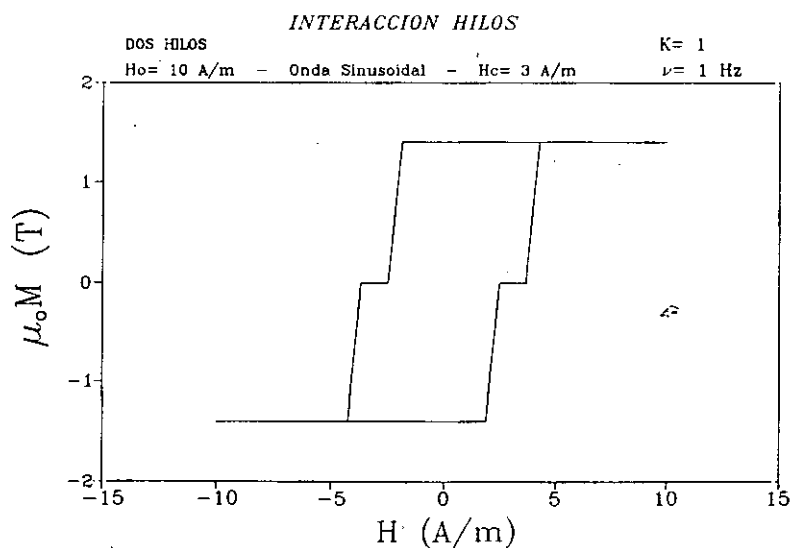
Figura 3 -. Ciclos de histéresis teóricos: a) un hilo, b) dos hilos sin interacción ($K=0$) , c) dos hilos con interacción ($K=1$).



a)

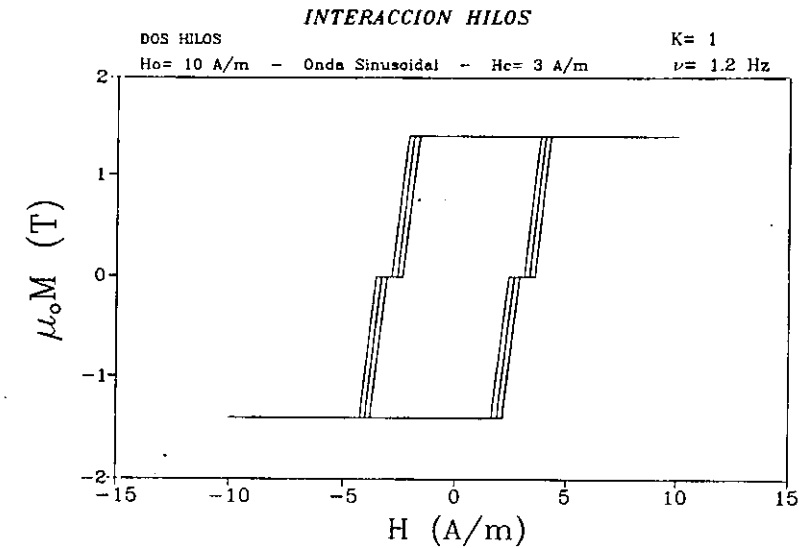


b)

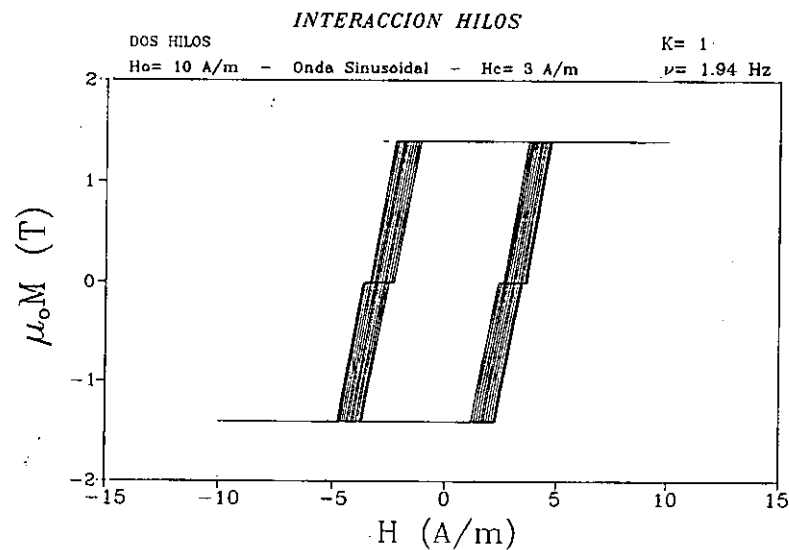


c)

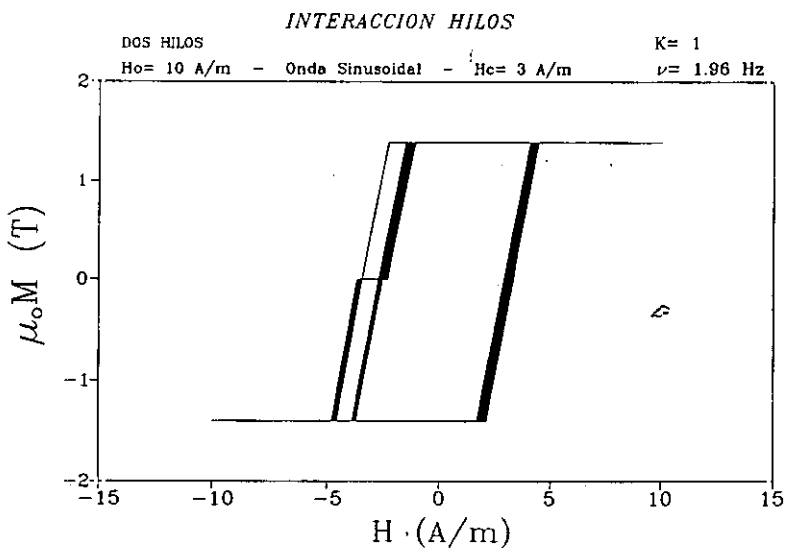
Figura 5 -. Ciclos de histéresis teóricos para dos hilos interaccionando ($K=1$) en función de la frecuencia, ν , del campo magnético alterno: a) $\nu= 1.2$ Hz, b) $\nu= 1.94$ Hz, c) $\nu= 1.96$ Hz.



a)

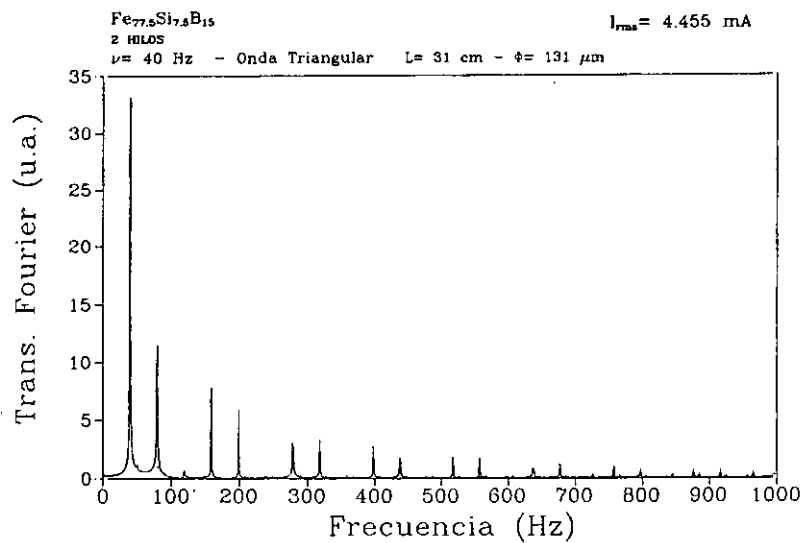


b)

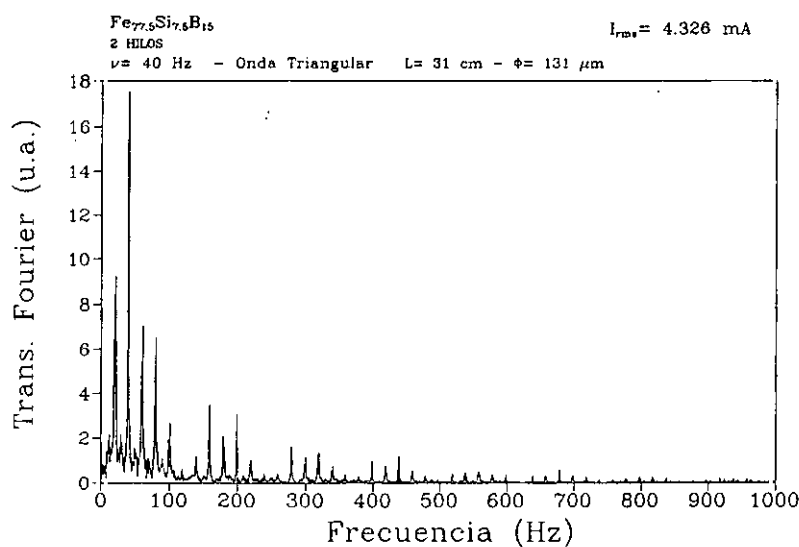


c)

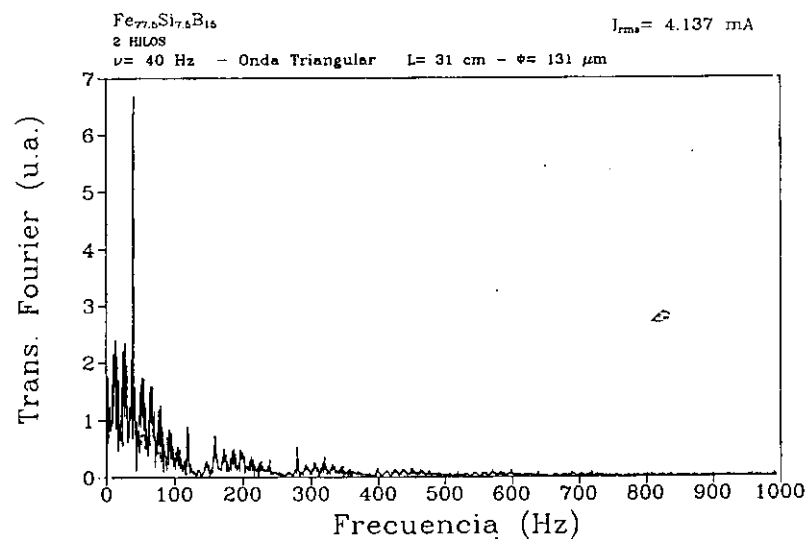
Figura 6 -. Transformadas de Fourier de la imanación total de dos hilos, cuando la frecuencia del campo es de 40 Hz e I_{rms} la intensidad eficaz que pasa por el solenoide excitador:
a) $I_{rms} = 4.455$ mA, b) $I_{rms} = 4.326$ mA, c) $I_{rms} = 4.137$ mA



a)

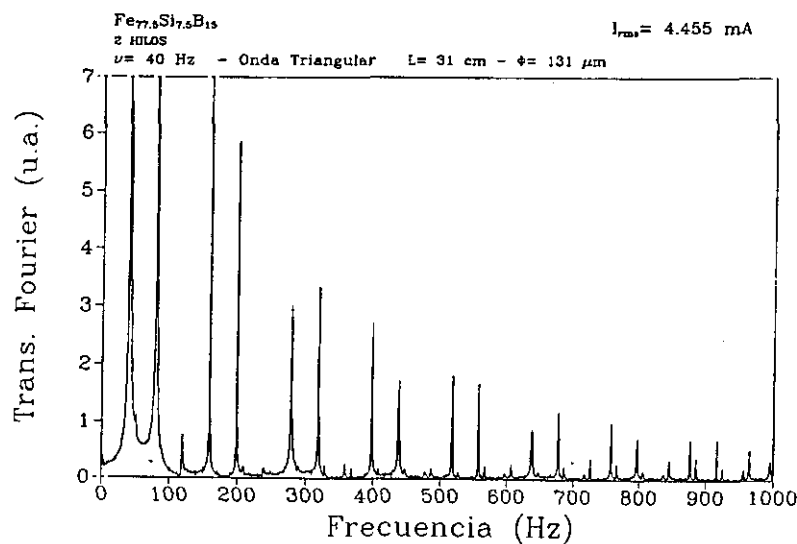


b)

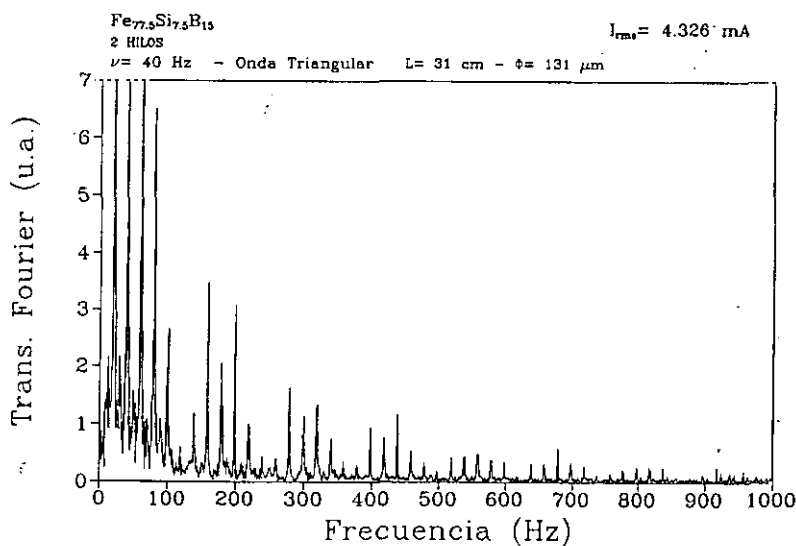


c)

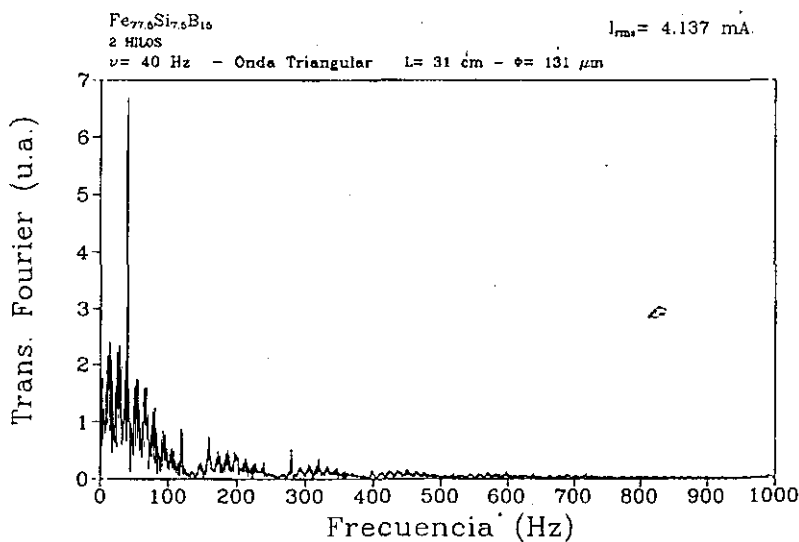
Figura 7 -. Transformadas de Fourier, con la misma escala vertical, de la imanación total de dos hilos, cuando la frecuencia del campo es de 40 Hz e I_{rms} la intensidad eficaz que pasa por el solenoide excitador: a) $I_{rms} = 4.455$ mA, b) $I_{rms} = 4.326$ mA, c) $I_{rms} = 4.137$ mA



a)



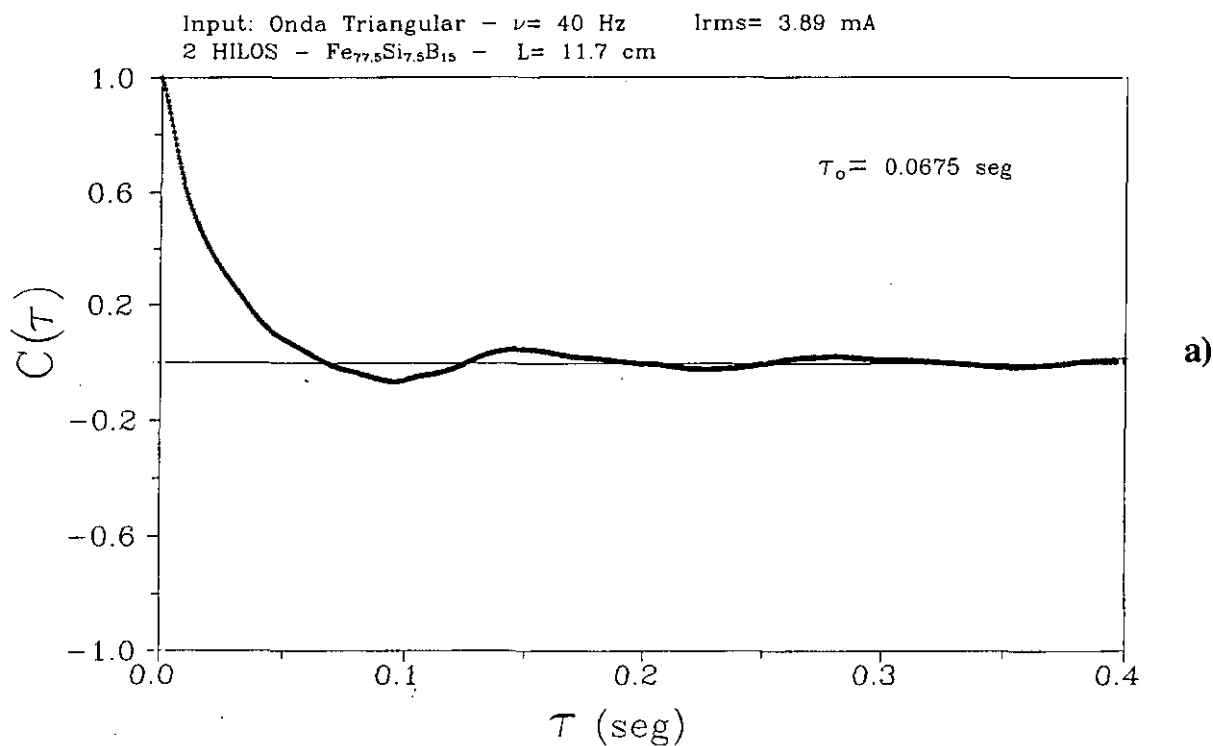
b)



c)

Figura 8 -. Funciones de correlación para dos circunstancias diferentes: a) $\nu = 40$ Hz, $I_{rms} = 3.890$ mA, b) $\nu = 200$ Hz, $I_{rms} = 5.528$ mA.

CORRELACION



CORRELACION

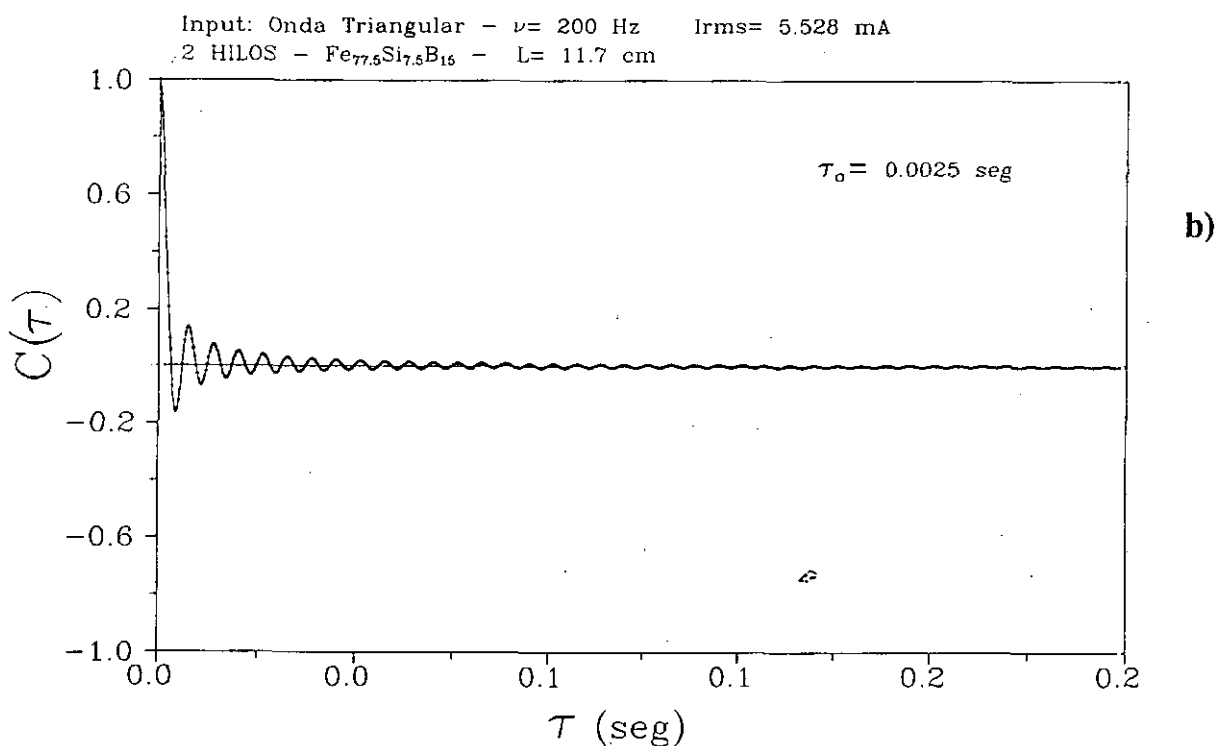
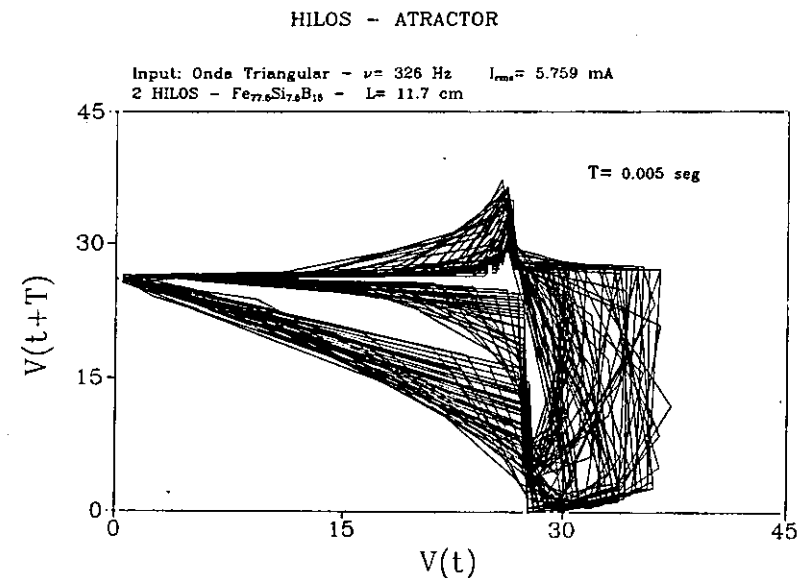
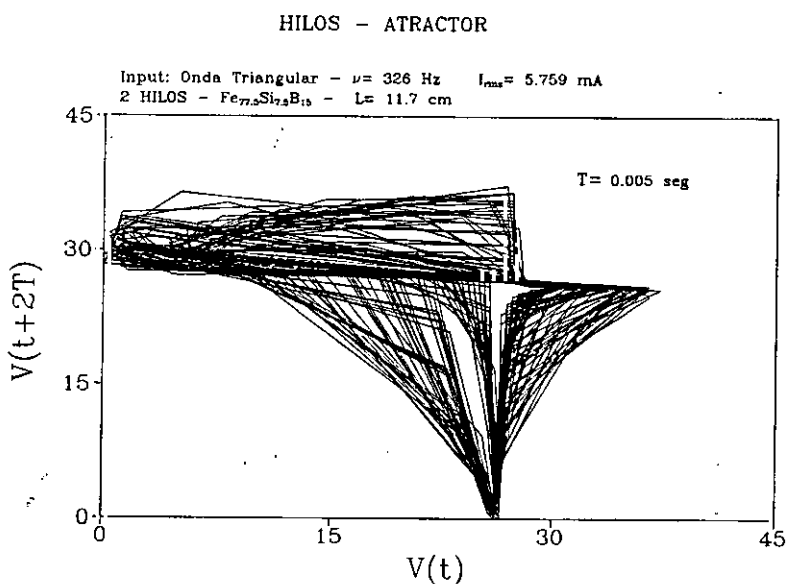


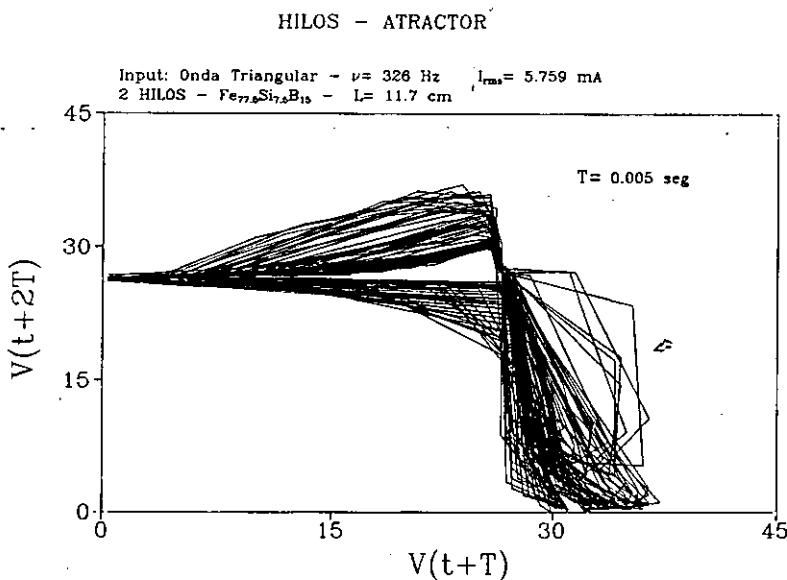
Figura 9 -. Reconstrucción del atractor: a) representación de $V(t)$ frente a $V(t+T)$, para $T=0.005$ segundos, b) representación de $V(t+2T)$ frente a $V(t)$, c) representación de $V(t+T)$ frente a $V(t+2T)$. $V(t)$ representa la variación temporal de la imanación de dos hilos en interacción.



a)

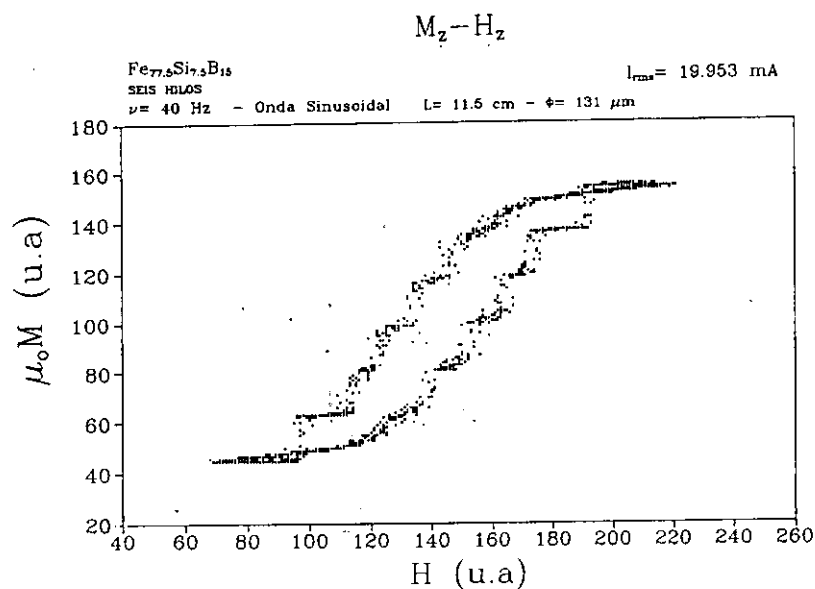


b)

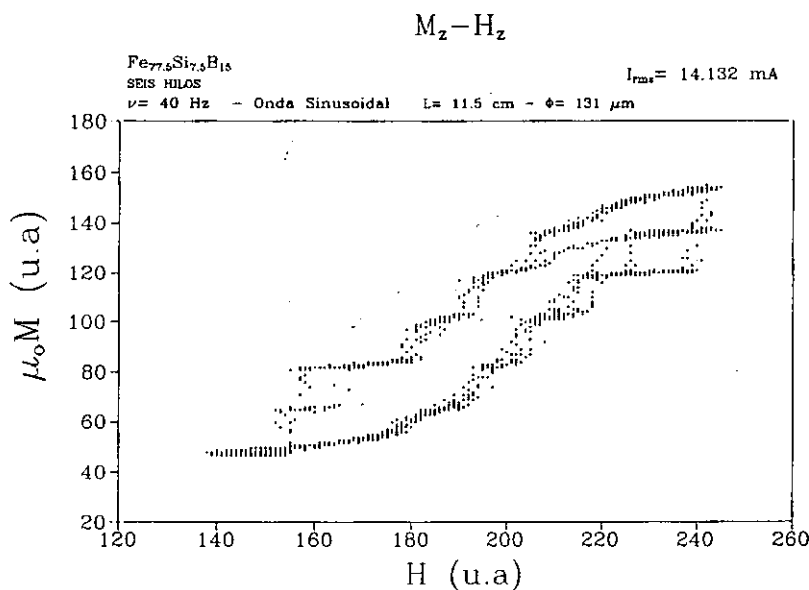


c)

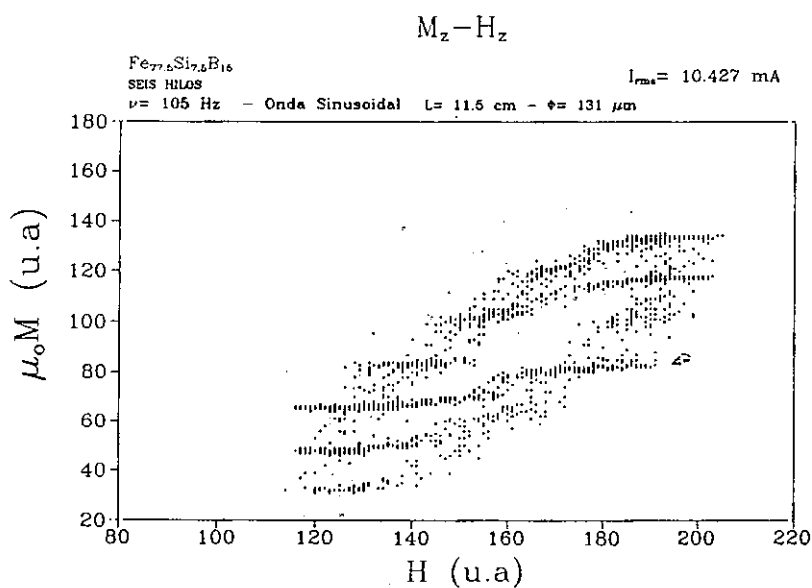
Figura 10 -. Ciclos de histéresis de 6 hilos, medidos a 40 Hz, para diferentes valores de la intensidad, I_{rms} , que pasa por el solenoide que genera el campo axial: a) $I_{rms} = 19.953$ mA, b) $I_{rms} = 14.132$ mA, c) $I_{rms} = 10.427$ mA.



a)



b)



c)

Figura 11 -. Representación de $M(t)$ (variación temporal de la imanación de 6 hilos) frente a $dM(t)/dt$ para varios valores de la intensidad de corriente, I_{rms} , que pasa por el solenoide: a) $I_{rms} = 19.953$ mA, b) $I_{rms} = 14.132$ mA, c) $I_{rms} = 10.427$ mA.

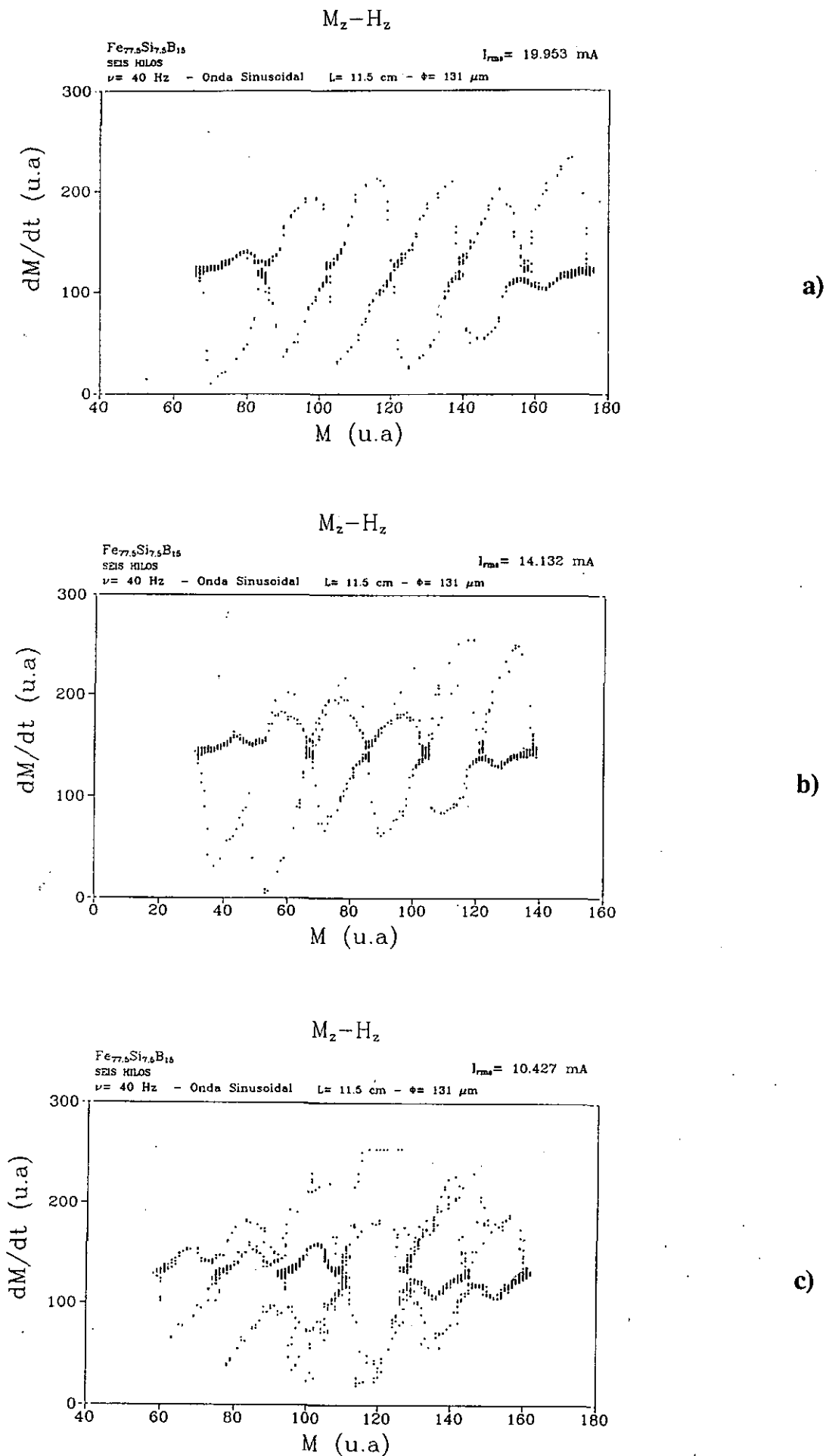
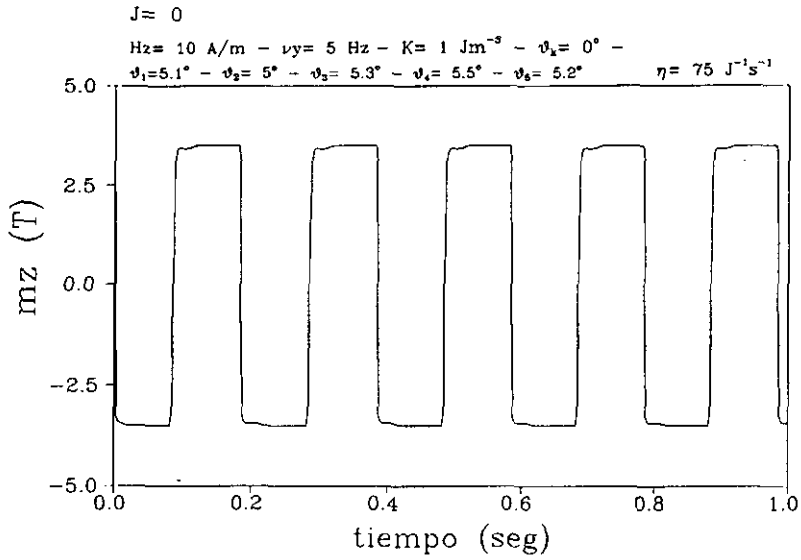
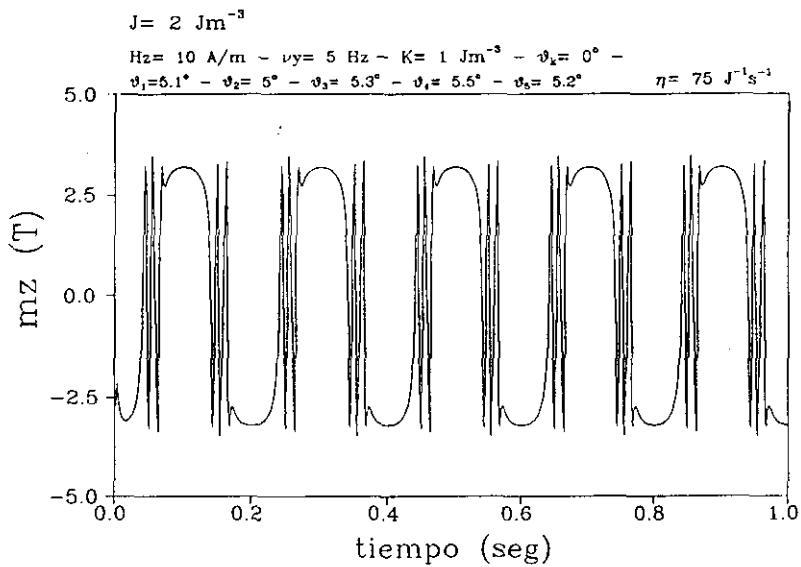


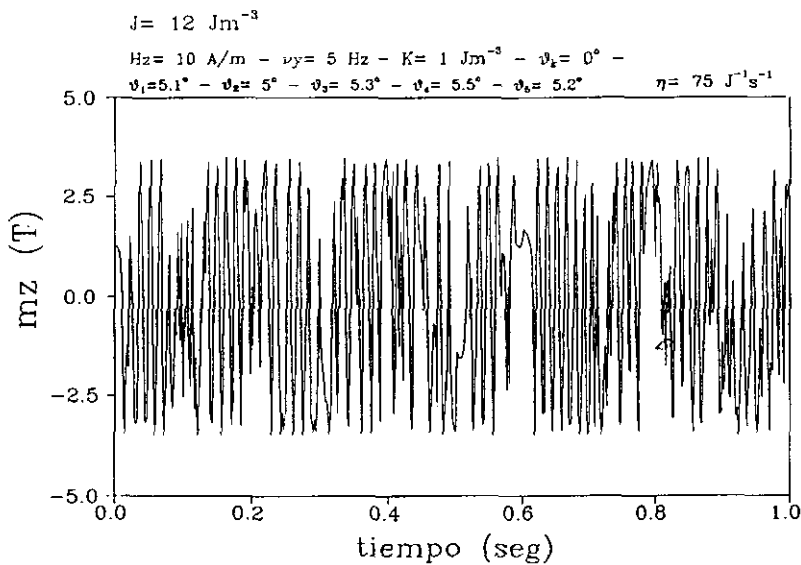
Figura 13 -. Variación temporal del del momento magnético total (en la dirección del campo) del sistema de cinco momentos, para diferentes valores de la interacción entre ellos: a) $J=0$, b) $J= 2 \text{ Jm}^{-3}$, c) $J= 12 \text{ Jm}^{-3}$.



a)

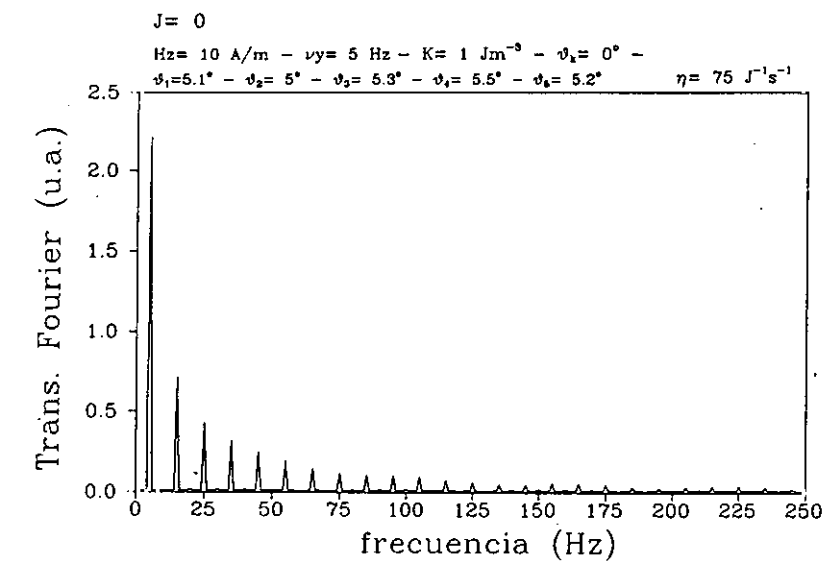


b)

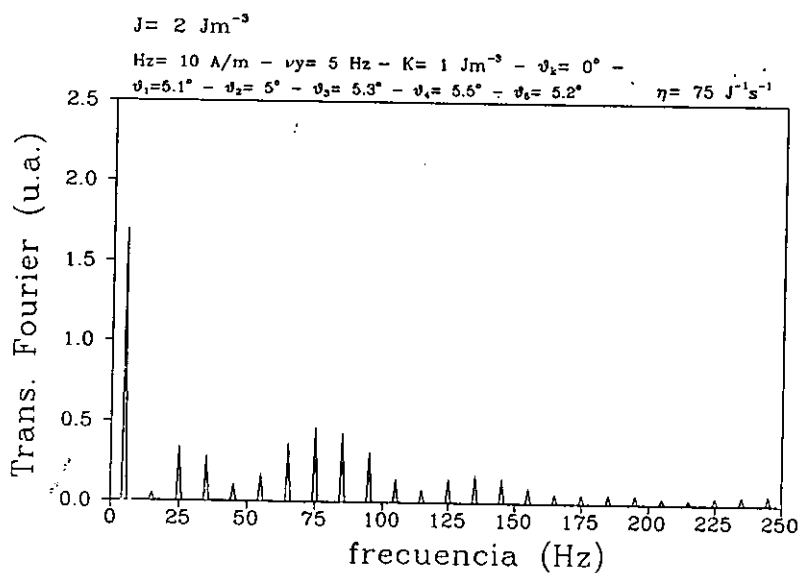


c)

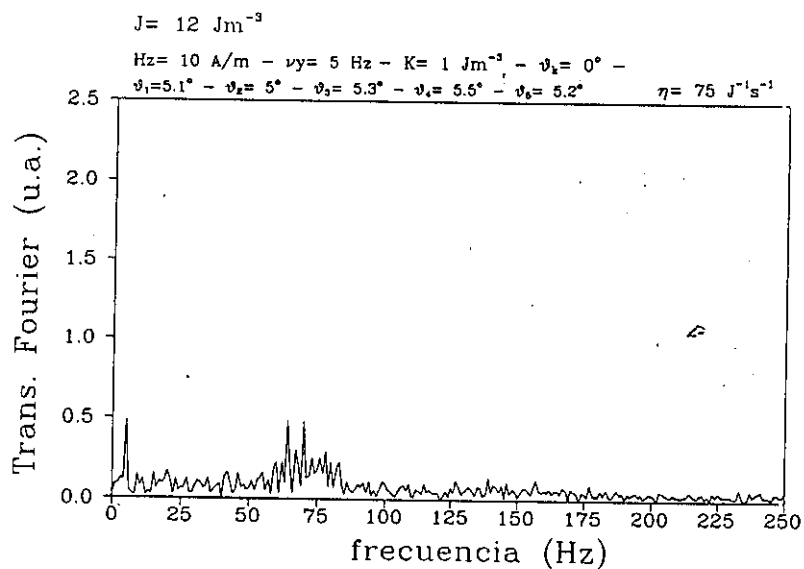
Figura 14 - . Transformadas de Fourier de la variación temporal del del momento magnético total (en la dirección del campo) del sistema de cinco momentos, para diferentes valores de la interacción entre ellos: a) $J=0$, b) $J= 2 \text{ Jm}^{-3}$, c) $J= 12 \text{ Jm}^{-3}$.



a)



b)



c)

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

El trabajo desarrollado en esta memoria puede resumirse en los siguientes puntos:

- La estructura de dominios de aleaciones amorfas ferromagnéticas con forma de hilo está determinada fundamentalmente por anisotropías magnetoelásticas.

- Las anisotropías magnetoelásticas provienen de la existencia de tensiones internas residuales, generadas durante la solidificación del hilo por enfriamiento ultrarrápido. La presencia de magnetostricción acopla la imanación y las tensiones, estando determinada la dirección de aquellas por éstas.

- Las tensiones internas siguen una distribución continua con la coordenada radial cilíndrica. Esta distribución puede calcularse, en primera aproximación, haciendo uso de la teoría de la elasticidad, suponiendo una solidificación progresiva por capas cilíndricas, comenzando ésta en la superficie del hilo y progresando hacia el interior. Se asume que el gradiente térmico es simétrico respecto del eje del hilo.

- El gradiente térmico real no es simétrico respecto del eje del hilo. El estado tensional del hilo puede entenderse como consecuencia de una flexión intrínseca, que se caracteriza por aportar tensiones asimétricas respecto del eje del hilo.

- Las condiciones de fabricación de aleaciones amorfas ferromagnéticas por solidificación ultrarrápida son especialmente determinantes en el caso de microhilos, en los cuales sus tensiones internas, y su estructura de dominios, vienen determinadas por el valor de una tensión externa ejercida durante la fabricación.

- La estructura de dominios queda caracterizada no sólo por los valores máximos de las tensiones sino también por su distribución particular en el hilo. Los ciclos de histéresis teóricos, calculados mediante un modelo de movimiento de imanación por rotaciones, revelan la influencia de distintas distribuciones de anisotropías, entre las que se incluyen unas helicoidales derivadas de la asimetría del gradiente térmico.

- Pueden medirse cuatro clases de ciclos de histéresis, dependiendo de la dirección del campo excitador y de la componente de la imanación que se mida. Mediante la información que aportan puede inferirse la distribución de imanación de hilos de distinta composición, tanto en estado as-cast como tras haber sido sometidos a procesos de recocido que relajan la magnitud de las tensiones internas y alteran su distribución. Los recocidos en horno favorecen la generación de tensiones radiales y los recocidos con corriente continua, propician la aparición de anisotropías helicoidales.

- La acción de tensiones externas mecánicas depende de la distribución de tensiones internas en el hilo

- En los hilos ricos en cobalto de magnetostricción negativa casi nula puede inducirse una intensa variación temporal de la imanación circular por aplicación de campos circulares. Muestran una fuerte dependencia de la susceptibilidad circular ante un campo magnético externo. Se dice que presentan magnetoimpedancia gigante, característica útil para el diseño de sensores de campo

magnético.

- La distribución de tensiones internas en hilos amorfos condiciona el efecto Wiedemann, en virtud del cual un péndulo de torsión construido con hilo amorfo ferromagnético puede moverse cuando es sometido a la acción de campos magnéticos axiales y circulares.

- La complejidad del comportamiento mecánico y magnético del péndulo puede entenderse en términos de la Teoría del Caos.

- El momento torsor excitador del giro del péndulo es originado por el movimiento de la imanación en el hilo; este movimiento es propiciado por la competencia entre las anisotropías intrínsecas del hilo y los campos magnéticos aplicados. Se sugiere que este movimiento puede ser caótico para distribuciones de anisotropía particulares. De esta forma, se excita el péndulo con una señal caótica.

- En el movimiento de torsión cada dominio magnético presenta una frecuencia de resonancia característica, determinada por el diferente módulo de cizalladura que presentan debido a la distinta orientación de la imanación en cada uno de ellos. Un modelo simple sugiere la ausencia de sincronía en la respuesta mecánica de cada dominio.

- Paralelamente, el momento torsor elástico, que se opone al movimiento inducido por el excitador, tiene una contribución no lineal en el ángulo de torsión. La preponderancia del término lineal impide al péndulo exhibir un movimiento plenamente caótico.

- La variación de los módulos elásticos, de Young y de cizalladura, con los campos externos depende de la orientación de la imanación y ésta de la distribución de tensiones internas.

- Las tensiones internas en un hilo rico en hierro propician una estructura de dominios que posibilita la inversión de la imanación mediante un único salto Barkhausen. Esta inversión puede verse afectada por la presencia de otros hilos de idénticas características, en virtud de una interacción magnetostática entre los hilos debida a la presencia de polos magnéticos en sus extremos. Esta interacción conduce a una inestabilidad del ciclo de histéresis axial del conjunto de hilos. La variación temporal de la imanación total puede ser entendida en términos de Caos. No se ha apreciado esta inestabilidad en hilos no biestables.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- Abarbanel, H.D.: "*The analysis of observed chaotic data in physical systems*", *Reviews of Modern Physics*, **65** (4), 1993, p. 1331-1392.
- Aharoni, A.: "*Analytic solution to the problem of magnetic films with a perpendicular surface anisotropy*", *Phys. Rev. B*, **47** (13), 1993, p. 8296-8297.
- Akishin, P.G., Gagamov, I.A.: "*The macroscopic demagnetizing effects in cylindrical and rectangular box samples*", *J. Magn. Magn. Mater.*, **110**, 1992, p. 175-180.
- Alcalde, A.R., Alonso, C., Velázquez, J., (1): "*Fractales para la arqueología: un nuevo lenguaje*" - *Trabajos de Prehistoria*, **52** (1), 1995.
- Alcalde, A.R., Alonso, C., Velázquez, J., (2): "*La difusión occidental de especies domésticas: una alternativa a la "ola de avance"*" - *Actas del I Congreso de Neolítico en la Península Ibérica* - Gavá, 1995.
- Ammerman, A.J., Cavalli-Sforza, L.L.: "*The neolithic transition and the genetic of populations in Europe*", Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1984.
- Anónimo: "*El Kybalion de Hermes Trimegisto*" - Editorial Edaf, Madrid, 1980.
- Apostol, T.M.: "*Calculus*" - Tomo II - Editorial Reverté, Barcelona 1980.
- Atalay, S., Squire, P.T.: "*Magnetomechanical damping in FeSiB amorphous wires*", *J. Appl. Phys.*, **73** (2), 1993, p. 871-875.
- Atkinson, D., Squire, P.T., Gibbs, M.R.J., Atalay, S., Lord, D.G., (1): "*The effect of annealing and crystallization on the magnetoelastic properties of Fe-Si-B amorphous wire*", *J. Appl. Phys.*, **73** (7), 1993, p. 3141-3417.
- Atkinson, D., Squire, P.T., Gibbs, M.R.J., Yamasaki, J., (2): "*High-resolution ΔE measurement of Fe-Si-B amorphous wire*", *IEEE Trans. Magn.*, Noviembre, 1993.
- Barandiarán, J.M., Gutierrez J., Hernando, B., García-Arribas, A.: "*Non linear behavior of the magnetoelastic resonance in Fe-rich metallic glasses*", *Magnetoelastic Effects and Applications*, edited by L. Lanotte, Elsevier Science Publishers, B.V., 1993, p. 23-29.
- Baranov, S.A., Larin, V.S., Torcunov, A.V., Zhukov, A., Vázquez, M.: "*Magnetic properties of glass insulated amorphous microwires*", in "*Nanocrystalline and Non-Crystalline Materials*", Ed. M. Vázquez and A. Hernando, Scientific World, Singapore, 1995 (en prensa).

- Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, Ch.: "*L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*", Hermann éditeurs des sciences et des arts, Paris, 1992.
- Brown, F.: "*Física de los sólidos*", Editorial Reverté, Barcelona, 1970.
- Burden, R.L., Faires, J.D.: "*Numerical Analysis*", PWS, Boston, 1985.
- Casati, G.: "*De los billares al caos de los átomos*" - Mundo Científico, **115**, (1991) p. 756-762.
- Chen, D.-X., Brug, J.A., Goldfarb, R.B.: "*Demagnetizing Factor for Cylinders*", IEEE Trans. Magn., **27** (4), p. 3601-3619.
- Chen, D.-X., Vázquez, M., de Julián, C., Gómez-Polo, C.: "*AC loss analysis and domain structure in magnetostrictive amorphous wire*", J. Magn. Magn. Mat., **115**, 1992, p. 295-306.
- Chikazumi, S.: "*Physics of Magnetism*", Edited by John Wiley and Sons, Inc., Florida, 1964.
- Costa, J.L., Rao, K.V.: "*Induced anisotropy in as-quenched amorphous wires*", Physics of Magnetic Materials, World Scientific, 1990, World Scientific Publishing Co., Pte. Ltd-1990.
- Costello, E.B.: "*Cosmogonía*" - Gran Enciclopedia del Mundo - Tomo 5, Durván S.A. de Ediciones, Bilbao, 1978.
- Crawford, F.S.: "*Ondas*" - Berkeley Physics Course - Volumen 3 - Editorial Reverté, Barcelona, 1979.
- Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Packard, N.H., Shaw, R.S.: "*Caos*" - Investigación y Ciencia, **125** (1987), p. 16-29.
- Davídov, A.S.: "*Teoría del Sólido*", Editorial Mir, Moscú, 1981.
- Del Real, R.P., Prados, C., Chen, D.-X., Hernando, A., Vázquez, M.: "*Eddy current damping of planar domain wall in bistable amorphous wires*", Appl. Phys. Lett., **63**, 1993, p. 3518-3520.
- Ditto, W.L., Rauseo, S., Cawley, R., Gregobi, C., Hsu, G., Kostelich, E., Ott, E., Savage, H.T., Segman, R., Spano, M.L., Yorke, J.A.: "*Experimental observation of crisis-induced intermittency and its critical exponent*", Physical Review Letter, **63** (9), 1989, p. 923-926.
- Ditto, W.L., Pecora, L.M.: "*Dominar el caos*" - Investigación y Ciencia, **205** (1993), p.48-55.
- Eisberg, R., Resnick, R.: "*Física Cuántica*", Editorial Limusa, México, 1983.
- Elliot, S.R.: "*Physics of amorphous materials*", editado por Longman Group Limited, Essex, 1989.
- Epstein, I.R., Kustin, K., Keeper, P., Orban, M.: "*Reacciones químicas oscilantes*" - Investigación y Ciencia, **80**, (1983), p. 82-92.

- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: "*Física. Volumen II: Electromagnetismo y materia*", Addison-Wesley Iberoamericana, México D.F., 1987.
- Galindo, A., Pascual, P.: "*Mecánica Cuántica*" - Editorial Alhambra, Madrid 1978.
- Gleik, J.: "*Caos. La creación de una nueva ciencia*", Editorial Seix Barral, S.A., Barcelona, 1992.
- Goldberger, A.L., Rigney, D.R., West, B.J.: "*Caos y fractales en la fisiología humana*" - Investigación y Ciencia, **163** (1990), p. 30-38.
- Goldstein, H.: "*Mecánica clásica*", Editorial Reverté, S.A., Madrid, 1992.
- Gómez-Polo, C., Reininger, T., Vázquez, M., Kornmueller, H.: "*Magnetic bistability in as-cast non-magnetostrictive amorphous wire*", IEEE Trans. Magn., **29**, 1993, p.3481-3483.
- Gonzalez, F.: "*Problemas de Física. Tomo I: Mecánica*", Editorial Tebar Flores, Madrid, 1984.
- González, J., Vázquez, M., Barandiarán, M., Hernando, A.: "*Effects of current annealing on the hysteresis loops of amorphous alloys*", J. Phys. D: Appl. Phys., **21** (1988), p. 162-167.
- González, J., Blanco, J.M., Barandiarán, J.M., Vázquez, M., Hernando, A., Rivero, G., Niarchos, G.: "*Helical magnetic-anisotropy induced by current annealing under torsion in amorphous wires*", IEEE Trans. Magn, **26**, 1990, p. 1798-1800.
- Grassberger, P.: "*La percolación o la geometría del contagio*" - Mundo Científico, **115** (1991), p. 764-770.
- Greene, J.M.: "*A method for determining stochastic transition*" - J. Math. Phys., **20** (6), 1979, p. 1183-1201.
- Gutzwiller, M.C.: "*El caos cuántico*" - Investigación y Ciencia, **186**, (1992), p. 14-20.
- Guzmán, M., Martín, M., Morán, M., Reyes, M.: "*Estructuras fractales y sus aplicaciones*", Editorial Labor, Barcelona, 1993.
- Handbook: "*CRC Handbook of Chemistry and Physics*", CRC Press, Inc, Florida, 1986.
- Hernando, A.: "*Nuevos materiales: los vidrios metálicos*", Eudema, S.A., Madrid, 1987.
- Hernando, A., Barandiarán, J.M.: "*Circular magnetization measurement in ferromagnetic wires*", J. Phys. D: Appl. Phys., **11**, 1978, p. 1539-1542.
- Hernando, A., Barandiarán, J.M.: "*Micromagnetics of twisted amorphous ribbons*" - Physical Review B, **22** (5), 1980, p. 2445-2449.
- Hernando, A., Barro, M.J., Rivero, G., Chen D.-X., Vázquez, M., (1): "*Influence of magnetostriction on the reversal of amorphous wires*", Magnetoelastic Effects and Applications, edited by L. Lanotte, Elsevier Science Publishers, B.V., 1993, p. 39-45.

- Hernando, A., Velázquez, J., (2): "*Effect of molecular field periodicity on energy of free electrons in ferro-paramagnetic multilayers*", Jpn J. Appl. Phys. **32** (1993) p. 5537-5540.
- Hernando, A., Madurga, V., Barandiarán, J.M., Liniers, M.: "*Anomalous eddy currents in magnetostrictive amorphous ferromagnet: a large contribution from magnetoelastic effects*", J. Mag. Magn. Mater., **28** (1982), p. 106-109.
- Hubbard, B.B., Hubbard, J.: "*Ley y orden en el Universo*" - Investigación y Ciencia, **222**, (1995), p. 64-72.
- Humphrey, F.B., Mohri, K., Yamasaki, J., Kawamura, H., Malhäll, R., Ogasawara, I.: "*Re-entrant magnetic flux reversal in amorphous wires*", Magnetic Properties of Amorphous Metals, Edited by A. Hernando, V. Madurga, M.C. Sánchez and M. Vázquez, Elsevier Sc. Publ. 1987, p. 111-116.
- Isachenko, V., Osipova, V., Sukomel, A.: "*Transmisión del calor*" - Marcombo Boixareu Editores, Barcelona, 1979.
- Jaroszewicz, A., Sukiennick, A.: "*Three routes to chaos in a Heisenberg chain of spins*", J. Magn. Magn. Mater., **104-107**, (1992), p. 867-868.
- Jürgens, H., Peitgen, H.O., Saupe, D.: "*El lenguaje de los fractales*" - Investigación y Ciencia, **169** (1990), p. 46-57.
- Kimura, K., Kanoh, M., Kawashima, K., Mohri, K., Tagaki, M., Panina, L.V.: "*Data tablet utilizing Matteucci effect of amorphous magnetic wire matrix*", IEEE Trans. Magn., **27**, 1991, p. 4861-4863.
- Kinoshita, F.: "*Estimation of the radius of the inner core and the angle of the easy axis of its magnetization for as-prepared amorphous magnetostrictive wire*", IEEE Trans. Magn., **26**, 1990, p. 1786-1788.
- Kittel, Ch.: "*Introducción a la Física del Estado Sólido*", Editorial Reverté, Barcelona, 1993.
- Knobel, M., Sánchez, M.L., Velázquez, J., Vázquez, M.: "*Stress dependence of the giant magneto-impedance effect in amorphous wires*", Journal of Physics: Condensed Matter, 1995 (en prensa).
- Krauss, L., Kane, S.N., Vázquez, M., Rivero, G., Fraga, E., Hernando, A., Barandiarán, J.M.: "*Tensor components of the magnetization in a twisted Fe-rich amorphous wire*", J. Appl. Phys., **75**, (10), 1994, p. 6952-6954.
- Lanchares, V., Iñarrea, M., Salas, J.P., Sierra, J.D.: "*Bifurcaciones en un sistema de un grado de libertad. Comportamiento caótico bajo perturbaciones no estacionarias*", Revista Española de Física, **8** (1), 1994, p. 52-56.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: "*Teoría de la Elasticidad*" - vol. 7 Curso Física Teórica, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1969.

- Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: "*Física Estadística*" - Volumen 5 Curso Física Teórica, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.
- Landau, L., Ajiezer, A., Lifshitz, E.: "*Curso de Física General*" - Editorial Mir, Moscú, 1979.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: "*Mecánica*" - vol.1 Curso Física Teórica. Editorial Reverté, S.A., Madrid, 1988.
- Laskar, J., Froesché, C.: "*El caos en el sistema solar*" - Mundo Científico, 115 , (1991), p. 732-740.
- Liniers, M., Madurga, V., Vázquez, M., Hernando, A.: "*Magnetostrictive torsional strain in transverse-field-annealed Metglass 2605*" - Physical Review B, 31 (7), 1985, p. 4425-4432.
- Liu, J., Malmhäll, R., Arnberg, L., Savage, S.J.: "*Theoretical analysis of residual stress effects on the magnetostrictive properties of amorphous wire*", J. Appl. Phys., 67 (9), 1990, p. 4238-4240.
- Livingston, J.D.: "*Magnetomechanical properties of amorphous metals*", Phys. Stat. Sol. (a), 70, 1982, p. 591-596.
- Lorentz, E.N.: "*La esencia del caos. Un modelo científico para la disparidad de la naturaleza*", Círculo de Lectores, S.A., Barcelona, 1995.
- Madurga, V., Vázquez, M., Barandiarán, J., Nielsen, O.V., Hernando, A.: "*On the second-order elastic effects in amorphous ribbons under torsion*", J. Phys. D.: Appl. Phys., 17 (1984), p. 127-132.
- Madurga, V., Hernando, A.: "*Radial stress distribution generated during rapid solidification of amorphous wires*" - J. Phys.: Condens. Matter, 2 (1990), p. 2127-2132.
- Malmhäll, R., Mohri, K., Humphrey, F.B., Manabe, T., Kawamura, H., Yamasaki, J., Ogasawara, I.: "*Bistable magnetization reversal in 50 μm diameter annealed cold-drawn amorphous wires*", IEEE Trans. Magn., 23, 1987, p. 3242-3244.
- Malyugin, D.V.: "*On the theory of Wiedemann effects*", J. Magn. Magn. Mater., 97 (1991), p.193-197.
- Mandal, K., Ghatak, S.K.: "*Large magnetoresistance in an amorphous $\text{Co}_{68.1}\text{Fe}_{4.4}\text{Si}_{12.3}\text{B}_{15}$ ferromagnetic wire*", Phys. Rev. B, 47 (21), 1993, p. 14233-14236.
- Martin, D.H.: "*Magnetism in Solids*", London Ilife Books, Ltd. London, 1967.
- May, R.: "*Caos en biología*" - Mundo Científico, 115 (1991), p. 746-754.
- Mohri, K., Humphrey, F.B., Kawashima, K., Kimura, K., Mizutani, M.: "*Large Barkhausen and Matteucci effects in FeCoSiB , FeCrSiB and FeNiSiB amorphous wires*", IEEE Trans. Magn., 26, 1990, p. 1789-1791.

- Mohri, K., Humphrey, F.B., Yamasaki, J., Kinoshita, F.: "*Large Barkhausen Effect and Matteucci Effect in Amorphous Magnetostrictive Wires for Pulse Generators Elements*", IEEE Trans. Magn., **21**, 1985, p. 2017-2019.
- Mohri, K., Kohzawa, T., Kawashima, K., Yoshida, H., Panina, L.V.: "*Magneto-inductive effect (MI effect) in amorphous wires*", IEEE Trans. Magn., **28** (5), p. 3150-3152.
- Moon, H.: "*Approach to chaos through instabilities*" - Reviews of Modern Physics, **65**, (1993), p.1535-1543.
- Nicolis, C.: "*¿ Puede bascular el clima ?*" - Mundo Científico, **115** (1991), p. 742-745.
- Nicolis, C., Nicolis, G.: "*Is there a Climatic Atractor ?*", Nature, **311**, 1984, p. 592-532.
- Nicolis, G.: "*La estructura de lo complejo*", Alianza Editorial, Madrid, 1994.
- Núñez de Villacencio, C., Vázquez, M., Madurga, V., Hernando, A.: "*A new, simple measurement of the magnetostriction constant in metallic glass ribbons*", J. Magn. Mater. **59** (1986), p. 333-345.
- Okuno, H., Homma, T.: "*Bifurcation diagram and large energy dissipation caused by chaotic domain-wall motion*", paper DF-11 presentado en 6th Joint MMM-Intermag Conference, Albuquerque, New Mexico, 1994.
- Ortiz, L.: "*Elasticidad*", Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Madrid, 1985.
- Ott, E., Sommerer, J.C., Alexander, J., Kan, I., Yorke, J.A.: "*Scaling behavior of chaotic system with riddled basins*" - Physical Review Letters, **71** (25), 1993, p.4134-4137.
- Pávlov, P.V., Jojlov, A.F.: "*Física del estado sólido*", Editorial Mir, Moscú, 1987.
- Penrose, R.: "*La nueva mente del emperador*" - Mondadori España, S.A, Madrid, 1991.
- Prigogine, I.: "*¿ Tan sólo una ilusión ? Una exploración del caos al orden*", Tusquets Editores, S.A., Barcelona, 1993.
- Prigogine, I., Stenger, I.: "*La Nueva Alianza. Metamorfosis de la Ciencia*", Alianza Universidad, Madrid, 1994.
- Rañada, A.F.: "*Movimiento Caótico*" - Investigación y Ciencia, **114** (1986) p. 12-23.
- Ross, S.L. : "*Ecuaciones diferenciales*", Editorial Reverté, Barcelona, 1981.
- Sánchez del Río, C.: "*Introducción a la teoría del átomo*", Editorial Alhambra, Madrid, 1977.
- Sánchez, P., Dehesa, C., Rodríguez, M., López, E., Sánchez, M.C., Aroca, C.: "*Influence of the anisotropy dispersion on magnetostriction measurements*", J. Magn. Mater. **104-107** (1992), p. 145-146.
- Sander, L.M.: "*Crecimiento fractal*" - Investigación y Ciencia, **126** (1987), p. 66-73.

- Savage, H.T., Adler, Ch.: "*Magnetoelastic bifurcation in an amorphous ribbon*" - J. Magn. Magn. Mater., **58** (1986), p. 320-324.
- Savage, H.T., Abbundi, R.: "*Perpendicular susceptibility, magnetomechanical coupling and shear modulus in $Tb_{0.27}Dy_{0.73}Fe_2$* " - IEEE Trans. on Magnetic, **MAG-14**, (1978), p. 545-547.
- Sears, F.W., Zemansky, M.W.: "*Física General*", Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid, 1981.
- Severino, A.M., Gómez-Polo, C., Marín, P., Vázquez, M.: "*Influence of the sample length on the switching process of amorphous wires*", J. Magn. Magn. Mat., **103**, 1992, p. 117-125.
- Sixtus, K.J., Tonks, L.: "*Propagation of large Barkhausen discontinuities*", Phys. Rev., **42**, 1932, p. 419-436.
- Sommerer, J.C., Ott, E.: "*A physical system with qualitatively uncertain dynamics*" - Nature, **365** (1993), p. 138-140.
- Squire, P.T., Atkinson, D., Gibbs, M.R.J., Atalay, S.: "*Amorphous wires and their applications*", Paper Invitado A-I-02 presentado en EMMA'93, Kosice, Slovakia, 24-27 Agosto, 1993.
- Timoshenko, S., Goodier, J.N.: "*Teoría de la Elasticidad*", Ed. Urmo, Bilbao, 1968.
- Torroja, E.: "*Elasticidad*", Ed. Dossat, S.A., Madrid, 1967.
- Vázquez, M., Gómez-Polo, C., Chen D.-X.: "*Switching mechanism and domain structure of bistable amorphous wires*", IEEE Trans. Magn., **28**, 1992, p. 3147-3149.
- Vázquez, M., Gómez-Polo, C., Velázquez, J., Hernando, A.: "*Bending stresses and biestable behavior in Fe-rich amorphous wire*", J. Appl. Phys., **75** (10), 1994, p. 5791-5793.
- Vázquez, M., Velázquez, J., Chen, D.-X.: "*Comment on 'Large magnetoresistance in an amorphous $Co_{68.1}Fe_{4.4}Si_{12.3}B_{15}$ ferromagnetic wire'*", Phys. Rev. B., **51** (1), 1995, p. 652-653.
- Velázquez, J., Vázquez, M., Hernando, A., Savage, H.T., Wun-Fogle, M.: "*Magnetoelastic anisotropy in amorphous wires due to quenching*", J. Appl. Phys., **70** (10), 1991, p. 6525-6527.
- Velázquez, J.: "*Las Musas*" - Gaya, Revista Creativa Literaria, nº 4, Valdemoro, 1994, p.7
- Velázquez, J., Navarro, E., Vázquez, M., Hernando, A., Rivero, G., Barandiarán, J.M.: "*Torsional mode magnetoelastic resonance in ferromagnetic amorphous wire*", J. Appl. Phys., **77**, (11), 1995.
- Velázquez, J., Vázquez, M., Chen, D.-X., Hernando, A.: "*Giant magnetoimpedance in nonmagnetostrictive amorphous wires*", Phys. Rev. B., **50**, (22), 1994, p. 16737-16740.

- Vohra, S.T.; Bucholtz, F.: "*Dynamic characteristic of a subcritical bifurcation with inversion symmetry*" - Physical Reviews Letters, **70** (10), 1993, p. 1425-1428.
- Waseda, Y., Ueno, S., Hagiwara, M., Aust, K.T.: "*Formation and mechanical properties of Fe-base and Co-base amorphous alloys wires produced by in-rotating-water spinning method*", Progr. Mat. Sci., **34**, 1990, p. 149-260.
- Wun-Fogle, M., Restorff, J.B., Clark, A.E.: "*Suppression of large Barkhausen jumps in annealed amorphous wires with an imposed twist as a function of current, external axial stress and axial field*", J. Appl. Phys., **70** (10), 1991, p. 6519-6521.
- Zhukov, A.P., Vázquez, M., Velázquez, J., Chiriac, H., Larin, V., (1): "*The remagnetization process in thin and ultra-thin Fe-rich amorphous wires*", J. Magn. Magn. Mat., 1995 (en prensa).
- Zhukov, A.P., Vázquez, M., Velázquez, J., Hernando, A., Larin, V., (2): "*Magnetic properties of Fe-based glass-coated microwires*", Journal of Physics D: Applied Physics (en revisión), 1995.
- Zhukov, A., Vázquez, M., Velázquez, J., García, C., Ponomarev, B., (3): "*Frequency dependence of coercivity in amorphous materials*", Conference on the Barkhausen effect, Psicov, Russia, September 12-14, 1995.
- Zhukov, A., Velázquez, J., Navarro, E., Sánchez, M.L., (4): "*The magnetization profile and critical length of Co-Si-B wire with negative magnetostriction*", IV International Workshop in non-crystalline solids, paper R-18.
- Zhukov, A., Gómez-Polo, C., Crespo, P., Vázquez, M., (5): "*Axial and transverse magnetization processes of glass-coated amorphous microwires*", enviado a EMMA' 95, 1995.
- Ziman, J.M.: "*Principios de la teoría de sólidos*", editado por Selecciones Científicas, Madrid, 1969.